

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

평면 위의 삼각형 ABC의 세 변의 길이의 비가 $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=2:1:2$ 이다.

1. $\left| \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} \right| = 2$ 인 경우 \overline{AB} 의 값을 구하시오.

2. 아래의 등식을 만족하는 평면 위의 두 점 P와 Q에 대하여, \overline{AQ} 가 최소가 될 때 $\frac{\overline{AQ}}{\overline{BC}}$ 의 값을 구하시오.

$$2(\overline{PB} - \overline{AB}) = 2(\overline{AC} - \overline{PC}) = 2(\overline{AQ} - \overline{PQ}) = \overline{BC}$$

3. 삼각형 ABC의 각 A의 크기를 θ 라고 하자.

함수 $f(x) = \left(x - \frac{7}{8}\right)^3 + \frac{1}{\theta}$ 에 대하여 다음 정적분의 값을 구하시오.

$$\int_0^\theta x \sin x f'(\cos x) dx - \int_{\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$$

[문제 2번] 다음 물음에 답하시오. (50점)

1. 자연수 n 에 대하여 $x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{2n}{2n+2k-1}$ 일 때, 극한값 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 을 구하시오.

2. 함수 $f(x)$ (단, $x > 0$)가 세 조건

$$(i) f''(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad (ii) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{\sqrt{3}}} f'(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad (iii) \lim_{x \rightarrow \pi} f'(x) = 1$$

을 만족시킬 때, 극한값 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{\sqrt{3}}} \int_x^{\sqrt{3}x} f'(t) dt$ 을 구하시오.

(단, $\sin \frac{\pi}{\sqrt{3}} = 0.97$, $\cos \frac{\pi}{\sqrt{3}} = -0.24$, $\sin(\sqrt{3}\pi) = -0.75$, $\cos(\sqrt{3}\pi) = 0.67$ 이다.)

3. 선분 AB를 지름으로 하고, 반지름의 길이가 1인 반원의 호 위에

$\overline{AP_1} = \overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3} = \cdots = \overline{P_{n-1}P_n} = \overline{P_nB}$ 를 만족시키는 n 개의 점

P_1, P_2, \cdots, P_n 이 순서대로 놓여있다.

자연수 k ($1 \leq k \leq n$)에 대하여 삼각형 AP_kB 의 넓이를 S_k 라 할 때,

극한값 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_1^2 + S_2^2 + \cdots + S_n^2}{n+1}$ 을 구하시오.

(오른쪽 그림은 $n = 3$ 인 경우이다.)

