단국대학교 2023학년도 모의논술고사

자연계열 문제

전 형 명	논술우수자	모집단위	
수험번호		성 명	

☑ 수험생 유의사항

1. 시험시간은 120분이며, 고사 종료시까지 퇴실할 수 없습니다. (중도퇴실할 경우 결시처리)
2. 문제번호와 답안번호가 반드시 일치하여야 합니다. (일치하지 않을 경우 0점 처리됨)
3. 문제별 답안작성란을 벗어나지 않게 작성하여야 합니다.
4. 답안 작성 시 인적사항 등 답안과 관련 없는 내용을 작성한 경우 0점처리 됩니다.
5. 답안은 반드시 **검정색 필기구**로 작성하시기 바랍니다.
   (연필, 샤프, 빨간색이나 파란색 필기구 사용금지)
6. 답안지는 교체가 불가하오니 원고지 교정부호 또는 수정테이프를 사용하여 수정하시기 바랍니다.
7. 연습지는 대학에서 제공하는 A4용지를 활용하시기 바랍니다.
8. 휴대폰 등 전자기기는 전원을 끄고 비닐백에 넣어 좌석 아래에 보관하시기 바랍니다. 고사 중에 벨소리, 진동, 알람 등의 소리가 울릴 경우 부정행위자로 간주하여 처리합니다.

※ 시험이 시작되기 전에는 표지를 넘기지 마십시오.

단국대학교 DANKOOK UNIVERSITY

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (55점)

<제시문>

(가) 수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$일 때, (i) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le b_n$이면 $\alpha \le \beta$ (ii) 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$이고 $\alpha = \beta$이면 수열 $\{c_n\}$은 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$
(나) 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고, $x=a$의 좌우에서 (i) $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대 (ii) $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소
(다) 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때, $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$

[논제 1] 다음 극한값을 구하시오. (15점)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+1)(k^2+3)}$$

- 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때 [논제 2]와 [논제 3]의 물음에 답하시오.

(1) $f(x)$는 $x=\alpha$, $x=\beta\ (0<\alpha<\beta)$에서 극값을 갖는다.
(2) $f(0)=f(\beta)$
(3) $\int_0^{\beta} f(x)dx - \beta f(\beta) = 108$

[논제 2] 함수 $f(x)$의 두 극값의 차를 구하시오. (20점)

[논제 3] 양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $\mathrm{P}(t, f(t))$, $\mathrm{Q}(3t, f(3t))$를 $1:3$으로 내분하는 내분점을 R라 하자. 점 R가 나타내는 곡선의 방정식을 $y=g(x)$라 하면, 함수 $g(x)$는 $x=\gamma$에서 극솟값을 갖는다.

$\int_0^{\frac{2}{3}\gamma} f(x)dx = 50$일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하시오. (20점)

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (45점)

<제시문>

(가) 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
(나) 함수 $f(t)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, $$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \quad (\text{단, } a < x < b)$$
(다) 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a) = 0$이고, $x = a$의 좌우에서 (i) $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x = a$에서 극대 (ii) $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x = a$에서 극소

[논제 1] 함수 $f(x) = -(x-1)^2 + 1$에 대하여, 열린구간 $(1, 2)$에서 정의된 함수

$$g(x) = \int_0^x |f(x) - f(t)|dt$$

라 하자. $g(x)$가 $x = a$에서 극값을 가질 때, a의 값을 구하시오. (20점)

[논제 2] 양의 실수 α에 대하여 함수

$$h(x) = \alpha x^2 e^{-\frac{2x}{\alpha}}$$

라 하고, 실수 t에 대하여 $k(t)$를 닫힌구간 $[h(t), h(t)+\alpha]$에서 $h(x)$의 최댓값이라 하자. 함수 $k(t)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 α의 최댓값을 구하시오. (25점)

모든 양의 실수 t에 대하여 $k(t)$의 값이 일정하다.

(단, $\lim_{x \to -\infty} h(x) = \infty$이고 $\lim_{x \to \infty} h(x) = 0$)