2023학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가

수학영역 정답 및 풀이

*최종 수정일 : 22.9.2(금)

■ [공통: 수학 I ·수학 II]				
01.④	02.①	03.②	04.①	05.③
06.⑤	07.⑤	08.①	09.③	10.④
11.②	12.②	13.⑤	14.⑤	15.③
16. 7	17. 16	18. 13	19. 4	
20. 80	21. 220	22. 58		

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\left(\frac{2^{\sqrt{3}}}{2}\right)^{\sqrt{3}+1}=\left(2^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}$$

$$=2^{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$

$$=2^{3-1}=2^2=4$$

정답 ④

2. **출제의도** : 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=2x^2+5$에서

$f'(x)=4x$

이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$$

$$=4\times 2=8$$

정답 ①

3. **출제의도** : 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 탄젠트 함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$

이므로

$$\sin\theta=\frac{5}{13}$$

이때

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$$

$$=1-\left(\frac{5}{13}\right)^2$$

$$=1-\frac{25}{169}$$

$$=\frac{144}{169}$$

$$=\left(\frac{12}{13}\right)^2$$

이고, 주어진 조건에 의하여 $\cos\theta<0$이므로

$$\cos\theta=-\frac{12}{13}$$

따라서

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$=\frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}}$$

$$=-\frac{5}{12}$$

정답 ②

4. **출제의도** : 함수가 연속이 되도록 하는 모든 상수의 값의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=a$에서 연속이어야 한다.

즉,

$f(a)=\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a+}f(x)$

가 성립해야 한다.

$f(a)=-2a+a=-a$,

$\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a-}(-2x+a)$

$=-2a+a=-a$,

$\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a+}(ax-6)=a^2-6$

이므로 $f(a)=\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a+}f(x)$에서

$-a=a^2-6$,

$a^2+a-6=(a+3)(a-2)=0$

$a=-3$ 또는 $a=2$

따라서 구하는 모든 상수 a의 값의 합은

$(-3)+2=-1$

정답 ①

5. **출제의도** : 등차수열의 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_1=2a_5=2(a_1+4d)$

$a_1+8d=0\cdots$㉠

$a_8+a_{12}=(a_1+7d)+(a_1+11d)$

$=2a_1+18d=-6$

$a_1+9d=-3\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $a_1=24$, $d=-3$ 이므로

$a_2=a_1+d=21$

정답 ③

6. **출제의도** : 도함수를 활용하여 다항함수의 극댓값과 극솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^3-3x^2+k$에서

$f'(x)=3x^2-6x$

$=3x(x-2)$

이므로 $f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$

이때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

주어진 조건에 의하여 함수 $f(x)$의 극댓값이 9이므로

$f(0)=k=9$

따라서

$f(x)=x^3-3x^2+9$

이고 함수 $f(x)$의 극솟값은 $f(2)$이므로

구하는 극솟값은

$f(2)=2^3-3\times2^2+9=5$

정답 ⑤

7. **출제의도** : 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$S_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$이므로

$\sum_{k=1}^{10}S_k=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)$

$=1-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}$

한편,

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = S_{10} = \frac{1}{10 \times 11} = \frac{1}{110}$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{10} (S_k - a_k) = \sum_{k=1}^{10} S_k - \sum_{k=1}^{10} a_k$$

$$= \frac{10}{11} - \frac{1}{110} = \frac{99}{110} = \frac{9}{10}$$

정답 ⑤

[다른 풀이]

$k=1$**이면** $S_k - a_k = S_1 - a_1 = 0$

$k \geq 2$**이면** $S_k - a_k = S_{k-1} = \frac{1}{(k-1)k}$

이므로

$$\sum_{k=1}^{10} (S_k - a_k) = (S_1 - a_1) + \sum_{k=2}^{10} (S_k - a_k)$$

$$= 0 + \sum_{k=2}^{10} \frac{1}{(k-1)k}$$

$$= \sum_{k=2}^{10} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right)$$

$$+ \cdots + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

8\. **출제의도** : 두 곡선에 동시에 접하는 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$y = x^3 - 4x + 5$에서

$y' = 3x^2 - 4$

이므로 점 $(1,2)$에서의 접선의 방정식은

$y - 2 = -(x-1)$

$y = -x + 3 \cdots$ ㉠

또한, $y = x^4 + 3x + a$ 에서

$y' = 4x^3 + 3$

이고 곡선 $y = x^4 + 3x + a$와 직선 ㉠이 접하므로 접점의 x좌표는

$4x^3 + 3 = -1$, $x^3 = -1$

$x = -1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1,4)$ 이고 이 점은 곡선 $y = x^4 + 3x + a$ 위의 점이므로

$4 = 1 - 3 + a$

$a = 6$

정답 ①

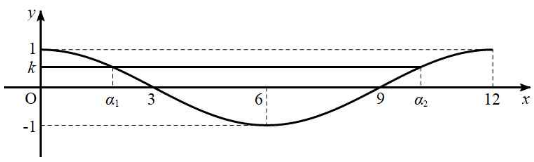
9\. **출제의도** : 삼각함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y = f(x)$의 주기는

$$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$$

이므로 함수 $y = f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



위 그림과 같이 일반성을 잃지 않고

$\alpha_1 < \alpha_2$

라 하면

$\alpha_1 + \alpha_2 = 12$

주어진 조건에 의하여

$\alpha_2 - \alpha_1 = 8$

이므로

$\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 10$

그러므로

$k=\cos\left(\frac{\pi\times 2}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

한편,

$-3\cos\frac{\pi x}{6}-1=\frac{1}{2}$

에서

$\cos\frac{\pi x}{6}=-\frac{1}{2}$

$0\le x\le 12$에서 $0\le\frac{\pi x}{6}\le 2\pi$이므로

$\frac{\pi x}{6}=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{\pi x}{6}=\frac{4}{3}\pi$

즉, $x=4$ 또는 $x=8$

따라서

$|\beta_1-\beta_2|=|4-8|=4$

정답 ③

10. **출제의도** : 정적분을 이용하여 두 점 사이의 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$t=2$에서 점 P의 위치는

$$\int_0^2 v(t)dt=\int_0^2(3t^2+at)dt$$

$$=\left[t^3+\frac{a}{2}t^2\right]_0^2$$

$$=8+2a$$

점 P$(8+2a)$와 점 A(6) 사이의 거리가 10이려면 $|(8+2a)-6|=10$, 즉

$2a+2=\pm 10$

이어야 하므로 양수 a의 값은

$2a+2=10$에서

$a=4$

정답 ④

11. **출제의도** : 실수인 거듭제곱근을 이해하고 조건을 만족시키는 $f(n)$의 값을 지수법칙을 이용하여 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sqrt{3}^{f(n)}$의 네제곱근 중 실수인 것은

$\sqrt[4]{\sqrt{3}^{f(n)}}$, $-\sqrt[4]{\sqrt{3}^{f(n)}}$

이므로

$\sqrt[4]{\sqrt{3}^{f(n)}}\times\left(-\sqrt[4]{\sqrt{3}^{f(n)}}\right)$

$=-\sqrt{3}^{\frac{1}{4}f(n)}\times\sqrt{3}^{\frac{1}{4}f(n)}$

$=-3^{\frac{1}{8}f(n)}\times 3^{\frac{1}{8}f(n)}$

$=-3^{\frac{1}{8}f(n)+\frac{1}{8}f(n)}$

$=-3^{\frac{1}{4}f(n)}=-9$

따라서,

$3^{\frac{1}{4}f(n)}=3^2$

이므로

$\frac{1}{4}f(n)=2$, $f(n)=8\cdots$㉠

이때, 이차함수 $f(x)=-(x-2)^2+k$의 그래프의 대칭축은 $x=2$이므로 ㉠을 만족시키는 자연수 n의 개수가 2이기 위해서는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1,8)$을 지나야 한다.

$f(1)=-1+k=8$

$k=9$

정답 ②

12. **출제의도** : 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이용하여 주어진 선분의 길이를 t에 대한 식으로 나타낸 후, 함수의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 A, B의 좌표를 각각

$\mathrm{A}(a, a^2)$, $\mathrm{B}(b, b^2)$

이라 하면 x에 대한 이차방정식

$x^2-x-t=0$

의 두 근이 a, b이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+b=1$, $ab=-t$

그러므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AH}}&=a-b\\&=\sqrt{(a-b)^2}\\&=\sqrt{(a+b)^2-4ab}\\&=\sqrt{1+4t}\end{aligned}$$

또, 점 C의 좌표가 $\mathrm{C}(-a, a^2)$이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{CH}}&=b-(-a)\\&=b+a=1\end{aligned}$$

따라서

$$\lim_{t\to0+}\frac{\overline{\mathrm{AH}}-\overline{\mathrm{CH}}}{t}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{\sqrt{1+4t}-1}{t}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{(\sqrt{1+4t}-1)(\sqrt{1+4t}+1)}{t(\sqrt{1+4t}+1)}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{(1+4t)-1}{t(\sqrt{1+4t}+1)}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{4t}{t(\sqrt{1+4t}+1)}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{4}{\sqrt{1+4t}+1}$$

$$=\frac{4}{1+1}=2$$

정답 ②

13. **출제의도** : 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 두 선분의 길이의 곱을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형 CDE에서 $\angle\mathrm{CED}=\frac{\pi}{4}$이므로

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{CD}}^2&=\overline{\mathrm{CE}}^2+\overline{\mathrm{ED}}^2-2\times\overline{\mathrm{CE}}\times\overline{\mathrm{ED}}\times\cos\frac{\pi}{4}\\&=4^2+(3\sqrt{2})^2-2\times4\times3\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\\&=10\end{aligned}$$

이므로

$\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{10}$

$\angle\mathrm{CDE}=\theta$라 하면 삼각형 CDE에서

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{\overline{\mathrm{ED}}^2+\overline{\mathrm{CD}}^2-\overline{\mathrm{CE}}^2}{2\times\overline{\mathrm{ED}}\times\overline{\mathrm{CD}}}\\&=\frac{(3\sqrt{2})^2+(\sqrt{10})^2-4^2}{2\times3\sqrt{2}\times\sqrt{10}}\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\sin\theta&=\sqrt{1-\cos^2\theta}\\&=\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

$\overline{\mathrm{AC}}=x$, $\overline{\mathrm{AE}}=y$라 하면 삼각형 ACE에서 코사인법칙에 의하여

$x^2=y^2+4^2-2\times y\times4\times\cos\frac{3}{4}\pi$,

$x^2=y^2+16-2\times y\times4\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

$x^2=y^2+4\sqrt{2}y+16$ … ㉠

한편, 삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{x}{\sin\theta}=2R$, 즉 $\frac{x}{\frac{2}{\sqrt{5}}}=2R$

에서

$$2R=\frac{\sqrt{5}}{2}x$$

삼각형 ABC는 직각삼각형이므로

$\angle \mathrm{CAB}=\alpha$라 하면

$$\cos\alpha=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\frac{x}{\frac{\sqrt{5}}{2}x}=\frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

이등변삼각형 AOC에서

$\angle \mathrm{ACO}=\angle \mathrm{CAO}=\alpha$

이므로 삼각형 ACE에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{x}{\sin\frac{3}{4}\pi}=\frac{y}{\sin\alpha},\ \text{즉}\ \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{y}{\frac{\sqrt{5}}{5}}\text{에서}$$

$\sqrt{2}x=\sqrt{5}y$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$$\frac{5}{2}y^2=y^2+4\sqrt{2}y+16,$$

$$\frac{3}{2}y^2-4\sqrt{2}y-16=0,$$

$$3y^2-8\sqrt{2}y-32=0$$

$(3y+4\sqrt{2})(y-4\sqrt{2})=0$에서

$y=4\sqrt{2}$

이므로

$$\overline{\mathrm{AC}}=x=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\times4\sqrt{2}=4\sqrt{5}$$

따라서

$\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{CD}}=4\sqrt{5}\times\sqrt{10}=20\sqrt{2}$

정답 ⑤

[다른 풀이]

삼각형 CED에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{CD}}^2=\overline{\mathrm{CE}}^2+\overline{\mathrm{DE}}^2-2\times\overline{\mathrm{CE}}\times\overline{\mathrm{DE}}\times\cos\frac{\pi}{4}$$

$$=16+18-2\times4\times3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=34-24=10$$

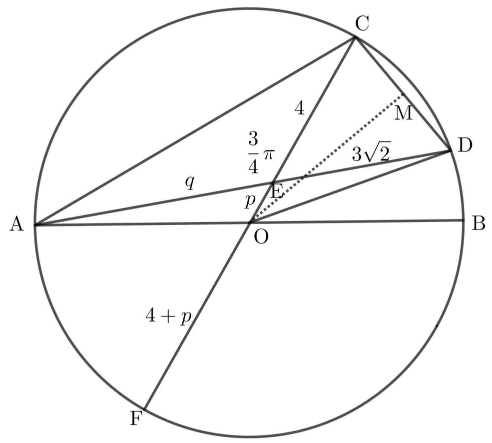
이므로

$$\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{10}$$

직선 OC가 원과 만나는 점 중 C가 아닌 점을 F라 하고, $\overline{\mathrm{OE}}=p$, $\overline{\mathrm{AE}}=q$라 하면

$\overline{\mathrm{EF}}=\overline{\mathrm{EO}}+\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{EO}}+\overline{\mathrm{OC}}$

$\quad=p+(p+4)=2(p+2)$



따라서 원의 성질에 의하여

$\overline{\mathrm{CE}}\times\overline{\mathrm{FE}}=\overline{\mathrm{AE}}\times\overline{\mathrm{DE}}$

이므로

$4\times2(p+2)=q\times3\sqrt{2}$ ⋯ ㉠

한편,

$\angle \mathrm{CAD}$는 호 CD의 원주각이고, $\angle \mathrm{COD}$는 호 CD의 중심각이므로 $\angle \mathrm{CAD}=\theta$라 하면

$\angle \mathrm{COD}=2\times\angle \mathrm{CAD}=2\theta$

$\overline{\mathrm{CO}}=\overline{\mathrm{DO}}$이므로 선분 CD의 중점을 M이

라 하면

$$\angle\mathrm{COM}=\frac{1}{2}\times\angle\mathrm{COD}=\frac{1}{2}\times 2\theta=\theta$$

직각삼각형 OMC에서

$$\sin\theta=\frac{\overline{\mathrm{CM}}}{\overline{\mathrm{OC}}}=\frac{\frac{\sqrt{10}}{2}}{p+4}=\frac{\sqrt{10}}{2(p+4)}$$

따라서 삼각형 AEC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{CE}}}{\sin\theta}=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\frac{3}{4}\pi},\ \text{즉}$$

$$\frac{4}{\frac{\sqrt{10}}{2(p+4)}}=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

이므로

$$\overline{\mathrm{AC}}=\frac{8(p+4)}{\sqrt{10}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{4(p+4)}{\sqrt{5}}\quad\cdots\ ㉡$$

삼각형 AEC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{AC}}^2=\overline{\mathrm{AE}}^2+\overline{\mathrm{CE}}^2-2\times\overline{\mathrm{AE}}\times\overline{\mathrm{CE}}\times\cos\frac{3}{4}\pi$$

$$=q^2+16-2\times q\times 4\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=q^2+4\sqrt{2}q+16\quad\cdots\ ㉢$$

㉡, ㉢에서

$$\left\{\frac{4(p+4)}{\sqrt{5}}\right\}^2=q^2+4\sqrt{2}q+16$$

이때 ㉠에서

$$4(p+2)=\frac{3\sqrt{2}}{2}q$$

이므로

$$\left(\frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}q+8}{\sqrt{5}}\right)^2=q^2+4\sqrt{2}q+16,$$

$$\frac{9}{2}q^2+24\sqrt{2}q+64=5(q^2+4\sqrt{2}q+16),$$

$$9q^2+48\sqrt{2}q+128=10q^2+40\sqrt{2}q+160,$$

$$q^2-8\sqrt{2}q+32=0,$$

$$(q-4\sqrt{2})^2=0$$

$$q=4\sqrt{2}$$

그러므로 ㉢에서

$$\overline{\mathrm{AC}}^2=32+32+16=80$$

이므로

$$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$$

따라서

$$\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{CD}}=4\sqrt{5}\times\sqrt{10}=20\sqrt{2}$$

14. 출제의도 : 함수의 그래프를 이해하고 명제의 참, 거짓을 판단할 수 있는가?

정답풀이 :

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$, $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$를

$f(x)=x(x-1)(x-a)$ (a는 상수)$\cdots$㉠

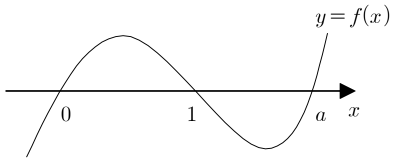
라 하자.

ㄱ. $g(0)=\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1|f(x)|dx=0$

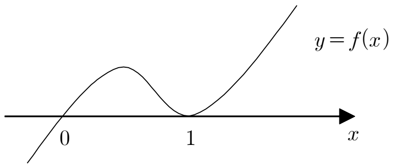
$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1|f(x)|dx$$

따라서 $0\le x\le 1$일 때 $f(x)\ge 0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

(i) $a>1$일 때



(ii) $a=1$일 때



(i), (ii)에 의하여

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx < 0$$

이므로

$$g(-1) = \int_{-1}^{0} f(x)dx - \int_{0}^{1} |f(x)|dx < 0$$

이다. (참)

ㄴ. $g(-1) > 0$이면 $0 \le x \le 1$일 때 $f(x) \le 0$ 이므로

$$g(-1) = \int_{-1}^{0} f(x)dx - \int_{0}^{1} |f(x)|dx$$

$$= \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx$$

$$= \int_{-1}^{1} f(x)dx$$

$$= \int_{-1}^{1} x(x-1)(x-a)dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \{x^3-(a+1)x^2+ax\}dx$$

$$= 2\int_{0}^{1} \{-(a+1)x^2\}dx$$

$$= 2\left[-\frac{a+1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$= -\frac{2(a+1)}{3} > 0$$

즉, $a < -1$ 이므로 $f(k)=0$을 만족시키는 $k < -1$인 실수 k가 존재한다. (참)

ㄷ. $g(-1) = -\frac{2(a+1)}{3} > 1$ 에서

$$a < -\frac{5}{2}$$

$0 \le x \le 1$일 때 $f(x) \le 0$ 이므로

$$g(0) = \int_{0}^{1} f(x)dx - \int_{0}^{1} |f(x)|dx$$

$$= \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx$$

$$= 2\int_{0}^{1} f(x)dx$$

$$= 2\int_{0}^{1} \{x^3-(a+1)x^2+ax\}dx$$

$$= 2\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{a+1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2\right]_0^1$$

$$= 2\left(\frac{1}{4} - \frac{a+1}{3} + \frac{a}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{3}a - \frac{1}{6} < -1 \quad \text{(참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

정답 ⑤

15. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열의 첫째항과 조건을 만족시키는 항의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에 의하여 $a_4 = r$, $a_8 = r^2$

조건 (나)에 의하여

$a_4 = r$이고 $0 < |r| < 1$에서 $|a_4| < 5$이므로

$$a_5 = r+3$$

$|a_5| < 5$이므로

$$a_6 = a_5 + 3 = r + 6$$

$|a_6| \ge 5$이므로

$$a_7 = -\frac{1}{2}a_6 = -\frac{r}{2} - 3$$

$|a_7| < 5$이므로

$$a_8 = a_7 + 3 = -\frac{r}{2}$$

그러므로

$$r^2 = -\frac{r}{2}$$

$r \neq 0$이므로 $r=-\frac{1}{2}$

즉, $a_4=-\frac{1}{2}$

이때 $|a_3|<5$이면 $a_3=-\frac{1}{2}-3=-\frac{7}{2}$이고 이것은 조건을 만족시키며, $|a_3| \geq 5$이면 $a_3=-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=1$인데 이것은 조건을 만족시키지 않으므로

$a_3=-\frac{7}{2}$

또, $|a_2|<5$이면 $a_2=-\frac{7}{2}-3=-\frac{13}{2}$인데 이것은 조건을 만족시키지 않고, $|a_2| \geq 5$이면 $a_2=-2\times\left(-\frac{7}{2}\right)=7$이고 이것은 조건을 만족시키므로

$a_2=7$

또, $|a_1|<5$이면 $a_1=7-3=4$이고, $|a_1| \geq 5$이면 $a_1=-2\times 7=-14$인데 조건 (나)에 의하여 $a_1<0$이므로

$a_1=-14$

따라서

$a_1=-14$, $a_2=7$, $a_3=-\frac{7}{2}$, $a_4=-\frac{1}{2}$,

$a_5=-\frac{1}{2}+3$, $a_6=-\frac{1}{2}+6$, $a_7=\frac{1}{4}-3$, $a_8=\frac{1}{4}$,

$a_9=\frac{1}{4}+3$, $a_{10}=\frac{1}{4}+6$, $a_{11}=-\frac{1}{8}-3$, $a_{12}=-\frac{1}{8}$,

$\cdots$

이와 같은 과정을 계속하면

$|a_1| \geq 5$이고, 자연수 k에 대하여 $|a_{4k-2}| \geq 5$임을 알 수 있다.

그러므로 $|a_m| \geq 5$를 만족시키는 100이하의 자연수 m은

1, 2, 6, 10, $\cdots$, 98

이고, $2=4\times 1-2$, $98=4\times 25-2$이므로

$p=1+25=26$

따라서

$p+a_1=26+(-14)=12$

정답 ③

16. 출제의도 : 로그방정식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

진수 조건에서

$x-4>0$이고 $x+2>0$이어야 하므로

$x>4$ $\cdots$ ㉠

$\log_3(x-4)=\log_{3^2}(x-4)^2=\log_9(x-4)^2$

이므로 주어진 방정식은

$\log_9(x-4)^2=\log_9(x+2)$,

$(x-4)^2=x+2$,

$x^2-8x+16=x+2$,

$x^2-9x+14=(x-2)(x-7)=0$

따라서 $x=2$ 또는 $x=7$

㉠에서 구하는 실수 x의 값은 7이다.

정답 7

17. 출제의도 : 부정적분을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x)=\int(6x^2-4x+3)dx$$

$$=2x^3-2x^2+3x+C$$

(단, C는 적분상수)

이므로

$f(1)=2-2+3+C=3+C=5$

에서

$C=2$

따라서

$f(2)=16-8+6+2=16$

정답 16

18. **출제의도** : 합의 기호 $\sum$의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^{5} ca_k = c\sum_{k=1}^{5} a_k$$
$$= c\times 10 = 10c$$

이고

$$\sum_{k=1}^{5} c = 5c$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{5} ca_k = 65 + \sum_{k=1}^{5} c$$

에서

$10c = 65 + 5c$

$5c = 65$

따라서

$c = 13$

정답 13

19. **출제의도** : 사차방정식이 서로 다른 네 실근을 가질 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$이라 하면

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$

$= 12x(x^2 - x - 2)$

$= 12x(x+1)(x-2)$

이므로 $f'(x) = 0$에서

$x = 0$ 또는 $x = -1$ 또는 $x = 2$

이때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 사차함수 $f(x)$는

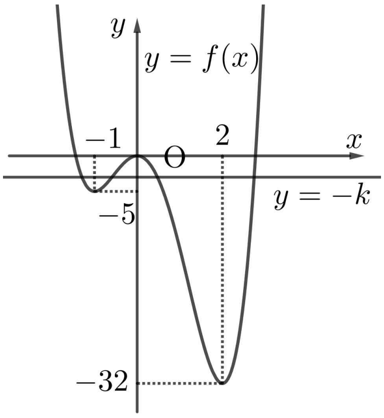
$x = 0$에서 극댓값 $f(0) = 0$을 갖고,

$x = -1$, $x = 2$에서 각각 극솟값

$f(-1) = 3 + 4 - 12 = -5$,

$f(2) = 48 - 32 - 48 = -32$

를 갖는다.



주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = -k$의 교점의 개수와 같으므로 주어진 방정식이 서로 다른 네 실근을 가질 조건은 위의 그래프에서

$-5 < -k < 0$, 즉 $0 < k < 5$

이어야 한다.

따라서 구하는 자연수 k의 개수는 4이다.

정답 4

20. **출제의도** : 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구한 후 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^3+x^2-x$ 에서

$f'(x)=3x^2+2x-1$

$=(3x-1)(x+1)$

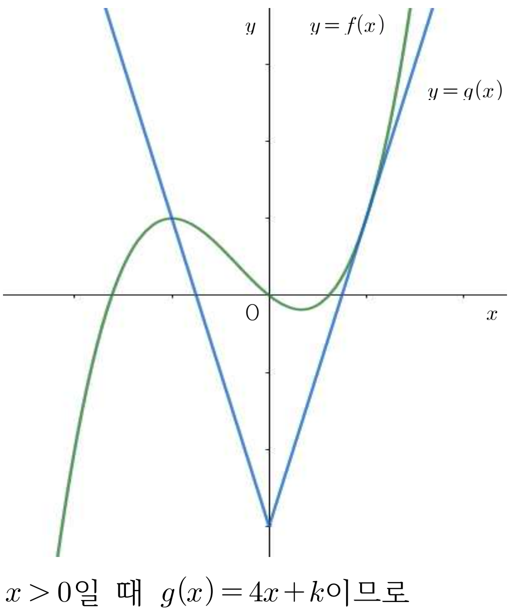
이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

이때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서, 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값이 $f(-1)=1$, $x=\frac{1}{3}$에서 극솟값이 $f\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{5}{27}$ 이므로 두 함수 $f(x)=x^3+x^2-x$, $g(x)=4|x|+k$의 그래프가 만나는 점의 개수가 2이기 위해서는 그림과 같이 $x>0$인 부분에서 두 함수 $f(x)=x^3+x^2-x$, $g(x)=4|x|+k$의 그래프가 접해야 한다.



$x>0$일 때 $g(x)=4x+k$이므로

$f'(x)=3x^2+2x-1=4$

에서

$3x^2+2x-5=0$, $(3x+5)(x-1)=0$

즉, $x=1$ 이므로 접점의 좌표는 $(1,1)$이고

$g(1)=4+k=1$

따라서, $k=-3$

또한, $x<0$일 때 $g(x)=-4x-3$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표는

$x^3+x^2-x=-4x-3$, $x^3+x^2+3x+3=0$

$(x+1)(x^2+3)=0$

$x=-1$

따라서 구하는 넓이 S는

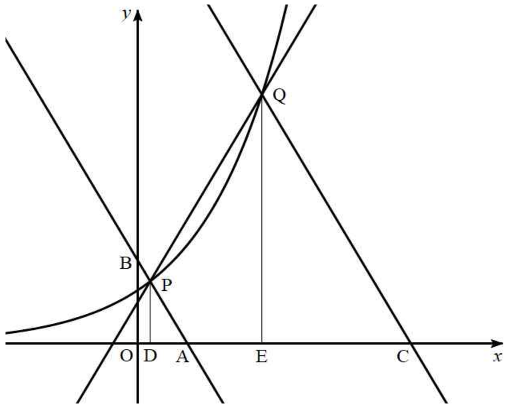
$$S=\int_{-1}^{0}(x^3+x^2+3x+3)dx$$
$$+\int_{0}^{1}(x^3+x^2-5x+3)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+3x\right]_{-1}^{0}$$
$$+\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+3x\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{19}{12}+\frac{13}{12}=\frac{8}{3}$$

$30\times S=30\times\frac{8}{3}=80$

정답 80

21. **출제의도** : 지수함수의 그래프를 이용하여 조건을 만족시키는 점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



위 그림과 같이 두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하자.

$\overline{\mathrm{PB}}=k$라 하면

$$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AB}}-\overline{\mathrm{PB}}$$
$$=4\overline{\mathrm{PB}}-\overline{\mathrm{PB}}$$
$$=3\overline{\mathrm{PB}}=3k$$

이고,

$$\overline{\mathrm{CQ}}=3\overline{\mathrm{AB}}$$
$$=3\times4\overline{\mathrm{PB}}$$
$$=12\overline{\mathrm{PB}}=12k$$

이므로 $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{CQ}}=3k:12k=1:4$

이때 $\triangle\mathrm{PDA}\backsim\triangle\mathrm{QEC}$이므로

$\overline{\mathrm{PD}}:\overline{\mathrm{QE}}=\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{CQ}}=1:4$

즉, $2^a:2^b=1:4$이므로

$2^b=4\times2^a=2^{a+2}$

에서

$b=a+2$

즉,

$$m=\frac{2^b-2^a}{b-a}$$
$$=\frac{2^{a+2}-2^a}{(a+2)-a}$$
$$=\frac{3\times2^a}{2}$$
$$=3\times2^{a-1}$$

이므로 직선 AB의 방정식은

$y-2^a=-3\times2^{a-1}(x-a)$ ······㉠

㉠에 $y=0$을 대입하면

$-2^a=-3\times2^{a-1}(x-a)$

$x-a=\frac{2}{3}$

$x=a+\frac{2}{3}$

즉, 점 A의 x좌표가 $a+\frac{2}{3}$이다.

이때 원점 O에 대하여 $\triangle\mathrm{APD}\backsim\triangle\mathrm{ABO}$이므로

$\overline{\mathrm{AO}}:\overline{\mathrm{DO}}=\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{PB}}=4:1$

즉, $a+\frac{2}{3}:a=4:1$

$a+\frac{2}{3}=4a$

$a=\frac{2}{9}$

$b=a+2=\frac{2}{9}+2=\frac{20}{9}$

따라서

$$90\times(a+b)=90\times\left(\frac{2}{9}+\frac{20}{9}\right)$$
$$=90\times\frac{22}{9}$$
$$=220$$

정답 220

22. 출제의도 : 삼차함수의 그래프와 함수의 연속성을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

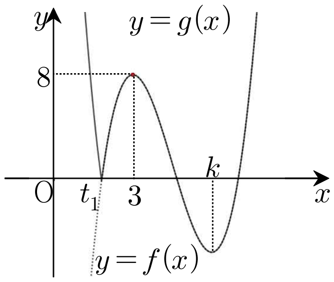
$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\geq t) \\ -f(x)+2f(t) & (x<t) \end{cases}$$

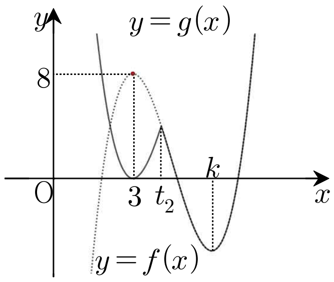
에서

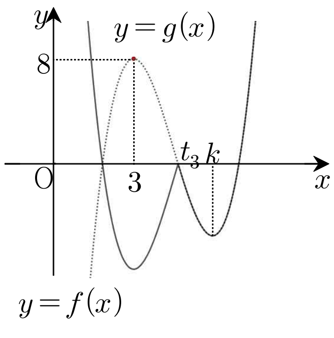
$$\lim_{x\to t-}g(x)=\lim_{x\to t+}g(x)=g(t)=f(t)$$

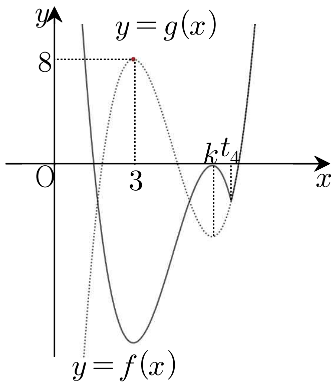
이므로 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

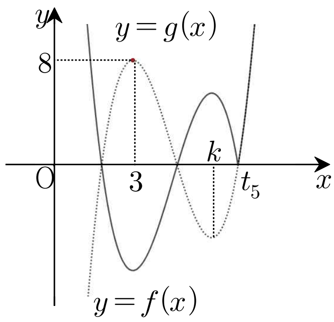
함수 $f(x)$가 $x=k$에서 극솟값을 갖는다고 하자.
이때 함수 $y=-f(x)+2f(t)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후, y축의 방향으로 $2f(t)$만큼 평행이동한 것이다.
방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축과의 교점의 개수와 같으므로 $f(k)$의 값에 따라 나누어 생각할 수 있다.
우선, $f(k)<0$인 경우를 생각해보면 함수 $y=g(x)$가 불연속일 때의 그래프는 다음과 같다.



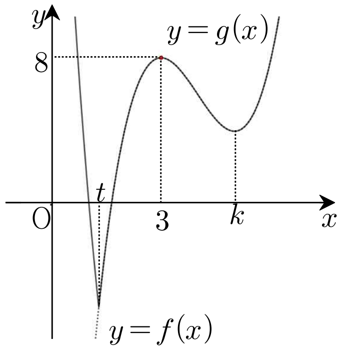




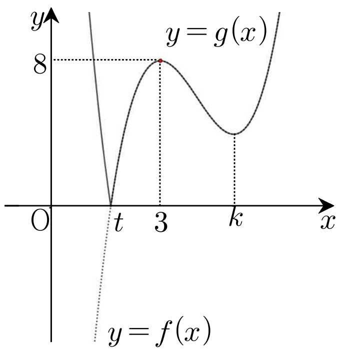




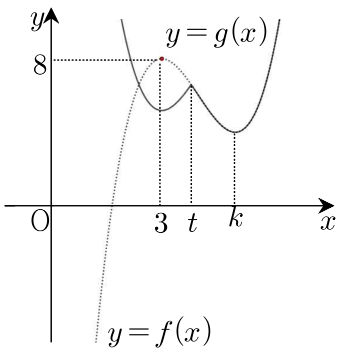
따라서 함수 $h(t)$는
$t=t_i$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$에서 불연속이므로 주어진 조건에 위배된다.
위와 같은 방법으로 함수 $y=f(x)$의 그래프에 따라 함수 $y=g(x)$의 그래프를 그려보면 함수 $h(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 두 개인 경우는 다음과 같이 $t=k$일 때 $g(3)=0$이 되는 경우뿐이다.



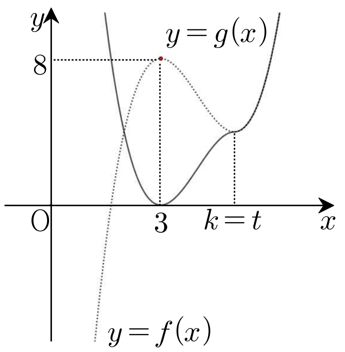
[교점 2개]



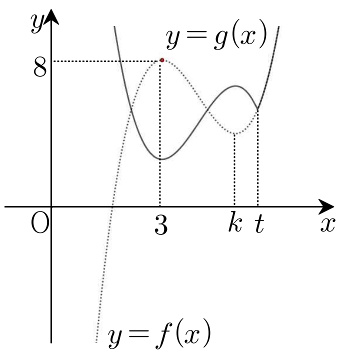
[교점 1개]



[교점 0개]



[교점 1개]



[교점 0개]

$t=k$일 때

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq k) \\ -f(x)+2f(k) & (x<k) \end{cases}$$

이고 이때 $g(3)=0$에서

$-f(3)+2f(k)=0$, 즉 $-8+2f(k)=0$

에서

$f(k)=4$

한편, 최고차항의 계수가 1인 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극댓값을 가지므로 $x=k$에서 극솟값을 가지므로 $k>3$이고

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(x-3)(x-k) \\ &= 3x^2-3(3+k)x+9k \end{aligned}$$

따라서

$f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}(3+k)x^2+9kx+C$ (C는 적분상수)

이고 $f(3)=8$이므로

$27-\dfrac{27}{2}(3+k)+27k+C=8$,

$C=\dfrac{43}{2}-\dfrac{27}{2}k$

따라서

$f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}(3+k)x^2+9kx+\dfrac{43}{2}-\dfrac{27}{2}k$

이때 $f(k)=4$이므로

$k^3-\dfrac{3}{2}(3+k)k^2+9k^2+\dfrac{43}{2}-\dfrac{27}{2}k=4$,

$-\dfrac{k^3}{2}+\dfrac{9}{2}k^2-\dfrac{27}{2}k+\dfrac{35}{2}=0$,

$k^3-9k^2+27k-35=0$,

$(k-5)(k^2-4k+7)=0$

모든 실수 k에 대하여 $k^2-4k+7>0$이므로

$k=5$

따라서

$f(x)=x^3-12x^2+45x-46$

이므로

$f(8)=512-768+360-46=58$

정답 58

■ [선택: 확률과 통계]
23. ① 24. ③ 25. ④ 26. ② 27. ⑤
28. ③ 29. 175 30. 260

23. **출제의도** : 다항식에서 이항정리를 이용하여 x^4의 계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

다항식 $(x^2+2)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6\mathrm{C}_r(x^2)^r 2^{6-r}$

$={}_6\mathrm{C}_r 2^{6-r} x^{2r}$

$(r=0, 1, 2, \cdots, 6)$

따라서 $r=2$일 때 x^4의 계수는

${}_6\mathrm{C}_2 \times 2^4 = 15\times 16$

$=240$

정답 ①

24. **출제의도** : 주어진 조건을 만족시키는 $\mathrm{P}(A)$의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{4}$이고,

$\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$, $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$

이므로

$\dfrac{\frac{1}{4}}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\mathrm{P}(A)}$에서 $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)$

따라서

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$1=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A)-\dfrac{1}{4}$

즉, $\mathrm{P}(A)=\dfrac{5}{8}$

정답 ③

25. **출제의도** : 정규분포를 따르는 확률변수에 대하여 표준정규분포를 이용하여 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

A 제품 1개의 중량을 X라 하면

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(9, 0.4^2)$을 따르고

$Z=\dfrac{X-9}{0.4}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

또 B 제품 1개의 중량을 Y라 하면

확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(20, 1^2)$을 따르고

$Z=\dfrac{X-20}{1}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(8.9\le X\le 9.4)=\mathrm{P}(19\le Y\le k)$에서

$\mathrm{P}\left(\dfrac{8.9-9}{0.4}\le\dfrac{X-9}{0.4}\le\dfrac{9.4-9}{0.4}\right)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{19-20}{1}\le\dfrac{Y-20}{1}\le\dfrac{k-20}{1}\right)$

$\mathrm{P}(-0.25\le Z\le 1)=\mathrm{P}(-1\le Z\le k-20)$

따라서

$\mathrm{P}(-0.25\le Z\le 1)=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0.25)$이므로

$k-20=0.25$에서

$k=20.25$

정답 ④

26. 출제의도 : 확률의 덧셈정리를 이용하여 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

7명이 원 모양의 탁자에 일정한 간격을 두고 둘러앉는 경우의 수는

$(7-1)!=6!$

A가 B와 이웃하는 사건을 E,

A가 C와 이웃하는 사건을 F라 하면

구하는 확률은 $\mathrm{P}(E\cup F)$이다.

(ⅰ) A가 B와 이웃하는 경우

A와 B를 한 명이라 생각하고 6명이 원 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는

$5!$

A와 B가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

2

즉, $\mathrm{P}(E)=\dfrac{5!\times 2}{6!}=\dfrac{1}{3}$

(ⅱ) A가 C와 이웃하는 경우

A와 C를 한 명이라 생각하고 6명이 원 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는

$5!$

A와 C가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

2

즉, $\mathrm{P}(F)=\dfrac{5!\times 2}{6!}=\dfrac{1}{3}$

(ⅲ) A가 B, C와 모두 이웃하는 경우

A, B, C를 한 명이라 생각하고 5명이 원 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는

$4!$

A를 가운데 두고 B와 C가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

2

즉, $\mathrm{P}(E\cap F)=\dfrac{4!\times 2}{6!}=\dfrac{1}{15}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(E\cup F)=\mathrm{P}(E)+\mathrm{P}(F)-\mathrm{P}(E\cap F)$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{15}$$
$$=\frac{3}{5}$$

정답 ②

27. 출제의도 : 이산확률변수의 확률분포에서 조건을 만족시키는 상수의 값을 구하고, 확률변수의 평균과 분산을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{1}{2}+a\times\frac{2}{5}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}a$$
$$\mathrm{E}\left(X^2\right)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{1}{2}+a^2\times\frac{2}{5}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}a^2$$

이때 주어진 조건에서

$\{\sigma(X)\}^2=\{\mathrm{E}(X)\}^2$이고,

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}\left(X^2\right)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로

$\mathrm{V}(X)=\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$\{\mathrm{E}(X)\}^2=\mathrm{E}\left(X^2\right)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$2\{\mathrm{E}(X)\}^2=\mathrm{E}\left(X^2\right)$

$$2\times\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{5}a\right)^2=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}a^2$$
$$\frac{2}{25}a(a-10)=0$$

$a>0$이므로 $a=10$

따라서

$\mathrm{E}(X^2)+\mathrm{E}(X)$

$=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}a^2+\frac{1}{2}+\frac{2}{5}a$

$=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\times 100+\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\times 10$

$=45$

정답 ⑤

28. 출제의도 : 확률의 덧셈정리를 이용하여 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

3의 배수의 집합을 S_0, 3으로 나누었을 때의 나머지가 1인 수의 집합을 S_1, 3으로 나누었을 때의 나머지가 2인 수의 집합을 S_2라 하면

$S_0=\{3, 6, 9\}$

$S_1=\{1, 4, 7, 10\}$

$S_2=\{2, 5, 8\}$

세 수의 곱이 5의 배수이어야 하므로

5 또는 10이 반드시 포함되어야 한다.

또 세 수의 합이 3의 배수이어야 하므로

세 집합 S_0, S_1, S_2에서 각각 한 원소씩을 택하거나, 하나의 집합에서 세 원소를 택해야 한다.

(ⅰ) 5가 포함되는 경우

두 집합 S_0, S_1에서 한 원소씩을 택하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1=12$

S_2에서 두 원소를 택하는 경우의 수는

${}_2\mathrm{C}_2=1$

즉, 경우의 수는 $12+1=13$

(ⅱ) 10이 포함되는 경우

두 집합 S_0, S_2에서 한 원소씩을 택하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1=9$

S_1에서 두 원소를 택하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_2=3$

즉, 경우의 수는 $9+3=12$

(ⅲ) 5와 10이 모두 포함되는 경우

집합 S_0에서 한 원소를 택하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1=3$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

조건을 만족시키도록 세 수를 택하는 경우의 수는

$13+12-3=22$

세 수를 택하는 모든 경우의 수는

${}_{10}\mathrm{C}_3=120$이므로

구하는 확률은

$\frac{22}{120}=\frac{11}{60}$

정답 ③

29. 출제의도 : 표본평균의 분포에서 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

네 장의 카드를 꺼내는 경우의 수는

6^4

네 수를 각각 X_1, X_2, X_3, X_4라 하면

$X_1+X_2+X_3+X_4=11$

$1\le X_i\le 6$ $(i=1, 2, 3, 4)$이므로

음이 아닌 정수 x_i에 대하여
$X_i = x_i + 1$로 놓으면
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$
방정식 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1, x_2, x_3, x_4의 모든 순서쌍 (x_1, x_2, x_3, x_4)의 개수는
${}_4\mathrm{H}_7 = {}_{10}\mathrm{C}_7 = {}_{10}\mathrm{C}_3 = 120$
이때 $7, 0, 0, 0$으로 이루어진 음이 아닌 정수 x_1, x_2, x_3, x_4의 순서쌍 4개와 $6, 1, 0, 0$으로 이루어진 음이 아닌 정수 x_1, x_2, x_3, x_4의 순서쌍 12개는 제외해야 한다.
즉, 조건을 만족시키는 X_1, X_2, X_3, X_4의 모든 순서쌍 (X_1, X_2, X_3, X_4)의 개수는
$120 - (4 + 12) = 104$
따라서 구하는 확률은
$\dfrac{104}{6^4} = \dfrac{13}{162}$
$p = 162,\ q = 13$이므로
$p + q = 162 + 13 = 175$

정답 175

[다른 풀이]
카드 한 장을 꺼낼 확률은 $\dfrac{1}{6}$
네 수의 합이 11인 경우를 다음과 같이 나누어 생각한다.
(i) 세 수가 같은 경우
$(3, 3, 3, 2)$, $(2, 2, 2, 5)$
의 2가지 경우이므로
이 경우 구하는 확률은
$2 \times \dfrac{4!}{3!} \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^4 = 8 \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^4$
(ii) 두 수가 같은 경우
$(4, 4, 2, 1)$, $(3, 3, 4, 1)$, $(2, 2, 6, 1)$, $(2, 2, 4, 3)$, $(1, 1, 6, 3)$, $(1, 1, 5, 4)$
의 6가지 경우이므로
이 경우 구하는 확률은
$6 \times \dfrac{4!}{2!} \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^4 = 72 \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^4$
(iii) 네 수가 모두 다른 경우
$(5, 3, 2, 1)$의 1가지 경우이므로
이 경우 구하는 확률은
$4! \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^4 = 24 \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^4$
(i), (ii), (iii)에서

$$\mathrm{P}\left(\overline{X} = \frac{11}{4}\right) = (8 + 72 + 24) \times \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{104}{6^4} = \frac{13}{162}$$

따라서 $p = 162,\ q = 13$이므로
$p + q = 162 + 13 = 175$

30. **출제의도** : 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
조건 (다)에서 함수 f는 상수함수일 수 없으므로
$n(A) = 2$ 또는 $n(A) = 3$
(i) $n(A) = 2$인 경우
집합 A를 정하는 경우의 수는
${}_5\mathrm{C}_2 = 10$
$A = \{1, 2\}$인 경우를 생각하면
조건 (다)에서 $f(1) = 2,\ f(2) = 1$
$f(3), f(4), f(5)$의 값은 $1, 2$중 하나이므로
$f(3), f(4), f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는
${}_2\Pi_3 = 2^3 = 8$

즉, $n(A)=2$인 경우 함수 f의 개수는

$10\times8=80$

(ⅱ) $n(A)=3$인 경우

집합 A를 정하는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_3=10$

$A=\{1, 2, 3\}$인 경우를 생각하면

조건 (다)에서

순서쌍 $(f(1), f(2), f(3))$은

$(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$뿐이므로

$f(1), f(2), f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는

2

$f(4), f(5)$의 값은 $1, 2, 3$중 하나이므로

$f(4), f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_3\Pi_2=3^2=9$

즉, $n(A)=3$인 경우 함수 f의 개수는

$10\times2\times9=180$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 함수 f의 개수는

$80+180=260$

정답 260

■ [선택: 미적분]
23. ① 24. ② 25. ⑤ 26. ③ 27. ③
28. ④ 29. 3 30. 283

23. **출제의도** : 지수함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{x\to0}\frac{4^x-2^x}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(4^x-1)-(2^x-1)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{4^x-1}{x}-\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}$

$=\ln4-\ln2$

$=\ln\frac{4}{2}=\ln2$

정답 ①

24. **출제의도** : 부분적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$이므로

$\int_0^\pi x\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$

$=\int_0^\pi x\sin x dx$

$=[-x\cos x]_0^\pi-\int_0^\pi(-\cos x)dx$

$=(\pi-0)+[\sin x]_0^\pi$

$=\pi$

정답 ②

25. **출제의도** : 수열의 극한의 성질을 이용하여 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2}{2}=6$에서

$\frac{a_n+2}{2}=b_n$

이라 하면

$a_n=2b_n-2$이고 $\lim_{n\to\infty}b_n=6$

따라서,

$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+1}{a_n+2n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(2b_n-2)+1}{(2b_n-2)+2n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2b_n-2+\frac{1}{n}}{\frac{2b_n}{n}-\frac{2}{n}+2}$

$=\frac{2\times6-2+0}{0-0+2}$

$=5$

정답 ⑤

26. **출제의도** :
입체도형의 부피를 정적분을 이용하여 구할 수 있는가?

정답풀이 :

정사각형의 한 변의 길이가 $\sqrt{\dfrac{kx}{2x^2+1}}$ 이므로 정사각형의 넓이는

$$\left(\sqrt{\frac{kx}{2x^2+1}}\right)^2=\frac{kx}{2x^2+1}$$

그러므로 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_1^2 \frac{kx}{2x^2+1}dx \quad ---㉠$$

이때, $2x^2+1=t$로 놓으면

$$4x=\frac{dt}{dx}$$

또, $x=1$일 때 $t=3$, $x=2$일 때 $t=9$이므로 ㉠은

$$\int_3^9 \frac{k}{4}\times\frac{1}{t}dt$$

$$=\frac{k}{4}\int_3^9 \frac{1}{t}dt$$

$$=\frac{k}{4}\times[\ln t]_3^9$$

$$=\frac{k}{4}\times(\ln 9-\ln 3)$$

$$=\frac{k}{4}\ln 3$$

이 값이 $2\ln 3$이므로

$$\frac{k}{4}\ln 3=2\ln 3$$

$$k=8$$

정답 ③

27. 출제의도 : 등비급수를 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

직각삼각형 $A_1B_1D_1$에서

$$\overline{B_1D_1}=\sqrt{\overline{A_1B_1}^2+\overline{A_1D_1}^2}$$

$$=\sqrt{4^2+1^2}$$

$$=\sqrt{17}$$

이므로

$$\overline{D_1E_1}=\frac{1}{2}\times\overline{B_1D_1}=\frac{\sqrt{17}}{2}$$

그러므로

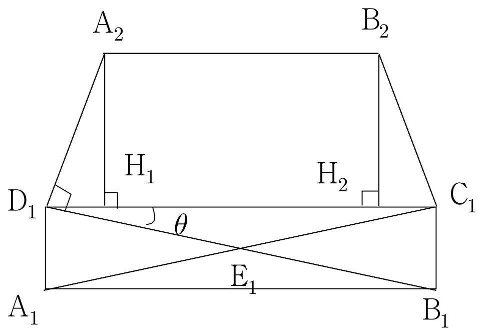
$$S_1=2\times(\triangle A_2D_1E_1)$$

$$=2\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{17}}{2}\times\frac{\sqrt{17}}{2}\right)$$

$$=\frac{17}{4}$$

한편, 직각삼각형 $D_1B_1C_1$에서 $\angle C_1D_1B_1=\theta$라 하면

$$\sin\theta=\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{D_1B_1}}=\frac{1}{\sqrt{17}}$$



또, A_2에서 선분 D_1C_1에 내린 수선의 발을 H_1라 하면

$$\angle A_2D_1H_1=\frac{\pi}{2}-\theta$$

이므로

$$\overline{D_1H_1}=\overline{A_2D_1}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$=\overline{A_2D_1}\sin\theta$$

$$=\frac{\sqrt{17}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{17}}=\frac{1}{2}$$

또, 점 B_2에서 선분 D_1C_1에 내린 수선의 발을 H_2라 하면

$$\overline{A_2B_2}=\overline{H_1H_2}$$
$$=4-2\times\overline{D_1H_1}$$
$$=4-2\times\frac{1}{2}=3$$

이때, $\overline{A_1B_1}=4$, $\overline{A_2B_2}=3$에서 길이의 비가 $\frac{3}{4}$이므로 넓이의 비는 $\frac{9}{16}$이다.

따라서,

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{17}{4}}{1-\frac{9}{16}}$$
$$=\frac{17\times4}{16-9}=\frac{68}{7}$$

정답 ③

28. **출제의도** : 도형의 넓이에 활용된 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\overline{AP}=\overline{PC}$이므로 삼각형 OPC에서

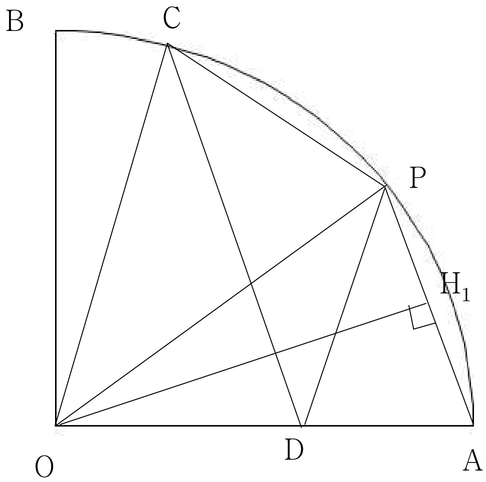
$\angle COP=\angle POA=\theta$

또, 점 O에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 H_1이라 하면

$$\angle H_1OA=\frac{\theta}{2}$$

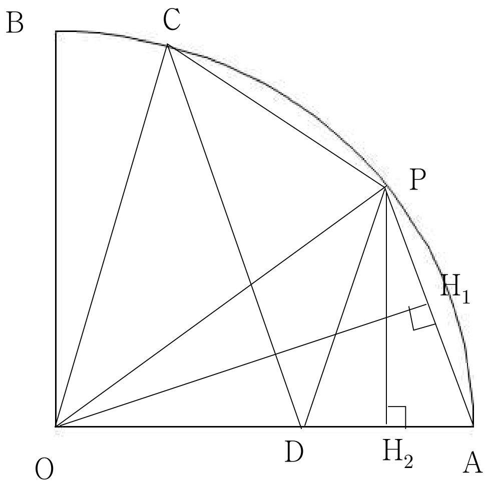
이므로

$$\overline{AP}=2\overline{AH_1}$$
$$=2\times\overline{OA}\sin\frac{\theta}{2}$$
$$=2\sin\frac{\theta}{2}\qquad\text{------㉠}$$



한편, 점 P에서 선분 DA에 내린 수선의 발을 H_2라 하면

$$\angle APD=2\angle APH_2$$
$$=2\times\{\pi-(\angle PH_2A+\angle H_2AP)\}$$
$$=2\times\left[\pi-\left\{\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right\}\right]$$
$$=\theta$$



또,

$$\angle APO=\angle OPC=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$$

이므로

$$\angle DPC=\angle APO+\angle OPC-\angle APD$$
$$=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)-\theta$$
$$=\pi-2\theta\qquad\text{---㉡}$$

그러므로 ㉠과 ㉡으로부터

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PD}}\times\overline{\mathrm{PC}}\times\sin(\pi-2\theta)$$
$$=\frac{1}{2}\times\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\times\sin 2\theta$$
$$=2\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\times\sin 2\theta$$

또, ㉠으로부터 삼각형 APD에서

$$\overline{\mathrm{DA}}=2\overline{\mathrm{AP}}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)$$
$$=2\times 2\sin\frac{\theta}{2}\times\sin\frac{\theta}{2}$$
$$=4\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2$$

이때, 두 삼각형 OAP, DAE는 닮음 삼각형이고 $\overline{\mathrm{OA}}=1$, $\overline{\mathrm{DA}}=4\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2$이므로

$$g(\theta)=\triangle\mathrm{DAE}$$
$$=4^2\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^4\times\triangle\mathrm{OAP}$$
$$=16\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^4\times\frac{1}{2}\sin\theta$$
$$=8\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^4\times\sin\theta$$

따라서,

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{8\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^4\times\sin\theta}{\theta^2\times2\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\times\sin2\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{4\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\times\sin\theta}{\theta^2\times\sin2\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{4\times\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{1}{4}}{\frac{\sin2\theta}{2\theta}\times2}$$
$$=\frac{1}{2}$$

정답 ④

29. 출제의도 :
합성함수의 미분법과 역함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(s, f(s))$와 점 $\mathrm{Q}(t, 0)$에 대하여 점 P에서의 접선과 직선 PQ는 수직이어야 한다.

이때, $f(x)=e^x+x$에서

$$f'(x)=e^x+1$$

이므로

$$f'(s)=e^s+1 \quad \text{-----㉠}$$

또, 직선 PQ의 기울기는

$$\frac{f(s)-0}{s-t}=\frac{e^s+s}{s-t} \quad \text{---㉡}$$

㉠과 ㉡으로부터

$$(e^s+1)\times\frac{e^s+s}{s-t}=-1$$
$$(e^s+1)(e^s+s)=t-s$$
$$t=(e^s+1)(e^s+s)+s \quad \text{---㉢}$$

한편, $f(s)$의 값이 $g(t)$이므로

$$g(t)=e^s+s \quad \text{----㉣}$$

또, 함수 $g(t)$의 역함수가 $h(t)$이므로

$h(1)=k$

라 하면

$g(k)=1$

㉣에서

$e^{s}+s=1$

$s=0$

이 값을 ㉢에 대입하면

$k=2\times 1+0=2$

$g(h(t))=t$에서 양변을 t에 대하여 미분하면

$g'(h(t))\times h'(t)=1$

$$h'(t)=\frac{1}{g'(h(t))}$$

이때, $t=1$을 대입하면

$$h'(1)=\frac{1}{g'(2)}$$

한편, ㉣의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$g'(t)=(e^{s}+1)\frac{ds}{dt}$$

이때, ㉢의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$1=\{e^{s}(e^{s}+s)+(e^{s}+1)^{2}+1\}\frac{ds}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt}=\frac{1}{e^{s}(e^{s}+s)+(e^{s}+1)^{2}+1}$$

이므로

$$g'(t)=\frac{e^{s}+1}{e^{s}(e^{s}+s)+(e^{s}+1)^{2}+1}$$

이때, $s=0$일 때, $t=2$이므로

$$g'(2)=\frac{2}{1+2^{2}+1}$$

$$=\frac{1}{3}$$

따라서,

$$h'(1)=\frac{1}{g'(2)}=3$$

정답 3

30. 출제의도 :

도함수를 이용하여 함수의 식을 구할 수 있고, 치환적분을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건(가)에서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -3)$에서 감소하는 함수이다.

또, 조건 (나)에서 $x>-3$인 모든 실수 x에 대하여

$g(x+3)\{f(x)-f(0)\}^{2}=f'(x)$ ---㉠

이고 함수 $g(x)$는 구간 $(0,\infty)$에서 $g(x)\geq 0$이므로 ㉠의 좌변은 0이상인 실수이다.

그러므로 구간 $(-3,\infty)$에서

$f'(x)\geq 0$

또, ㉠에 $x=0$을 대입하면

$f'(0)=0$

이때, 함수 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 4차 함수이므로

$f'(x)=4x^{2}(x+3)$

즉,

$f'(x)=4x^{3}+12x^{2}$

이때,

$f(x)=x^{4}+4x^{3}+C$ (C는 상수)

이 식을 ㉠에 대입하면

$g(x+3)\times(x^{4}+4x^{3})^{2}=4x^{3}+12x^{2}$--㉡

한편,

$\int_{4}^{5}g(x)dx$ ---㉢

에서 구간 $[4,5]$에서의 $g(x)$가 가지는

값은 구간 $[1, 2]$에서의 $g(x+3)$가 가지는 값과 같다.

한편 ㉡의 좌변의 식 x^4+4x^3은 구간 $[1, 2]$에서

$$x^4+4x^3 \neq 0$$

이므로

$$g(x+3)=\frac{4x^3+12x^2}{(x^4+4x^3)^2}$$

또, ㉢에서

$$x-3=t$$

로 놓으면 $\frac{dx}{dt}=1$이고 $x=4$일 때 $t=1$, $x=5$일 때 $t=2$이므로

$$\int_4^5 g(x)dx$$

$$=\int_1^2 g(x+3)dx$$

$$=\int_1^2 \frac{4x^3+12x^2}{(x^4+4x^3)^2}dx \quad \text{---㉣}$$

이때, $x^4+4x^3=s$로 놓으면

$$4x^3+12x^2=\frac{ds}{dx}$$

이고 $x=1$일 때 $s=5$, $x=2$일 때 $s=48$이므로 ㉣은

$$\int_1^2 \frac{4x^3+12x^2}{(x^4+4x^3)^2}dx$$

$$=\int_5^{48} \frac{1}{s^2}ds$$

$$=\left[-\frac{1}{s}\right]_5^{48}$$

$$=\left(-\frac{1}{48}\right)+\frac{1}{5}$$

$$=\frac{43}{240}$$

따라서, $p=240$, $q=43$이므로

$$p+q=240+43=283$$

정답 283

■ [선택: 기하]
23. ④ 24. ② 25. ⑤ 26. ③ 27. ③
28. ① 29. 127 30. 17

23. **출제의도** : 공간좌표에서 선분의 중점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
두 점 $\mathrm{A}(a,\ 1,\ -1)$, $\mathrm{B}(-5,\ b,\ 3)$의 중점의 좌표가 $(8,\ 3,\ 1)$이므로

$\dfrac{a+(-5)}{2}=8$, $\dfrac{1+b}{2}=3$

따라서 $a=21$, $b=5$이므로

$a+b=21+5=26$

정답 ④

24. **출제의도** : 쌍곡선의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1$ 위의 점 $(2a,\ \sqrt{3})$에서의 접선의 방정식은

$\dfrac{2ax}{a^2}-\sqrt{3}y=1$

즉, $y=\dfrac{2}{\sqrt{3}a}x-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

이 접선과 직선 $y=-\sqrt{3}x+1$이 수직이므로

$\dfrac{2}{\sqrt{3}a}\times(-\sqrt{3})=-1$

따라서 $a=2$

정답 ②

25. **출제의도** : 타원의 성질을 이용하여 삼각형의 둘레의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
직각삼각형 $\mathrm{AF'F}$에서

$\overline{\mathrm{F'F}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AF'}}^2-\overline{\mathrm{AF}}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

이므로 두 초점 F. F′은

$\mathrm{F}(2,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-2,\ 0)$

이다.

타원의 성질에 의해

$2^2=a^2-5$에서

$a^2=9$

$a>\sqrt{5}$이므로

$a=3$

따라서

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=2a=6$

이므로 삼각형 PF′F의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{F'F}}=6+4=10$

정답 ⑤

26. **출제의도** : 벡터의 내적의 성질을 이용하여 점 P가 나타내는 도형을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=5$에서

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=5$

$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=5$

$|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{5}$

즉, 점 P가 타나내는 도형은 점 A(3, 0)을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원이다.

점 P가 나타내는 도형과 직선 $y=\frac{1}{2}x+k$가 오직 한 점에서 만나므로

점 A(3, 0)과 직선 $y=\frac{1}{2}x+k$, 즉 $x-2y+2k=0$ 사이의 거리는 $\sqrt{5}$이다.

$\frac{|3-2\times0+2k|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$에서

$|2k+3|=5$

$2k+3=5$ 또는 $2k+3=-5$

$k=1$ 또는 $k=-4$

$k>0$이므로

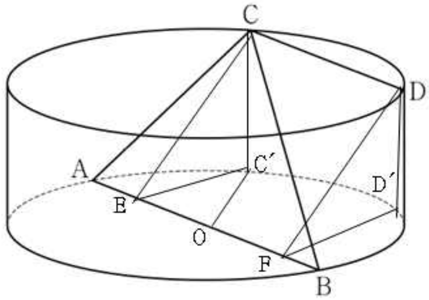
$k=1$

정답 ③

27. **출제의도** : 삼수선의 정리를 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 C, D에서 두 점 A, B를 포함하는 밑면에 내린 수선의 발을 각각 C′, D′이라 하고, 두 점 C′, D′에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하자.



$\overline{CC'}\perp$(평면ABD′C′), $\overline{C'E}\perp\overline{AB}$

이므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{CE}\perp\overline{AB}$

이다.

조건 (가)에서

삼각형 ABC의 넓이가 16이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CE}=16$

$\frac{1}{2}\times8\times\overline{CE}=16$

$\overline{CE}=4$

직각삼각형 CC′E에서

$\overline{CC'}=3$

이므로

$\overline{C'E}=\sqrt{\overline{CE}^2-\overline{CC'}^2}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$

선분 AB의 중점을 O라 하면

직각삼각형 OC′E에서

$\overline{OE}=\sqrt{\overline{OC'}^2-\overline{C'E}^2}=\sqrt{4^2-(\sqrt{7})^2}=3$

마찬가지 방법으로

$\overline{OF}=3$

조건 (나)에서

두 직선 AB, CD가 서로 평행하므로

$\overline{CD}=\overline{EF}=\overline{OE}+\overline{OF}=3+3=6$

정답 ③

28. **출제의도** : 포물선의 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

포물선 $C_1 : y^2 = 4x$의 초점의 좌표는 $\mathrm{F}_1(1,\ 0)$이고 준선의 방정식은 $x = -1$이다.

점 A의 x좌표를 x_1이라 하자.

점 A에서 포물선 C_1의 준선 $x = -1$에 내린 수선의 발을 H_1이라 하면

포물선의 성질에 의해

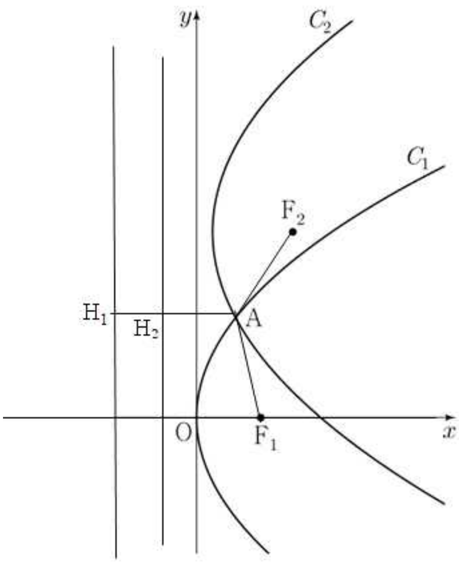
$\overline{\mathrm{AF}_1} = \overline{\mathrm{AH}_1} = x_1 + 1$ …… ㉠

포물선 $C_2 : (y-3)^2 = 4p\{x - f(p)\}$의 초점의 좌표는 $\mathrm{F}_2(p + f(p),\ 3)$이고 준선의 방정식은 $x = -p + f(p)$이다.

점 A에서 포물선 C_2의 준선 $x = -p + f(p)$에 내린 수선의 발을 H_2라 하면

포물선의 성질에 의해

$\overline{\mathrm{AF}_2} = \overline{\mathrm{AH}_2} = x_1 + p - f(p)$ …… ㉡



이때, $\overline{\mathrm{AF}_1} = \overline{\mathrm{AF}_2}$이므로

㉠, ㉡에서

$x_1 + 1 = x_1 + p - f(p)$

$f(p) - p + 1 = 0$

$f(x) = (x+a)^2$이므로

$(p+a)^2 - p + 1 = 0$

$p^2 + (2a-1)p + (a^2+1) = 0$ …… ㉢

p에 대한 이차방정식 ㉢의 판별식을 D라 하자.

(ⅰ) $D < 0$일 때

㉢을 만족시키는 실수 p의 값은 존재하지 않는다.

(ⅱ) $D = 0$일 때,

$D = (2a-1)^2 - 4(a^2+1) = 0$에서

$a = -\dfrac{3}{4}$

$a = -\dfrac{3}{4}$을 ㉢에 대입하면

$p^2 - \dfrac{5}{2}p + \dfrac{25}{16} = 0$

$\left(p - \dfrac{5}{4}\right)^2 = 0$

$p = \dfrac{5}{4} \geq 1$

(ⅲ) $D > 0$일 때,

$D = (2a-1)^2 - 4(a^2+1) > 0$에서

$a < -\dfrac{3}{4}$

$g(p) = p^2 + (2a-1)p + (a^2+1)$이라 하면

$g(1) = (a+1)^2 \geq 0$

p에 대한 이차방정식 ㉢의 서로 다른 두 실근을 $\alpha,\ \beta(\alpha < \beta)$라 하면

$\alpha + \beta = 1 - 2a > 0$

$\alpha\beta = a^2 + 1 \geq 1$

이때, $1 \leq \alpha < \beta$이므로 $p \geq 1$인 p가 두 개 존재한다.

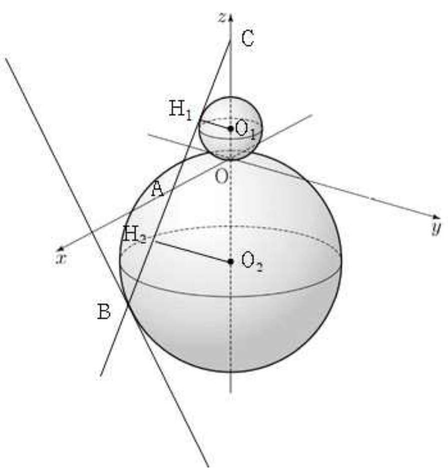
(ⅰ) ~ (ⅲ)에서

$a=-\dfrac{3}{4}$

정답 ①

29. **출제의도** : 좌표공간에서 구와 평면이 만나서 생기는 도형의 다른 평면 위로의 정사영의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



두 구 S_1, S_2의 중심을 각각 $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$라 하면

$\mathrm{O_1}(0,\ 0,\ 2)$, $\mathrm{O_2}(0,\ 0,\ -7)$

이고, 두 구 S_1, S_2의 반지름의 길이는 각각

$2,\ 7$

이다.

두 점 $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$에서 평면 α에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$라 하고, 평면 α와 z축이 만나는 점을 C라 하자.

직각삼각형 $\mathrm{O_1CH_1}$에서

$\overline{\mathrm{O_1C}}=k(k>0)$이라 하면

$\overline{\mathrm{CH_1}}=\sqrt{\overline{\mathrm{O_1C}}^{\,2}-\overline{\mathrm{O_1H_1}}^{\,2}}=\sqrt{k^2-2^2}=\sqrt{k^2-4}$

원점을 O라 하면

$\triangle\mathrm{O_1CH_1}\ \backsim\ \triangle\mathrm{ACO}$

이고, $\overline{\mathrm{OC}}=2+k$이므로

$(k+2):\sqrt{k^2-4}=\sqrt{5}:2$에서

$k^2-16k-36=0$

$(k-18)(k+2)=0$

$k>0$이므로

$k=18$

$\triangle\mathrm{O_1CH_1}\ \backsim\ \triangle\mathrm{O_2CH_2}$

이고, $\overline{\mathrm{O_1C}}=18$, $\overline{\mathrm{O_2C}}=27$이므로

$18:2=27:\overline{\mathrm{O_2H_2}}$에서

$\overline{\mathrm{O_2H_2}}=3$

평면 α와 구 S_2가 만나서 생기는 원 C의 중심은 $\mathrm{H_2}$이고 반지름의 길이는 $\overline{\mathrm{BH_2}}$이다. 이때,

$\overline{\mathrm{BH_2}}=\sqrt{\overline{\mathrm{O_2B}}^{\,2}-\overline{\mathrm{O_2H_2}}^{\,2}}=\sqrt{7^2-3^2}=2\sqrt{10}$

이므로 원 C의 넓이는

$\pi\times(2\sqrt{10})^2=40\pi$

한편, 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\theta=\angle\mathrm{BO_2H_2}$이므로

$\cos\theta=\dfrac{3}{7}$

원 C의 평면 β 위로의 정사영의 넓이는

$40\pi\times\dfrac{3}{7}=\dfrac{120}{7}\pi$

따라서 $p=7$, $q=120$이므로

$p+q=7+120=127$

정답 127

30. 출제의도 : 벡터의 연산의 성질을 이용하여 점이 나타내는 도형의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

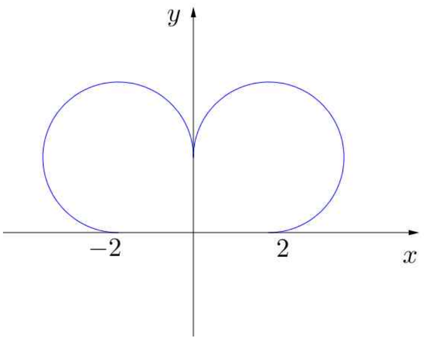
$(|\overrightarrow{AX}|-2)(|\overrightarrow{BX}|-2)=0$에서

$|\overrightarrow{AX}|=2$ 또는 $|\overrightarrow{BX}|=2$

점 X는 점 $A(-2,\ 2)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 또는 점 $B(2,\ 2)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 위를 움직인다.

이때, $|\overrightarrow{OX}| \geq 2$이므로

점 X가 나타내는 도형은 다음 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\vec{u}$가 이루는 각의 크기를 θ_1, 두 벡터 $\overrightarrow{OQ}$, $\vec{u}$가 이루는 각의 크기를 θ_2라 하면

조건 (가)에서

$(\overrightarrow{OP}\cdot\vec{u})(\overrightarrow{OQ}\cdot\vec{u}) \geq 0$

즉 $|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|\cos\theta_1\cos\theta_2 \geq 0$이므로

두 점 P, Q는 [그림 1]에서 제1사분면, x축, y축에 있거나 제2사분면, x축, y축에 있어야 한다.

(ⅰ) 두 점 P, Q가 [그림 1]에서 제1사분면 또는 x축 또는 y축 위에 있을 때,

선분 PQ의 중점을 M이라 하면

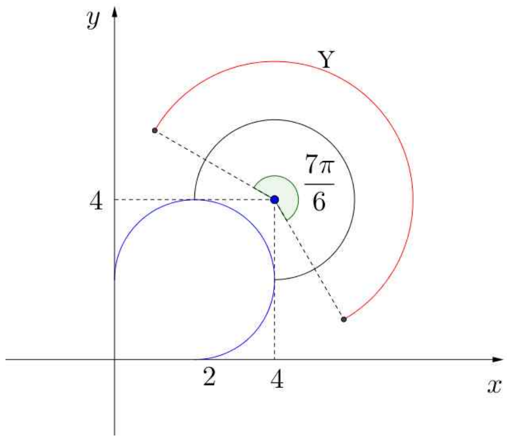
$\overrightarrow{OY}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=2\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{BM}$

이때,

$|\overrightarrow{BM}|=\sqrt{|\overrightarrow{BP}|^2-|\overrightarrow{PM}|^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

이므로

점 Y의 집합이 나타내는 도형은 중심이 $(4,\ 4)$이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$, 중심각의 크기가 $\frac{7}{6}\pi$인 부채꼴의 호이다.



따라서 점 Y가 나타내는 도형의 길이는

$2\sqrt{3}\times\frac{7}{6}\pi=\frac{7\sqrt{3}}{3}$

(ⅱ) 두 점 P, Q가 [그림 1]에서 제2사분면 또는 x축 또는 y축 위에 있을 때,

(ⅰ)과 마찬가지 방법으로

점 Y가 나타내는 도형의 길이는

$2\sqrt{3}\times\frac{7}{6}\pi=\frac{7\sqrt{3}}{3}$

(ⅰ), (ⅱ)에서

점 Y가 나타내는 도형의 길이는

$2\times\frac{7\sqrt{3}}{3}=\frac{14\sqrt{3}}{3}$

따라서 $p=3$, $q=14$이므로

$p+q=3+14=17$

정답 17