세종대학교 2023학년도 모의논술고사
자연계열 예시 답안

[문제1]

(1-1) 시각 t에서 물의 부피 $V(t)$에 대하여

$$81\pi t = V(0) + \int_0^t V'(s)\,ds = V(t) = \pi\int_0^{h(t)} (20y - y^2)\,dy$$

이므로 $h(t) = 9$일 때,

$$81\pi t = \pi\int_0^{h(t)} (20y - y^2)\,dy = \pi\left\{10h^2(t) - \frac{h^3(t)}{3}\right\} = \pi\left(10 \times 9^2 - \frac{9^3}{3}\right) = 567\pi$$

이다. 따라서 $t = 7$이다.

(1-2) $81\pi t = \pi\int_0^{h(t)} (20x - x^2)dx$의 양변을 미분하면 $81\pi = \pi h'(t)\{20h(t) - h(t)^2\}$이므로

$h(t) = 9$일 때 $h'(t) = \dfrac{81}{20h(t) - h(t)^2} = \dfrac{81}{20 \times 9 - 9^2} = \dfrac{9}{11}$이다.

(1-3)

$y = h(t)$이므로 (1-2)의 계산으로부터 $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{81}{20y - y^2}$이다. 따라서

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{81}{20y - y^2}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{81}{20y - y^2}\right) \times \frac{dy}{dt} = -\frac{81(20 - 2y)}{(20y - y^2)^2} \times \frac{dy}{dt}$$

를 얻는다. $y = 9$, $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{9}{11}$를 대입하면, $\dfrac{d^2y}{dt^2} = -\dfrac{18}{11^3} = -\dfrac{18}{1331}$이다.

또한 역함수 미분법을 이용하면 $\dfrac{dt}{dy} = \dfrac{20y - y^2}{81}$이고

$\dfrac{d^2t}{dy^2} = \dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{dt}{dy}\right) = \dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{20y - y^2}{81}\right) = \dfrac{20 - 2y}{81}$이므로, $y = 9$를 대입하면 $\dfrac{d^2t}{dy^2} = \dfrac{2}{81}$이다.

세종대학교 2023학년도 모의논술고사
자연계열 예시 답안

[문제2]

(2-1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt} = \dfrac{t^2-4}{4t}$ 로부터 $0<t<2$이면 $\dfrac{dy}{dx}<0$, $t>2$이면 $\dfrac{dy}{dx}>0$ 이다. $t=0$일 때 $y=0$이고 $t=2$일 때 $y=-16$이므로 y의 최솟값은 $t=2$일 때이다. 따라서 점 Q의 좌표는 $(25, -16)$이다.

(2-2) $t=0$에서 $t=a$까지의 곡선의 길이는

$$\int_0^a \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_0^a \sqrt{(12t)^2+\left(3t^2-12\right)^2}\,dt = a^3+12a\text{이다.}$$

$a^3+12a=13$ 으로부터 $a=1$이다. 따라서 점 P의 좌표는 $(7, -11)$이다.

$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=1} = \left.\dfrac{dy/dt}{dx/dt}\right|_{t=1} = \left.\dfrac{t^2-4}{4t}\right|_{t=1} = -\dfrac{3}{4}$이므로, 직선 L_1의 방정식은 $3x+4y+23=0$이다.

(2-3) 점 A의 좌표는 $3x+4\times 0+23=0$ 으로부터 $\left(-\dfrac{23}{3}, 0\right)$이다.

삼각형 ABD는 $\overline{AB}=\overline{AD}$인 이등변삼각형이다. 점 A에서 직선 L_2에 내린 수선의 발을 H라 하자. 직선 AH에 있는 임의의 점 (x, y)는 직선 L_1과 x축으로부터 거리가 동일하므로,

$\dfrac{|3x+4y+23|}{\sqrt{3^2+4^2}} = |y|$ 이 성립한다. 이로부터 $3x-y+23=0$ 또는 $3x+9y+23=0$가 나온다.

점 H는 제4사분면에 있으므로 직선 AH는 기울기가 음수이다. 따라서 직선 AH의 방정식은 $3x+9y+23=0$이다.

직선 L_2는 AH에 수직이고 점 Q$(25, -16)$을 지나므로, 직선 L_2의 방정식은 $3x-y-91=0$이다.

따라서 점 D의 좌표는 $\left(\dfrac{91}{3}, 0\right)$이다.

(별해)

$\angle BAD=\theta$(단, $\theta<0$)라 하면 $\angle HAD=\dfrac{\theta}{2}$ 이고, $-\dfrac{3}{4}=\tan\theta=\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$ 임을 이용하면

$\tan\dfrac{\theta}{2}=-\dfrac{1}{3}$이므로 직선 AH의 기울기는 $-\dfrac{1}{3}$이다. 직선 L_2는 AH에 수직이고 점 Q$(25, -16)$을 지나므로, 직선 L_2의 방정식은 $3x-y-91=0$이다. 따라서 점 D의 좌표는 $\left(\dfrac{91}{3}, 0\right)$이다.

세종대학교 2023학년도 모의논술고사
자연계열 예시 답안

[문제3]

(3-1) 조건 (가)로부터 $f(x)=a(x-k)^2$ (단, $a\neq 0$, $k<0$)이라 둘 수 있고,

$$g(x)=f(f(x))=a(a(x-k)^2-k)^2=a(ax^2-2akx+ak^2-k)^2$$

이므로

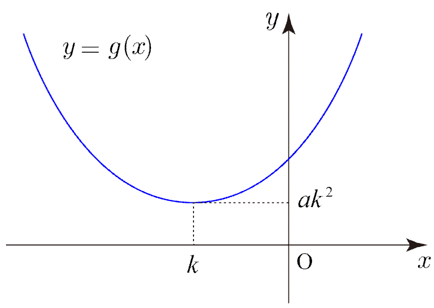
$$g'(x)=4a^2(ax^2-2akx+ak^2-k)(x-k)$$

이다. 그런데 $g'(x)$의 인수 중에서 이차식 $ax^2-2akx+ak^2-k$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2k^2-a(ak^2-k)=ak$$

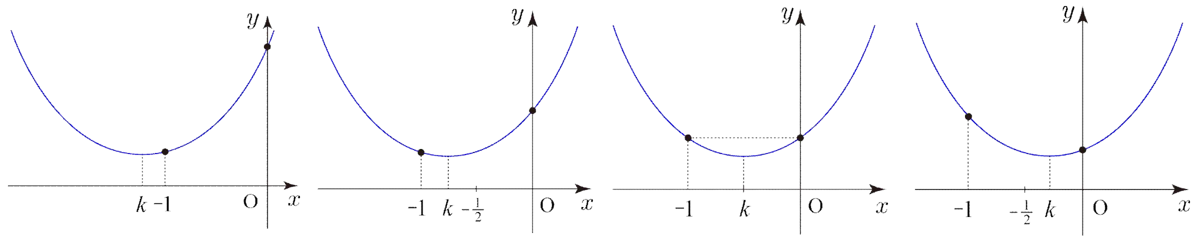
이다. 그러므로 $a<0$일 때는 $\frac{D}{4}>0$이고 방정식 $g'(x)=0$은 서로 다른 세 실근 $x=k,\ k\pm\sqrt{\frac{k}{a}}$를 갖게 되므로 함수 $g(x)$는 세 군데에서 극값을 가지게 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다. $a>0$일 때는 $\frac{D}{4}<0$이고 방정식 $g'(x)=0$의 실근은 $x=k$뿐이며 $x<k$일 때 $g'(x)<0$, $x>k$일 때 $g'(x)>0$임을 알 수 있다. 따라서 $g(x)$는 $x=k$에서 극솟값을 가지며, 이는 $g(x)$의 유일한 극값이다. 따라서 $a>0$일 때 조건 (나)를 만족시키며, 포물선 $y=f(x)$는 아래로 볼록하다.

(3-2) $g''(x)=4a^2(3ax^2-6akx+3ak^2-k)$인데 $a>0$이고 $k<0$이므로 $3ax^2-6akx+3ak^2-k$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=3ak<0$이다. 따라서 모든 실수 x에 대하여 $3ax^2-6akx+3ak^2-k>0$이고 $g''(x)=4a^2(3ax^2-6akx+3ak^2-k)>0$이다. 그러므로 $g''(x)>0$인 x의 범위는 실수 전체의 집합이다. 따라서 모든 실수 x에 대하여 곡선 $y=g(x)$는 아래로 볼록하다. 또한 $g(k)=ak^2>0$이다. 그런데 $f(x)=a(x-k)^2$이 직선 $x=k$를 중심으로 대칭이므로 $g(x)=f(f(x))$역시 $x=k$를 중심으로 대칭이다. 따라서 (3-1)의 계산 결과를 함께 이용하여 좌표평면에 곡선 $y=g(x)$의 개형을 그리면 다음과 같다.



$y=g(x)$가 직선 $x=k$를 중심으로 대칭이고 $x<k$일 때 $g(x)$가 감소하며 $x>k$일 때 $g(x)$가 증가하므로, 조건 (다)의 식 $g(-1)\leq g(0)$을 만족시키기 위해서는 $|k-(-1)|\leq|k-0|$이어야 한다. 그런데 $k<0$ 이므로 이를 다시 쓰면 $|k+1|\leq -k$, 즉 $k\leq k+1\leq -k$이므로 $k\leq -\frac{1}{2}$을 얻어 k의

최댓값은 $-\frac{1}{2}$이다. (다음 그림 참조)



$(k \le -1)$ $\quad$ $(-1 < k < -\frac{1}{2})$ $\quad$ $(k = -\frac{1}{2})$ $\quad$ $(-\frac{1}{2} < k < 0)$

(별해) $g(-1) = a(a(1+k)^2 - k)^2 = a(a + 2ak + ak^2 - k)^2$이고 $g(0) = a(ak^2 - k)^2$인데 $a > 0$, $ak^2 - k > 0$, $a + 2ak + ak^2 - k = a(1+k)^2 - k \ge -k > 0$이므로 $y = ax^2$이 $x > 0$에서 증가하는 함수임에 유의하면 $g(-1) \le g(0)$ 이기 위해서는

$$a + 2ak + ak^2 - k \le ak^2 - k$$

이어야 한다. 따라서 $a + 2ak = a(1+2k) \le 0$이고 $k \le -\frac{1}{2}$이다. 나머지 부분의 풀이는 위와 같다.

(3-3) 모든 실수 x에 대하여 $g(x) > 0$이므로 다음을 얻는다.

$$h(-k) = g(g(k)) > 0$$

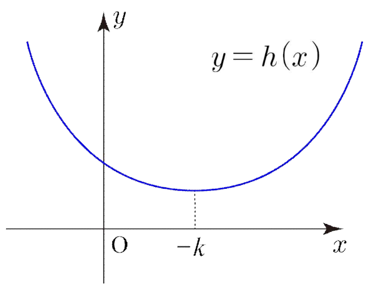
그런데 함수 $g(x)$의 그래프는 직선 $x = k$를 중심으로 대칭이므로, 임의의 실수 c에 대하여 다음이 성립한다.

$$h(-k+c) = g(g(k-c)) = g(g(k+c)) = g(g(-(-k-c))) = h(-k-c)$$

그러므로 함수 $h(x)$의 그래프는 직선 $x = -k$를 중심으로 대칭이다.
또한 $h'(x) = -g'(g(-x))g'(-x)$인데 항상 $g(-x) > 0$이므로 $-g'(g(-x)) < 0$이다. 따라서 다음을 얻는다.

(i) $x < -k$일 때: $-x > k$이므로 $g'(-x) > 0$이고 $h'(x) = -g'(g(-x))g'(-x) < 0$이다.
(ii) $x = -k$일 때: $-x = k$이므로 $g'(-x) = 0$이고 $h'(x) = -g'(g(-x))g'(-x) = 0$이다.
(iii) $x > -k$일 때: $-x < k$이므로 $g'(-x) < 0$이고 $h'(x) = -g'(g(-x))g'(-x) > 0$이다.

이와 같은 결과를 이용하여 곡선 $y = h(x)$의 개형을 그리면 다음과 같다.



따라서 다음을 얻는다.

(i) $p=-k$일 때: 함수 $h(x)$의 그래프는 직선 $x=-k$를 중심으로 대칭이므로 다음이 성립한다.

$$\int_0^p h(x)\,dx = \int_0^{-k} h(x)\,dx = \int_{-k}^{-2k} h(x)\,dx = \int_p^{2p} h(x)\,dx$$

(ii) $0<p<-k$일 때: 그래프의 대칭성과 $h(x)$의 증감을 생각하면 다음이 성립한다.

$$\int_0^p h(x)\,dx > \int_p^{2p} h(x)\,dx$$

(iii) $p>-k$일 때: 마찬가지로 그래프의 대칭성과 $h(x)$의 증감을 생각하면 다음이 성립한다.

$$\int_0^p h(x)\,dx < \int_p^{2p} h(x)\,dx$$

그러므로 $\int_0^p h(x)\,dx = \int_p^{2p} h(x)\,dx$를 만족시키는 p는 $-k$ 뿐이다. 그런데 $k \le -\frac{1}{2}$이므로 $-k \ge \frac{1}{2}$이고, 문제의 조건을 만족시키는 실수 p의 최솟값은 $\frac{1}{2}$이다.

(참고) 임의의 실수 x에 대하여 $g''(g(-x))>0$, $g'(g(-x))>0$, $g''(-x)>0$임을 이용하면

$$h''(x) = g''(g(-x))\{g'(-x)\}^2 + g'(g(-x))g''(-x) > 0$$

이다. 그러므로 $h(x)$의 그래프는 아래로 볼록함을 알 수 있다.