## 2023학년도 인하대학교 논술 모의고사(자연) 해설

# [문항 1]

### 1. 일반정보

| | | | |
|---|---|---|---|
| 유형 | ■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 | | |
| 전형명 | 논술우수자 | | |
| 해당 대학의 계열(과목) | 자연계열 | 문항번호 | ■ 1번 □ 2번 □ 3번 |
| 출제 범위 | 수학과 교육과정 과목명 | 미적분 | |
| | 핵심개념 및 용어 | 삼각함수의 덧셈정리, 함수의 최솟값 | |
| 예상 소요 시간 | ( 40 ) 분 / 전체 120분 | | |

### 2. 출제 의도

이 문제는 삼각함수의 덧셈정리를 이해하고 이것을 기하적 문제에 활용할 수 있는지를 평가하는 문제이다. 주어진 함수를 미분하여 최솟값을 구할 수 있는지도 아울러 평가한다.

### 3. 출제 근거

1) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

| | |
|---|---|
| 적용 교육과정 | □ 교육부 고시 제2015-74호 [별책8] "수학과 교육과정"<br>□ 수학 □ 수학 Ⅰ □ 수학 Ⅱ ■ 미적분 □ 확률과 통계 |

| 관련 성취기준 | 관련 제시문 | 성취기준 | 과목명: ( 미적분 ) |
|---|---|---|---|
| | (가) | 성취기준 1 | [12미적 02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. |

2) 자료 출처

**교과서 내**

| 도서명 | 저자 | 발행처 | 발행연도 | 참고쪽수 | 관련 제시문 | 재구성 여부 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 미적분 | 권오남 외 | 교학사 | 2021 | 65 | (가) | |
| 미적분 | 이준열 외 | 천재교육 | 2021 | 66 | (가) | |

### 4. 문항 해설

(1-1) 삼각함수의 덧셈정리를 잘 활용하여 기하적 문제를 해결할 수 있는지 평가하는 문제이다.
(1-2) 기하적 취향의 문제로서 다양한 풀이가 가능하다.
(1-3) 주어진 조건에 맞는 함수를 구하고 이를 통하여 최솟값을 구할 수 있는지 평가하는 문제이다.

### 5. 채점 기준

| 하위문항번호 | 채점 기준 | 배점 |
|---|---|---|

| | | |
|---|---|---|
| (1-1) | $\overline{PQ} = 10\tan\frac{\pi}{8}$로 나타내면 | 4점 |
| | $\overline{PQ}$의 값을 구하면 | 6점 |
| (1-2) | $k = \overline{PM} + \overline{QM} = 5\tan\theta + 5\tan(\frac{\pi}{4} - \theta)$로 나타내면 | 5점 |
| | $\overline{MN}$의 값을 올바르게 구하면 | 5점 |
| (1-3) | $k$를 $x$의 식으로 올바르게 나타내면 | 10점 |
| | 미분하여 최솟값을 구하면 | 5점 |

## 6. 예시 답안

(1-1) $\overline{PQ} = 10\tan\frac{\pi}{8}$이다. 한편 제시문에 의해

$$\tan^2\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{(2-\sqrt{2})^2}{4-2} = (\sqrt{2}-1)^2$$이므로 $\overline{PQ} = 10(\sqrt{2}-1)$이다.

(1-2) $\theta = \angle PAM$이라고 하면

$k = \overline{PM} + \overline{MQ} = 5\tan\theta + 5\tan(\frac{\pi}{4} - \theta) = 5\left(\tan\theta + \frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right) = 5\,\frac{1+\tan^2\theta}{1+\tan\theta}$이므로,

$5\tan^2\theta - k\tan\theta + (5-k) = 0$이고, $\tan\theta = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 20(5-k)}}{10}$이다.

$\tan\theta = \frac{\overline{PM}}{\overline{AM}} > \frac{k}{10}$이므로 $\tan\theta = \frac{k + \sqrt{k^2 + 20k - 100}}{10}$이다.

따라서 $\overline{MN} = \overline{PM} - \overline{PN} = 5\tan\theta - \frac{k}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{k^2 + 20k - 100}$이다.

(별해1) 삼각형 $APQ$의 외심을 $O$라 하면 삼각형 $OPQ$도 직각이등변삼각형이 된다. 그리고 $\overline{OA} = \overline{OP} = \frac{k}{\sqrt{2}}$이다. $O$에서 선분 $AM$에 내린 수선의 발을 $R$이라 하면 $\overline{MR} = \overline{NO} = \frac{k}{2}$이므로 $\overline{AR} = 5 - \frac{k}{2}$이다.

$\overline{OR} = \overline{NM}$ 이므로, 삼각형 $AOR$에 대해 피타고라스 정리를 쓰면

$\overline{MN} = \sqrt{(\frac{k}{\sqrt{2}})^2 - (5 - \frac{k}{2})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{k^2 + 20k - 100}$이다.

(별해2) 삼각형 $APQ$의 넓이는 밑변과 높이에 의해서 $\frac{5k}{2}$이다. 또한 $MN$의 길이를 $t$라 할 때, $AP, AQ$의 길이는 각각 $\sqrt{25 + (k/2+t)^2}$, $\sqrt{25 + (k/2-t)^2}$이다.

사인함수를 이용하면 삼각형 $APQ$의 넓이는 $\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{(25 + t^2 + k^2/4)^2 - k^2t^2} = \frac{5k}{2}$가 된다. 양변을 제곱하여 정리하면 $t^4 + 2(25 - k^2/4)t^2 + (k^2/4 - 25)^2 - 25k^2 = 0$이 되고 이로부터 $t^2 = k^2/4 + 5k - 25$를 얻을 수 있다.

(1-3) $\angle PAM = \theta$라 두면, $\overline{PM} = 5\tan\theta$이다. $\angle BAM = \frac{\pi}{4}$이므로

$1 = \tan\frac{\pi}{4} = \frac{\overline{BP} + \overline{PM}}{5} = \frac{x + 5\tan\theta}{5}$로부터 $5\tan\theta = 5 - x$이다.

$$k = \overline{PQ} = \overline{PM} + \overline{MQ} = 5\tan\theta + 5\tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = 5\tan\theta + \frac{5 - 5\tan\theta}{1+\tan\theta}$$
$$= 5 - x + \frac{5 - 5 + x}{1 + 1 - \frac{x}{5}} = 5 - x + \frac{5x}{10-x} = \frac{x^2 - 10x + 50}{10 - x}$$

이므로 $k$를 $x$에 대해 미분하여 미분값이 0일 때의 $x$를 구하면 $x=10-5\sqrt{2}$가 된다. 이때의 $k$의 값은 $10(\sqrt{2}-1)$이고 이 값은 (1-1)에서 얻은 값과 같다.

(별해) $10=\overline{BC}=\overline{BP}+\overline{PN}+\overline{NM}+\overline{MC}=x+\frac{k}{2}+\sqrt{\frac{k^2}{4}+5k-25}+5$이므로 $5-x-\frac{k}{2}=\sqrt{\frac{k^2}{4}+5k-25}$을 얻는다. 양변을 제곱하여 정리하면 $50+x^2-10x=k(10-x)$를 얻게 된다. 따라서 $k=\frac{x^2-10x+50}{10-x}$이다.

$k$를 $x$에 대해 미분하여 미분값이 0일 때의 $x$를 구하면 $x=10-5\sqrt{2}$가 된다. 이때의 $k$의 값은 $10(\sqrt{2}-1)$이고 이 값은 (1-1)에서 얻은 값과 같다.

## [문항 2]

### 1. 일반정보

| 유형 | ■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 | | |
|---|---|---|---|
| 전형명 | 논술우수자 | | |
| 해당 대학의 계열(과목) | 자연계열 | 문항번호 | □ 1번 ■ 2번 □ 3번 |
| 출제 범위 | 수학과 교육과정 과목명 | 수학, 수학II | |
| | 핵심개념 및 용어 | 직선의 방정식, 도형의 넓이, 함수의 미분 | |
| 예상 소요 시간 | ( 40 ) 분 / 전체 120분 | | |

### 2. 출제 의도

(2-1) 직선의 방정식을 결정하는 요소들(기울기, 한 점)을 인식하여 직선의 방정식을 구하고, 교점을 찾기 위해 포물선의 방정식과 연립하여 두 교점을 정확히 찾을 수 있는지를 묻는 문제이다. 또한 도형의 면적을 적분을 이용하여 올바로 계산할 수 있음을 확인하고자 하였다.

(2-2) (2-1)과 유사한 출제 의도이나, (2-1)보다 조금 더 복잡한 계산을 다루고, 근과 계수의 관계를 활용할 수 있는지를 확인하고자 하였다. 근과 계수의 관계를 활용하지 않고 인수분해 또는 근의 공식을 사용하는 경우, 계산 능력을 확인하는 문제이다.

(2-3) 주어진 기울기를 갖는 접선의 방정식, 평행한 두 직선 사이의 거리, 합성함수의 미분 및 삼각함수에 관련된 내용을 이해하고 있는지를 종합적으로 묻는 문제이다. 이 문제를 잘 해결하기 위해서는 주어진 식을 잘 정리할 수 있는 계산 능력 역시 중요하다.

### 3. 출제 근거

1) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

| 적용 교육과정 | □ **교육부 고시 제2015-74호 [별책8] "수학과 교육과정"**<br>■ 수학 □ 수학 I ■ 수학 II □ 미적분 □ 확률과 통계 | | |
|---|---|---|---|
| 관련 성취기준 | 관련 제시문 | 성취기준 | 과목명: ( 수학 ) |
| | (가) | 성취기준 1 | [10수학02-03] 직선의 방정식을 구할 수 있다. |
| | (다) | 성취기준 1 | [10수학01-08] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다. |
| | 관련 제시문 | 성취기준 | 과목명: ( 수학II ) |
| | (나) | 성취기준 1 | [12수학Ⅱ03-05]곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다. |

2) 자료 출처

| 교과서 내 | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 도서명 | 저자 | 발행처 | 발행연도 | 참고쪽수 | 관련 제시문 | 재구성 여부 |
| 수학 | 김원경 외 | 비상 | 2021 | 113 | (가) | 재구성 |
| 수학 | 권오남 외 | 교학사 | 2021 | 116 | (가) | 재구성 |
| 수학II | 김원경 외 | 비상 | 2021 | 130 | (나) | |
| 수학II | 권오남 외 | 교학사 | 2021 | 147 | (나) | |
| 수학 | 김원경 외 | 비상 | 2021 | 52 | (다) | |
| 수학 | 권오남 외 | 교학사 | 2021 | 54 | (다) | |

## 4. 문항 해설

(2-1) 제시문 (가)를 이용하여 직선의 방정식을 구하고 포물선과 연립하면 이차방정식을 얻게 된다. 이 때, 근과 계수의 관계를 이용하면 나머지 한 근을 쉽게 찾을 수 있다. 그 후 제시문 (나)를 이용하여 직접 계산하면 답을 얻을 수 있다. 이 때, 근과 계수의 관계 대신, 인수분해 또는 근의 공식을 사용할 수도 있다.

(2-2) (2-1)에서와 같이 제시문 (가)를 이용하여 직선의 방정식을 구하고 포물선과 연립 후, 근과 계수의 관계를 이용하여 나머지 한 근을 구하게 된다. 마찬가지로 제시문 (나)를 이용하여 도형의 면적을 계산하면 된다. (2-1)에서와 마찬가지로 근과 계수의 관계 대신, 인수분해 또는 근의 공식을 사용할 수도 있다.

(2-3) 도함수를 이용하여 주어진 기울기를 갖는 접점의 $x$좌표를 구하면 접선의 방정식을 얻을 수 있게 된다. 한 점으로부터 직선까지의 거리를 이용하여 평행한 직선의 거리를 구하게 되면 첫 번째 답을 얻을 수 있다. 합성함수의 미분을 통해 도함수를 구하고, 직각삼각형에서의 $\sin, \cos, \tan$의 관계를 통해 구체적인 값들을 구한 후 대입하면 구하고자 하는 답을 얻을 수 있다.

## 5. 채점 기준

| 하위문항번호 | 채점 기준 | 배점 |
|---|---|---|
| (2-1) | 직선의 방정식을 구하면 | 3점 |
| | 교점을 구하면 | 4점 |
| | 정적분을 정확히 계산하면 | 3점 |
| (2-2) | 직선의 방정식을 구하면 | 3점 |
| | 교점을 구하면 | 4점 |
| | 정적분을 정확히 계산하면 | 3점 |
| (2-3) | 접점을 구하면 | 3점 |
| | 접선의 방정식을 구하면 | 3점 |
| | $h$를 $\theta$에 관한 식으로 나타내면 | 3점 |
| | $\tan\theta = \frac{1}{2}$일 때, $\sin\theta$, $\cos\theta$의 값을 정확히 구하면 | 3점 |
| | $\frac{dh}{d\theta}$를 정확히 구하면 | 3점 |

| 6. 예시 답안 |
|---|

(2-1) $\theta=\pi/6$일 때 직선 $l$의 방정식은 제시문 (가)를 이용하면 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1)+1$이 된다. 문제의 조건에서 $x=1$이 직선 $l$과 곡선 $y=x^2$의 교점이 됨을 알 수 있다. 제시문 (다)를 이용하여 직선 $l$과 곡선 $y=x^2$의 두 교점을 모두 구하면 $x=1, \frac{1}{\sqrt{3}}-1$이 된다. 제시문 (나)를 이용하면

$$S(\frac{\pi}{6})=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}-1}^{1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1)+1-x^2\right)dx=\frac{1}{6}(2-\frac{1}{\sqrt{3}})^3=\frac{1}{54}(90-37\sqrt{3})=\frac{5}{3}-\frac{37\sqrt{3}}{54}$$

이 된다.

(2-2) $0<\theta<\frac{\pi}{4}$일 때, $S(\theta)$는 (2-1)의 과정을 일반화하여 구할 수 있다. 즉, 제시문 (가)를 이용하면 구하고자 하는 직선의 방정식은 $y=\tan\theta(x-1)+1$이고, 제시문 (다)의 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하면 $x=1, \tan\theta-1$에서 교점이 생긴다는 것을 알 수 있다. (2-1)에서와 같이 제시문 (나)를 이용하면

$$S(\theta)=\int_{\tan\theta-1}^{1}(\tan\theta(x-1)+1-x^2)dx=\frac{1}{6}(2-\tan\theta)^3$$

이 된다. 따라서 구하고자 하는 답은 $S(\theta)=\frac{1}{6}(2-\tan\theta)^3$이 된다.

(2-3) 접선의 기울기가 $\tan\theta$가 되는 접점의 $x$좌표는 $\frac{\tan\theta}{2}$가 된다. 따라서, 접점의 좌표는 $(\frac{\tan\theta}{2},(\frac{\tan\theta}{2})^2)$이고 직선 $l'$의 방정식은 $y=\tan\theta x-(\frac{\tan\theta}{2})^2$이 된다. $h$의 값은

$$h=\frac{\left|(\frac{\tan\theta}{2})^2-\tan\theta+1\right|}{\sqrt{(\tan\theta)^2+1}}=\frac{1}{4}\cos\theta(\tan\theta-2)^2$$

이 된다.

$\frac{dh}{d\theta}=-\frac{1}{4}\sin\theta(\tan\theta-2)^2+\frac{1}{2}\sec\theta(\tan\theta-2)$이고, 기울기가 $\frac{1}{2}$일 때, $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\tan\theta=\frac{1}{2}$이므로 $\frac{dh}{d\theta}=-\frac{39\sqrt{5}}{80}$가 된다.

# [문항 3 (의예과 1번)]

| 1. 일반정보 |
|---|

| 유형 | ■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 | | |
|---|---|---|---|
| 전형명 | 논술우수자 | | |
| 해당 대학의 계열(과목) | 자연계열 | 문항번호 | □ 1번 □ 2번 ■ 3번(의예과 1번) |
| 출제 범위 | 수학과 교육과정 과목명 | 수학, 수학Ⅱ | |
| | 핵심개념 및 용어 | 명제, 진리집합, 우극한, 함수의 증가와 감소, 평균값 정리 | |
| 예상 소요 시간 | ( 40 ) 분 / 전체 120분 | | |

| 2. 출제 의도 |
|---|

이 문제는 함수의 증가와 감소, 좌극한/우극한, 평균값 정리 등을 잘 이해하고 있는지 이러한 개념과 관련되거나 유사한

상황에 관한 명제들을 이용해서 평가하는 문제이다. 주어진 조건을 정리 또는 공식을 이용해서 풀이하는 표준적인 문제와는 다르게, 알고 있는 정리가 성립하지 않는 반례에 해당하는 상황이나 또는 다른 성격의 명제가 성립하는 상황에 대한 소문항들로 구성되어 있기 때문에 표준적인 문제의 반복학습보다는 교과내용을 깊이 있게 이해하고 사고하는 것을 더 강조하는 문제이다.

## 3. 출제 근거

1) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

| | | | |
|---|---|---|---|
| 적용 교육과정 | ☐ **교육부 고시 제2015-74호 [별책8] "수학과 교육과정"**<br>☐ 수학 ☐ 수학 Ⅰ ■ 수학 Ⅱ ☐ 미적분 ☐ 확률과 통계 | | |
| 관련 성취기준 | 관련 제시문 | 성취기준 | 과목명: ( 수학Ⅱ ) |
| | (가) | 성취기준 1 | [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. |
| | (나) | 성취기준 2 | [12수학Ⅱ02-07] 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다. |

2) 자료 출처

**교과서 내**

| 도서명 | 저자 | 발행처 | 발행연도 | 참고쪽수 | 관련 제시문 | 재구성 여부 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 수학Ⅱ | 권오남 외 | 교학사 | 2021 | 88-90 | (가) | |
| 수학Ⅱ | 이준열 외 | 천재교육 | 2021 | 83-85 | (가) | |
| 수학Ⅱ | 권오남 외 | 교학사 | 2021 | 83-87 | (나) | |
| 수학Ⅱ | 이준열 외 | 천재교육 | 2021 | 78-82 | (나) | |

## 4. 문항 해설

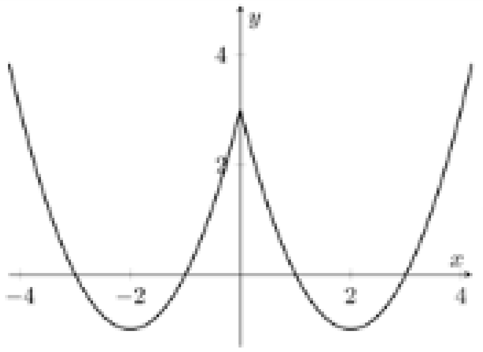
(3-1) 함수의 증가/감소라는 개념을 잘 이해하고 있는지 평가하는 문제이다.
(3-2) 평균값의 정리가 성립하지 않는 상황을 파악할 수 있는지 평가하는 문제이다.
(3-3) 평균값의 정리와 유사한 명제가 성립하는 특정한 조건을 찾을 수 있는지 평가하는 문제이다.

## 5. 채점 기준

| 하위문항번호 | 채점 기준 | 배점 |
|---|---|---|
| (3-1) | $f(x)$가 증가/감소인 구간을 찾아내면 | 3점 |
| | 앞에서 구한 구간과 문제의 상황을 연결시켜서 문제의 조건을 만족하는 $a$의 값을 구하면 | 4점 |
| (3-2) | (a) $g(0)$의 값을 좌극한의 정의를 이용하여 구하면 | 2점 |
| | (a) 주어진 함수의 그래프를 정확히 그리면 | 4점 |
| | (b) 반례가 되는 $a,b$의 값을 찾으면 | 3점 |
| | (b) 구한 $a,b$의 값이 문제의 명제의 반례가 된다는 것을 논리적으로 설명하면 | 4점 |
| (3-3) | $k$의 최솟값을 정확히 구하면 | 3점 |
| | 구한 $k$의 값에 대하여 명제가 성립한다는 사실을 정확히 증명하면 | 7점 |

## 6. 예시 답안

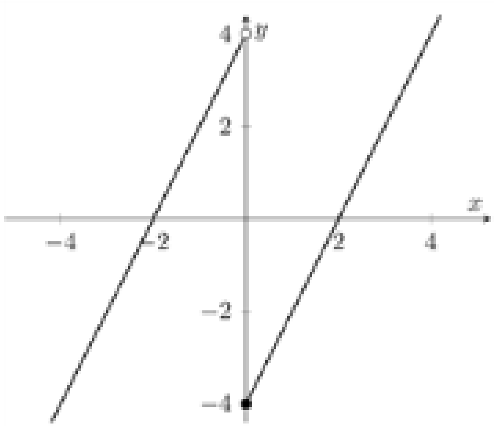
함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.




(3-1) 제시문 (나)에 의하여 $f(x)$는 $[2,\infty)$에서 증가함수이므로 $a \geq 2$이면 명제는 성립하지 않는다. $a < 2$이고 $a \neq -2$이면 $x=2$일 때 두 부등식 $x > a$, $f(x) < f(a)$가 성립하므로 명제는 참이다. $a=-2$이면 명제는 성립하지 않으므로 구하려는 집합은 $(-\infty,-2) \cup (-2,2)$이다.

(3-2) (a) $x > 0$이면 $g(x)=f'(x)=2x-4$, $x < 0$이면 $g(x)=f'(x)=2x+4$이다.

$g(0)=\lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+}(2x-4)=-4$이므로, 함수 $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.




(b) 평균값의 정리에 의하여 명제

| |
|---|
| $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\lim_{x\to c+} f'(x)$이고 $a < c < b$인 실수 $c$가 존재한다. |

는 $b > a \geq 0$ 또는 $0 \geq b > a$일 때 참이므로 반례는 $a < 0, b > 0$인 범위에서 찾아야 한다.

예를 들어 $a=-2, b=2$라고 하면 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$이고 $-2 < c < 2$일 때 (a)의 그래프의 개형으로부터 $f'(c) \neq 0$이므로 명제는 거짓이다.

(3-3) 명제가 성립하는 $k$의 최솟값은 4이다. (3-2)(b)에서 $b-a=4$이고 명제

| |
|---|
| $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\lim_{x\to c+} f'(x)$이고 $a < c < b$인 실수 $c$가 존재한다. |

가 성립하지 않는 $a,b$의 예를 구하였으므로 명제가 참이려면 $k \geq 4$이어야 한다.

역으로 $b-a > 4$이라고 가정하자. $b > a \geq 0$ 또는 $0 \geq b > a$이면 평균값의 정리에 의해 명제가 성립한다. $a < 0, b > 0$이라면, 기울기 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$는 두 점 $(0,f(0))$과 $(b,f(b))$를 지나는 직선의 기울기 $\dfrac{f(b)-f(0)}{b-0}$과 두 점 $(a,f(a))$와 $(0,f(0))$을 지나는 직선의 기울기 $\dfrac{f(0)-f(a)}{0-a}$의 사이에 있는 값 (또는 두 기울기가 같은 경우 두 기울기와 같은 값)이어야 한다. 이 각각의 기울기는 평균값의 정리에 의하여 어떤 $\alpha,\beta$에 대하여 $g(\alpha), g(\beta)$ $(a < \alpha < 0,\ 0 < \beta < b)$와 같다. 그런데, (3-2)(a)에서 구한 함수 $g(x)$의 그래프의 개형으로부터

$b-a>4$이고 $a<0, b>0$이면 $g(b)>g(a)$이므로 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=g(\gamma)$인 실수 $\gamma$ $(a<\gamma<b)$가 반드시 존재한다. (실제로 $b-a>4$일 때, $g(b)>g(a)$이므로 열린구간 $(a,b)$에서 정의된 함수 $g(x)$의 치역은 $-4\le a<0$, $0<b<4$이면 구간 $[-4,4)$, $a<-4$, $0<b<4$이면 구간 $(g(a),4)$, $-4\le a<0$, $b\ge 4$이면 구간 $[-4,g(b))$이고, $a<-4$, $b\ge 4$이면 구간 $(g(a),g(b))$이므로 하나의 구간으로 이루어진다. 따라서 임의의 $\alpha,\beta$ $(a<\alpha,\beta<b)$에 대하여 $g(\alpha),g(\beta)$ 사이에 있는 임의의 값은 다시 함수 $g(x)$의 구간 $(a,b)$에서의 치역에 속한다.)

## [문항 2 (의예과)]

### 1. 일반정보

| | | | |
|---|---|---|---|
| 유형 | ■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 | | |
| 전형명 | 논술우수자 | | |
| 해당 대학의 계열(과목) | 자연계열 | 문항번호 | □ 1번 ■ 2번(의예과) □ 3번(의예과) |
| 출제 범위 | 수학과 교육과정 과목명 | 수학Ⅱ, 미적분 | |
| | 핵심개념 및 용어 | 정적분, 부분적분법 | |
| 예상 소요 시간 | ( 40 ) 분 / 전체 120분 | | |

### 2. 출제 의도

정적분의 개념을 충분히 이해하고 있는지와 부분적분법을 이용하여 주어진 적분을 계산할 수 있는지를 평가한다.

### 3. 출제 근거

1) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

| | | | |
|---|---|---|---|
| 적용 교육과정 | □ **교육부 고시 제2015-74호 [별책8] "수학과 교육과정"**<br>□ 수학 □ 수학Ⅰ ■ 수학Ⅱ ■ 미적분 □ 확률과 통계 | | |
| 관련 성취기준 | 관련 제시문 | 성취기준 | 과목명: ( 수학Ⅱ ) |
| | (가) | 성취기준 1 | [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. |
| | (다) | 성취기준 1 | [12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다. |
| | 관련 제시문 | 성취기준 | 과목명: ( 미적분 ) |
| | (나) | 성취기준 1 | [12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. |

2) 자료 출처

**교과서 내**

| 도서명 | 저자 | 발행처 | 발행연도 | 참고쪽수 | 관련 제시문 | 재구성 여부 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 수학 Ⅱ | 권오남외 | 교학사 | 2021 | 88-90<br>142-148 | (가)<br>(다) | 재구성 |
| 수학 Ⅱ | 이준열외 | 천재교육 | 2021 | 83-89<br>132-138 | (가)<br>(다) | 재구성 |
| 미적분 | 권오남외 | 교학사 | 2021 | 158-161 | (나) | |
| 미적분 | 이준열외 | 천재교육 | 2021 | 155-158 | (나) | |

## 4. 문항 해설

(2-1) 미분을 활용하여 주어진 부등식이 성립함을 보일 수 있는지를 묻는다.
(2-2) 정적분의 개념을 정확하게 이해하고 주어진 함수의 개형을 활용하여 정적분의 값의 부호를 알아낼 수 있는지 묻는다.
(2-3) (2-1)과 (2-2)의 결과를 활용하여 주어진 정적분의 값을 평가할 수 있는지를 묻는다.

## 5. 채점 기준

| 하위문항번호 | 채점 기준 | 배점 |
|---|---|---|
| (2-1) | $x>0$일 때 $\ln x \le x-1$가 성립하는 것을 보이면 된다는 것을 기술하면 | 4점 |
| | 위의 부등식을 미분을 이용하여 증명하면 | 4점 |
| (2-2) | $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$에서 $\sin(2n\pi x)\ln(x+1) \le \sin(2n\pi x)\ln\left(\frac{2k+1}{2n}+1\right)$을 보이면 | 6점 |
| | $\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \sin(2n\pi x)\ln(x+1)\,dx \le 0$ 임을 보이면 | 4점 |
| | $\int_0^1 \sin(2n\pi x)\ln(x+1)\,dx \le 0$ 임을 보이면 | 2점 |
| (2-3) | $f(x)\ln f(x) \ge f(x)\ln(x+1)+f(x)-x-1$가 성립함을 보이면 | 5점 |
| | $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x+1)dx$, $\int_0^1 (x+1)\ln(x+1)dx = \ln 4-\frac{3}{4}$를 계산하면 | 5점 |
| | $\int_0^1 f(x)\ln f(x)dx \ge \ln 4-\frac{3}{4}$임을 보이면 | 5점 |

## 6. 예시 답안

(2-1) $g(x)=x-\ln x-1$로 두면 $g'(x)=1-\frac{1}{x}$이므로 제시문 (가)에 의하여
$x<1$일 때 $g(x)$는 감소하고 $x>1$일 때 $g(x)$는 증가한다.
따라서 $g(x) \ge g(1)=0$이다. 즉 모든 양수 $x$에 대하여 $\ln x \le x-1$이다.
그러므로 $a\ln\frac{b}{a} \le a\left(\frac{b}{a}-1\right)=b-a$이다.
(별해) 곡선 $y=\ln x$ 위의 점 $(1,0)$에서 접선의 방정식은 $y=x-1$이므로 모든 양수 $x$에 대하여 $\ln x \le x-1$이다. 따라서 $a\ln\frac{b}{a} \le a\left(\frac{b}{a}-1\right)=b-a$이다.

(2-2) $\ln(x+1)$은 증가하므로 $k=0,1,2,\dots,n-1$일 때
구간 $\left[\frac{k}{n}, \frac{2k+1}{2n}\right]$에서 $\sin(2n\pi x)\ln(x+1) \le \sin(2n\pi x)\ln\left(\frac{2k+1}{2n}+1\right)$,
구간 $\left[\frac{2k+1}{2n}, \frac{k+1}{n}\right]$에서 $\sin(2n\pi x)\ln(x+1) \le \sin(2n\pi x)\ln\left(\frac{2k+1}{2n}+1\right)$
이다. 그러므로 구간 $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$에서

$$\sin(2n\pi x)\ln(x+1) \le \sin(2n\pi x)\ln\left(\frac{2k+1}{2n}+1\right)$$

이고 제시문 (다)에 의하여

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \sin(2n\pi x)\ln(x+1)dx \le \ln\left(\frac{2k+1}{2n}+1\right)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \sin(2n\pi x)dx = 0$$

이다. 따라서 $\int_0^1 \sin(2n\pi x)\ln(x+1)dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \sin(2n\pi x)\ln(x+1)dx \le 0$이다.

(2-3) (2-1)의 결과를 이용하면 $f(x)\ln\frac{x+1}{f(x)} \le x+1-f(x)$임을 알 수 있다. 그러므로

$$f(x)\ln f(x) \ge f(x)\ln(x+1)+f(x)-x-1$$

이다. 제시문 (다)에 의하여

$$\int_0^1 f(x)\ln f(x)dx \ge \int_0^1 \{(x-\sin(2n\pi x)+1)\ln(x+1)+f(x)-x-1\}dx$$

이다. (2-2)의 결과와

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x+1)dx,\quad \int_0^1 (x+1)\ln(x+1)dx = \ln 4-\frac{3}{4}$$

임을 이용하면 $\int_0^1 f(x)\ln f(x)dx \ge \ln 4-\frac{3}{4}$임을 안다.

# [문항 3 (의예과)]

## 1. 일반정보

| | | | |
|---|---|---|---|
| 유형 | ■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 | | |
| 전형명 | 논술우수자 | | |
| 해당 대학의 계열(과목) | 자연계열 | 문항번호 | □ 1번 □ 2번(의예과) ■ 3번(의예과) |
| 출제 범위 | 수학과 교육과정 과목명 | 수학 Ⅰ | |
| | 핵심개념 및 용어 | 집합, 수학적 귀납법 | |
| 예상 소요 시간 | ( 40 ) 분 / 전체 120분 | | |

## 2. 출제 의도

이 문제는 명제와 상황을 잘 이해하고 논리적으로 사고할 수 있는지를 평가하는 문제이다. 수학적 귀납법을 이용하여 논리적으로 명제를 증명할 수 있는지도 평가한다.

## 3. 출제 근거

1) 교육과정 근거

| | | | |
|---|---|---|---|
| 적용 교육과정 | □ **교육부 고시 제2015-74호 [별책8] "수학과 교육과정"**<br>□ 수학 ■ 수학 Ⅰ □ 수학 Ⅱ □ 미적분 □ 확률과 통계 | | |
| 관련 성취기준 | 관련 제시문 | 성취기준 | 과목명: ( 수학Ⅰ ) |
| | (가) | 성취기준 1 | [12수학 Ⅰ 03-08] 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다. |

2) 자료 출처

| 교과서 내 | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 도서명 | 저자 | 발행처 | 발행연도 | 참고쪽수 | 관련 제시문 | 재구성 여부 |
| 수학 Ⅰ | 권오남 외 | 교학사 | 2017 | 155 | (수학적 귀납법) | 재구성 |
| 수학 Ⅰ | 이준열 외 | 천재교육 | 2017 | 162 | (수학적 귀납법) | 재구성 |
| 수학 Ⅰ | 류희찬 외 | 천재교과서 | 2017 | 153 | (수학적 귀납법) | 재구성 |

## 4. 문항 해설

(3-1) 원소의 개수가 $2$ 이하인 집합은 조화로운 집합이 될 수 없음을 증명하는 문제이다.

(3-2) 배수의 역수의 의미를 이해하면 문제를 해결할 수 있다. 주어진 명제를 문제에 맞게 변형시켜 응용할 수 있는지를 평가한다.

(3-3) 임의의 조화로운 집합 $A$에 (a)의 결과를 이용하면 조화로운 집합의 크기를 하나씩 늘려나갈 수 있다. 이때 집합의 정의에 따라 중복된 원소를 포함할 수 없으므로 (a)를 $A$의 어떤 원소에 적용시킬지 판단해야 한다. 이 문제에서는 이런 판단 능력을 평가한다. 또한 수학적 귀납법을 이용하여 주어진 명제를 증명하는 능력을 평가한다.

## 5. 채점 기준

| 하위문항번호 | 채점 기준 | 배점 |
|---|---|---|
| (3-1) | $2$ 이상인 자연수의 역수는 1보다 작다는 것을 이용하여 $n(A)=1$인 조화로운 집합 $A$가 존재하지 않음을 증명하면 | 1점 |
| | $2$ 이상인 서로 다른 두 자연수의 역수의 합은 $1$보다 작다는 것을 이용하여 $n(A)=2$인 조화로운 집합 $A$가 존재하지 않음을 증명하면 | 4점 |
| (3-2) | (a) $B=\{2\}\cup\{2a \mid a\in A\}$를 찾으면 | 3점 |
| | (a) $B$의 원소의 역수의 합이 $1$임을 증명하면 | 3점 |
| | (a) $\{2a \mid a\in A\}$에 $2$가 포함되지 않음을 보이면 | 1점 |
| | (b) 주어진 조화로운 집합과 (a)에서 사용한 아이디어를 이용하여 조건을 만족하는 조화로운 집합을 찾으면 | 8점 |
| (3-3) | (a) 문제의 조건을 만족하는 순서쌍 $(p,q)$를 하나 찾으면 | 5점 |
| | (b) 주어진 조화로운 집합에 (a)의 결과를 이용하여 원소를 하나 더 갖는 조화로운 집합을 만들면 | 5점 |
| | (b) 수학적 귀납법을 이용하여 주어진 명제를 완벽하게 증명하면 | 5점 |

## 6. 예시 답안

(3-1) $2$ 이상인 자연수의 역수는 항상 $1$보다 작으므로 1개의 원소로 이루어진 조화로운 집합은 존재하지 않는다. 또한, $2$ 이상인 서로 다른 두 자연수 $a,b$에 대하여 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\le\frac{1}{2}+\frac{1}{3}<1$이므로 집합 $\{a,b\}$는 조화로운 집합이 될 수 없다. 따라서 조화로운 집합은 반드시 $3$개 이상의 원소를 포함해야 한다.

(3-2) (a) $A$가 서로 다른 $n$개의 자연수로 이루어졌다고 하고, $A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$라 하자. 집합 $B=\{2,2a_1,2a_2,\dots,2a_n\}$이 문제의 조건을 만족하는 조화로운 집합임을 증명하자. 먼저, $1\not\in A$이므로 $2$, $2a_1,2a_2,\dots,2a_n$은 모두 다른 자연수이다. 그리고 $B$의 정의에 의하여, 임의의 $x\in A$에 대하여 $2x\in B$임을 알 수 있다. 또한, $A$가 조화로운 집합이므로 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=1$을 만족한다.

따라서 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2a_1}+\frac{1}{2a_2}+\cdots+\frac{1}{2a_n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$이 성립하고, $B$가 문제의 조건을 만족하는 조화로운 집합임을 알 수 있다.
(b) $X=\{3,4,5,6,20\}$, $Y=\{3x \mid x\in X\}$라 하자. $X$의 원소 중 3의 배수는 6뿐인데, $X$는 2를 포함하지 않으므로 두 집합 $X$와 $Y$는 서로소이다. 그리고 $X$가 조화로운 집합이므로 $Y$의 원소의 역수의 합은 $\frac{1}{3}$이다. 집합 $A=(X-\{3\})\cup Y$가 조건을 만족하는 조화로운 집합임을 보이자. 우선, $2,3\not\in A$는 자명하다. $A$의 원소의 역수의 합은

$$(X\text{의 원소의 역수의 합})-\frac{1}{3}+(Y\text{의 원소의 역수의 합})=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$$

이므로 $A$는 조화로운 집합이다. 또한, $n(A)=n(X)+n(Y)-1=9$이므로 조화로운 집합 $A$는 문제의 조건을 만족한다.

(3-3) (a) $\frac{1}{m}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$은 $(p-m)(q-m)=m^2$과 동치인데, 이 등식은 $p-m=1$, $q-m=m^2$일 때 성립하므로, $p=m+1$, $q=m^2+m$일 때 성립한다.
(b) 수학적 귀납법을 이용하여 증명하자.
$n=9$일 때, (3-2)에서 2와 3을 포함하지 않고 원소의 개수가 9인 조화로운 집합의 존재성을 증명하였다.
$n>9$에 대하여, $n-1$일 때 명제가 성립한다고 가정하고, $n$일 때 성립함을 증명하자.
$n-1$일 때 명제가 성립하므로 원소의 개수가 $n-1$이고 2,3을 포함하지 않는 조화로운 집합 $X=\{a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}\}$이 존재한다. $X$의 원소 중 $a_{n-1}$이 가장 크다고 하자. 이제 다음 집합이 조건을 만족하는 조화로운 집합임을 증명하자.

$$A=(X-\{a_{n-1}\})\cup\{a_{n-1}+1,a_{n-1}(a_{n-1}+1)\}=\{a_1,a_2,\ldots,a_{n-2},a_{n-1}+1,a_{n-1}(a_{n-1}+1)\}$$

$a_{n-1}$이 $X$의 원소 중 가장 큰 원소이므로 $a_1,a_2,\ldots,a_{n-2},a_{n-1}+1,a_{n-1}(a_{n-1}+1)$은 모두 다르고, $a_{n-1}+1,a_{n-1}(a_{n-1}+1)$은 모두 3보다 크다. 따라서 $A$의 원소의 개수는 $n$이고, $A$는 2와 3을 포함하지 않는다. 한편, (3-3)(a)에 의하여 $A$의 원소의 역수의 합은 $X$의 원소의 역수의 합과 같고, $X$가 조화로운 집합이므로 $A$의 원소의 역수의 합은 1이 된다. 따라서 $A$는 $n$개의 원소를 갖고, 2,3을 포함하지 않는 조화로운 집합이다.
그러므로 수학적 귀납법에 의하여 9 이상인 모든 자연수 $n$에 대하여 원소의 개수가 $n$이고 2,3을 포함하지 않는 조화로운 집합이 존재한다.