세종캠퍼스 자연계열 논술고사 안내

- 고사 시간 : 70분

- 문제 형식 및 문제수 : 서술형 문제 7개 (배점 10점 문제 5개, 15점 문제 2개)

- 출제 범위 : 수학 I, 수학 II

올해 처음 실시되는 세종캠퍼스 자연계열 논술고사는 수학I, 수학II 교과서와 수능 수학영역의 문제와 유사한 형식과 내용으로 출제될 예정입니다. 풀이과정을 답과 함께 기술하는 서술형 문제로서 고교 교육과정을 충실히 이수한 학생이라면 어려움 없이 해결할 수 있는 난이도의 문제입니다. 또한, 수능을 준비하는 학생들에게 별도의 부담이 없도록 2023학년도 EBS 수능 연계교재 ‘수능특강’, ‘수능완성’과의 연계성이 높게 출제될 예정입니다.

세종캠퍼스 자연계열 논술고사 예시 문제

문제 1 (10점)

함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 y축에 대해 대칭이동 시킨 후, x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -8만큼 평행이동한 것이다. 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$를 구하고, $y=g(x)$가 점$(a,0)$, $(0,b)$를 지날 때, a^2+b를 구하시오.

문항 해설

지수함수의 그래프를 대칭이동, 평행이동 시켜 함수를 구한다. 지수함수와 로그함수는 서로 역함수임을 이용하여 역함수를 구하고, 지수함수, 로그함수의 성질을 활용하여 답을 구한다.

예시 답안

지수함수 $y=2^x$의 그래프를 y축에 대해 대칭이동하면

$$y=2^{-x}$$

이고, 이를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -8만큼 평행이동하면,

$$f(x)=2^{-(x-2)}-8$$

함수 $y=f(x)$를 x에 대하여 정리하면, $x=-\log_2(y+8)+2$ 이고,
x와 y를 바꾸어 $f(x)$의 역함수 $g(x)$를 구하면 다음과 같다.

$$g(x)=-\log_2(x+8)+2$$

함수 $g(x)$가 점$(a,0)$를 지나므로 $g(a)=0$ 이고, $f(0)=a$이다. 즉,

$$a=f(0)=2^{-(0-2)}-8=-4$$

이고, 함수 $g(x)$가 점$(0,b)$를 지나므로 $g(0)=b$ 이다. 따라서 b

$$b=-\log_2 8+2=-1 \text{ 이고,}$$

$$a^2+b=16-1=15$$

단계	채점 기준	배점
(1)	지수함수의 그래프를 y축에 대해 대칭이동한 함수를 구함 (1점) 대칭이동 후 평행이동한 함수를 구함 (2점)	3
(2)	로그함수를 이용하여 역함수를 구함	2
(3)	$g(a)=0$ 또는 $f(0)=a$를 이용하여 a를 구함 (2점) $g(0)=b$ 또는 $f(b)=0$를 이용하여 b를 구함 (2점) 구해진 a, b를 이용하여 a^2+b를 구함 (1점)	5

문제 2 (15점)

함수 $f(x)=-2x^3+3(a-1)x^2+6ax$의 극댓값이 0일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. (단, $a \geq 0$)

문항 해설

도함수를 활용하여 함수의 극댓값을 구한다.

예시 답안

$f'(x)=-6x^2+6(a-1)x+6a=-6(x^2-(a-1)x-a)=-6(x-a)(x+1)=0$ 에서

$$x=-1 \text{ 또는 } x=a$$

이고, $a \geq 0$이므로 함수의 증감을 표로 나타내면 다음과 같다.

	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<a$	$x=a$	$x>a$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘		↗		↘

따라서, 함수 $f(x)$는 $x=a$ 에서 극댓값을 갖는다.

극댓값이 0 이므로,

$$f(a)=-2a^3+3(a-1)a^2+6a^2=a^3+3a^2=a^2(a+3)=0$$

이고, $a=-3$ 또는 $a=0$이다. $a \geq 0$이므로, $a=0$ 이다.

따라서,

$$f(x)=-2x^3-3x^2$$

이고,

$$f(1)=-2-3=-5$$

이다.

단계	채점 기준	배점
(1)	도함수를 이용하여 함수의 증감을 구하고 $f(x)$가 극대가 되는 x 값을 구함	5
(2)	극댓값이 0임을 이용하여 a를 구함	5
(3)	a의 값을 이용하여 $f(1)$를 구함	5

문제 3 (15점)

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x) = 2x^2 - 4x - \int_0^x f'(t)dt$$

을 만족할 때, 곡선 $y = f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

문항 해설

정적분의 정의와 성질을 이용하여 함수를 구하고, 정적분을 활용하여 넓이를 구한다.

예시 답안

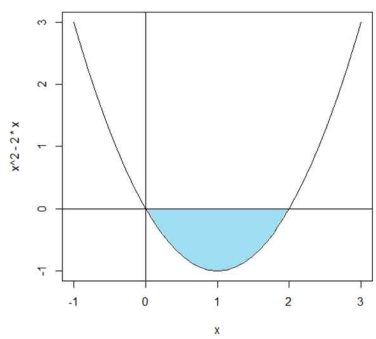
주어진 식에 $x = 0$ 을 대입하면, $\int_0^0 f'(t)\,dt = 0$ 이므로 $f(0) = 0$ 이다.

$\int_0^x f'(t)dt = f(x) - f(0)$ 이므로

$f(x) = 2x^2 - 4x - \int_0^x f'(t)dt = 2x^2 - 4x - (f(x) - f(0)) = 2x^2 - 4x - f(x)$ 이고,

정리하면 $2f(x) = 2x^2 - 4x$ 즉, $f(x) = x^2 - 2x$ 이다.

$f(x) = x^2 - 2x = x(x-2) = 0$ 에서 $x = 0$ 또는 $x = 2$ 이다.
함수 $y = f(x)$의 그래프는 $x = 0, x = 2$에서 x축과 만난다.



구간 [0,2]에서 $f(x) \le 0$ 이므로, 구하는 넓이는 다음과 같다.

$$\int_0^2 |x^2 - 2x|dx = \int_0^2 -(x^2 - 2x)dx = -\left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^2 = -\left(\frac{8}{3} - 4\right) = \frac{4}{3}$$

단계	채점 기준	배점
(1)	식에 $x = 0$을 대입하여 $f(0)$을 구함 (2점) 미분과 적분의 정의를 이용하여 함수 $f(x)$를 구함 (5점)	7
(2)	인수분해를 이용하여 $f(x)=0$인 x값을 구함	3
(3)	정적분을 활용하여 넓이를 구함	5