한양대학교 2023학년도 신입학전형 수시		
자연 계열	**모 의 논 술 예 시 답 안**	1번

1. $\left(\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}\right)=4$ 이고 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC})$ 이므로

$$|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{9}{4}|\overrightarrow{BC}|^2-3(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC})=4.$$

$\cos B=\frac{1}{4}$ 이다. $|\overrightarrow{AB}|=4d$ 라 하면 $|\overrightarrow{BC}|=2d$ 이므로, 위의 등식으로부터, $19d^2=4$ 임을 알 수 있다.

따라서, $\overline{AB}=|\overrightarrow{AB}|=\frac{8}{\sqrt{19}}$ 이다.

2. 문제에 주어진 식으로부터 세 점 B,C,Q는 두 점 P,A를 초점으로 하는 쌍곡선 위에 있으며,
점 C, Q는 점 P쪽에, 점 B는 A쪽에 가까움을 알 수 있다.
문제는 도형의 위치가 아닌 크기에 관한 것이므로, $P=(-c,0)$, $A=(c,0)$ 로 하고, 쌍곡선은 다음의 방정식을 만족하는 것으로 하고 문제를 해결하여야 무방하다.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ \ (단, b^2=c^2-a^2,\ a>0)$$

이 경우 $\overline{BC}=4a$ 이고 $\overline{AB}=\overline{AC}=8a$ 이다.
$\overline{AQ}$가 최소가 되는 경우를 생각하므로 $Q=(-a,0)$로 하고 문제를 생각한다.

$2(\overline{PB}-\overline{AB})=\overline{BC}$ 로부터 $\overline{PB}=10a$, $2(\overline{AC}-\overline{PC})=\overline{BC}$ 로부터 $\overline{PC}=6a$ 가 되어
$\overline{PB}=\overline{PC}+\overline{BC}$ 가 성립하여 점 C가 선분 PB 위에 있음을 알 수 있는데, 선분 BC의 중점과 점 A, P는 직각삼각형을 이루므로 $\overline{PA}=2a\sqrt{31}$ 임을 알 수 있다. 한 편 두 초점사이의 거리 $\overline{PA}=2c$ 이므로, $c=a\sqrt{31}$ 이다.

따라서, $\frac{\overline{AQ}}{\overline{BC}}=\frac{a+c}{4a}=\frac{a+a\sqrt{31}}{4a}=\frac{1+\sqrt{31}}{4}$ 이다.

3. $(xf(\cos x))'=f(\cos x)-x\sin x f'(\cos x)$ 이므로
값을 구하고자 하는 식의 첫 번째 항에 부분적분법을 적용하면,

$$\int_0^\theta x\sin x f'(\cos x)\,dx=[x(-f(\cos x))]_0^\theta+\int_0^\theta f(\cos x)\,dx\ .$$

두 번째 항에 치환 $x=\frac{\pi}{2}-t$ 을 적용하면,

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx=\int_\theta^0 f(\sin(\frac{\pi}{2}-t))\cdot(-1)\,dt=\int_0^\theta f(\cos t)\,dt\ .$$

이다. 따라서, 구하고자 하는 값은

$$[x(-f(\cos x))]_0^\theta=-\theta f(\cos\theta).$$

세 변의 비가 2:1:2인 이등변 삼각형 ABC에 코사인법칙을 적용하면 $\cos\theta=\frac{2^2+2^2-1^2}{2\cdot2\cdot2}=\frac{7}{8}$ 이다.

따라서, 구하고자 하는 값은 $-\theta f(\cos\theta)=-\theta f(\frac{7}{8})=-\theta\frac{1}{\theta}=-1$ 이다.

한양대학교 2023학년도 신입학전형 수시

자연 계열 | **모 의 논 술 예 시 답 안** | 2번

1. $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ 는 $[0,1]$에서 연속함수이다.

$$x_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{2n}{2n+2k-1}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\dfrac{2k-1}{2n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\text{ 이다.}$$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)=\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2\frac{1}{1+x}\,dx=\ln 3.$$

2. $$\int_x^{\sqrt{3}x}f'(t)\,dt=[f'(t)t]_x^{\sqrt{3}x}-\int_x^{\sqrt{3}x}f''(t)\,t\,dt$$

$$=[f'(t)t]_x^{\sqrt{3}x}-\int_x^{\sqrt{3}x}\sin t\,dt=[f'(t)t]_x^{\sqrt{3}x}+[\cos t]_x^{\sqrt{3}x}$$

$$=f'(\sqrt{3}x)\sqrt{3}x-f'(x)x+\cos(\sqrt{3}x)-\cos x$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{\sqrt{3}}}\int_x^{\sqrt{3}x}f'(t)\,dt=\lim_{x\to\frac{\pi}{\sqrt{3}}}\{f'(\sqrt{3}x)\sqrt{3}x-f'(x)x+\cos(\sqrt{3}x)-\cos x\}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{\sqrt{3}}}f'(\sqrt{3}x)\lim_{x\to\frac{\pi}{\sqrt{3}}}\sqrt{3}x-\lim_{x\to\frac{\pi}{\sqrt{3}}}f'(x)\lim_{x\to\frac{\pi}{\sqrt{3}}}x+\cos\pi-\cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\pi-1-\cos\frac{\pi}{\sqrt{3}}=\frac{2}{3}\pi-0.76$$

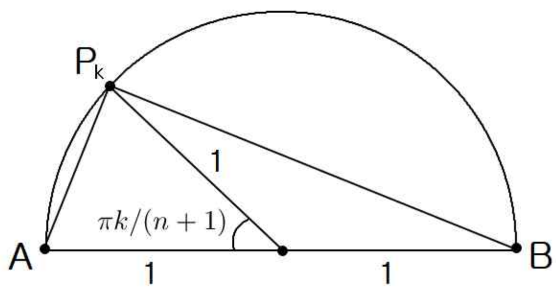
3. 오른쪽 그림에서

$$\overline{\mathrm{AP_k}}^2=1^2+1^2-2\times1\times1\times\cos\left(\frac{\pi}{n+1}k\right)=2-2\cos\left(\frac{\pi}{n+1}k\right)$$

$$\overline{\mathrm{P_kB}}^2=4-\overline{AP_k}^2=2+2\cos\left(\frac{\pi}{n+1}k\right)\text{ 이고, 따라서}$$

$$S_k^2=\left(\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AP_k}}\times\overline{\mathrm{P_kB}}\right)^2=\frac{1}{4}\left(2-2\cos\left(\frac{\pi}{n+1}k\right)\right)\left(2+2\cos\left(\frac{\pi}{n+1}k\right)\right)$$

$$=\sin^2\left(\frac{\pi}{n+1}k\right)$$



이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_1^2+S_2^2+\cdots+S_n^2}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin^2\left(\frac{\pi}{n+1}k\right)\frac{1}{n+1}=\lim_{n+1\to\infty}\sum_{k=1}^{n+1}\sin^2\left(\frac{\pi}{n+1}k\right)\frac{1}{n+1}$$

$$=\lim_{n+1\to\infty}\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n+1}\sin^2\left(0+\frac{\pi-0}{n+1}k\right)\frac{\pi-0}{n+1}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2t\,dt$$

이고, 부분적분법에 의해 $\displaystyle\int\sin^2t\,dt=\frac{1}{2}(t-\cos t\sin t)+C$ 이므로,

구하는 값은 $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2t\,dt=\frac{1}{2\pi}[t-\cos t\,\sin t]_0^{\pi}=\frac{1}{2}$.