

수학 영역(가형)

제 2 교시

1

5지선다형

1. $\sqrt[3]{9} \times 3^{\frac{1}{3}}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^2 - 3}{2n^2 + 7n - 9}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_5 = 2$ 일 때, $a_4 \times a_6$ 의 값은? [2점]

- ① 4 ② 8 ③ 12 ④ 16 ⑤ 20

4. 부등식

$$2^{x-4} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$$

을 만족시키는 모든 자연수 x 의 값의 합은? [3점]

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

5. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 4$, $\sum_{k=1}^{10} (a_k + 2)^2 = 67$ 일 때,

$\sum_{k=1}^{10} (a_k)^2$ 의 값은? [3점]

- ① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

7. 6개의 문자 a, a, b, b, c, c 를 일렬로 나열할 때,
 a 끼리는 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수는? [3점]

- ① 50 ② 55 ③ 60 ④ 65 ⑤ 70

6. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$ 이고

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 2b_n - 7)$ 이 수렴할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

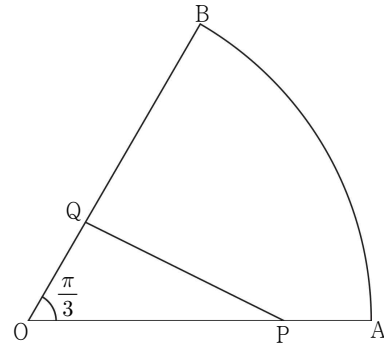
8. 수열 $\left\{ \frac{(4x-1)^n}{2^{3n}+3^{2n}} \right\}$ 이 수렴하도록 하는 모든 정수 x 의 개수는?

[3점]

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

10. 그림과 같이 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 인 부채꼴 OAB에서

선분 OA를 3:1로 내분하는 점을 P, 선분 OB를 1:2로 내분하는 점을 Q라 하자. 삼각형 OPQ의 넓이가 $4\sqrt{3}$ 일 때, 호 AB의 길이는? [3점]



- ① $\frac{5}{3}\pi$ ② 2π ③ $\frac{7}{3}\pi$ ④ $\frac{8}{3}\pi$ ⑤ 3π

9. $0 < x \leq 2\pi$ 일 때, 방정식 $\sin^2 x = \cos^2 x + \cos x$ 와

부등식 $\sin x > \cos x$ 를 동시에 만족시키는 모든 x 의 값의 합은?

[3점]

- ① $\frac{4}{3}\pi$ ② $\frac{5}{3}\pi$ ③ 2π ④ $\frac{7}{3}\pi$ ⑤ $\frac{8}{3}\pi$

11. $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^2 (x-2)^5$ 의 전개식에서 x 의 계수는? [3점]

- ① 88 ② 92 ③ 96 ④ 100 ⑤ 104

12. $\pi < \theta < 2\pi$ 인 θ 에 대하여 $\frac{\sin \theta \cos \theta}{1 - \cos \theta} + \frac{1 - \cos \theta}{\tan \theta} = 1$ 일 때,

$\cos \theta$ 의 값은? [3점]

- ① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{1}{5}$
 ④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

13. $\sum_{n=1}^{20} (-1)^n n^2$ 의 값은? [3점]

- ① 195 ② 200 ③ 205 ④ 210 ⑤ 215

14. 2 이상의 자연수 n 에 대하여 $(n-5)$ 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$ 이라 할 때, $\sum_{n=2}^{10} f(n)$ 의 값은? [4점]

- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

15. 첫째항이 양수이고 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$ 과
모든 항이 양수인 수열 $\{b_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킬 때,
 a_1 의 값은? [4점]

(가) 모든 자연수 n 에 대하여

$$\log a_n + \log a_{n+1} + \log b_n = 0$$

(나) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{12}$

- ① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

16. 두 함수 $f(x) = x^2 - 6x + 11$, $g(x) = \log_3 x$ 가 있다.
정수 k 에 대하여

$$k < (g \circ f)(n) < k + 2$$

를 만족시키는 자연수 n 의 개수를 $h(k)$ 라 할 때,
 $h(0) + h(3)$ 의 값은? [4점]

- ① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

17. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킬 때, a_3 의 값은? [4점]

$$\begin{aligned} \text{(가)} \quad & \sum_{k=1}^4 a_k = 45 \\ \text{(나)} \quad & \sum_{k=1}^6 \frac{a_2 \times a_5}{a_k} = 189 \end{aligned}$$

- ① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

18. 그림과 같이 두 선분 A_1B_1 , C_1D_1 이 서로 평행하고

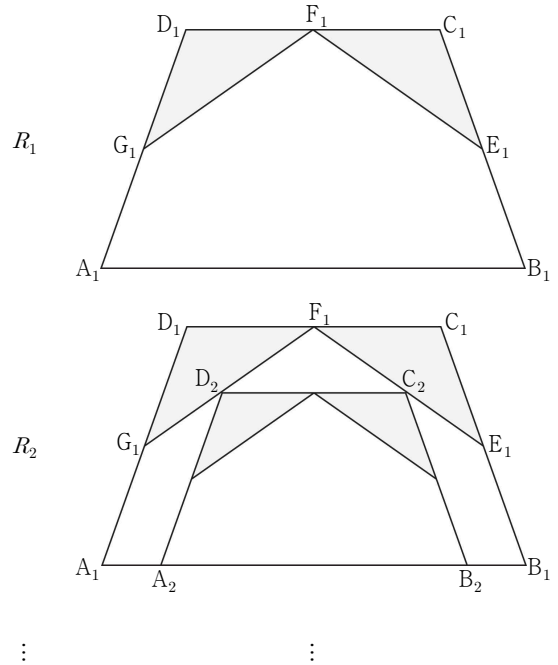
$\overline{A_1B_1} = 10$, $\overline{B_1C_1} = \overline{C_1D_1} = \overline{D_1A_1} = 6$ 인 사다리꼴 $A_1B_1C_1D_1$ 이 있다. 세 선분 B_1C_1 , C_1D_1 , D_1A_1 의 중점을 각각 E_1 , F_1 , G_1 이라 하고 두 개의 삼각형 $C_1F_1E_1$, $D_1G_1F_1$ 을 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에 선분 A_1B_1 위의 두 점 A_2 , B_2 와 선분 E_1F_1 위의 점 C_2 , 선분 F_1G_1 위의 점 D_2 를 꼭짓점으로 하고 두 선분 A_2B_2 , C_2D_2 가 서로 평행하며 $\overline{B_2C_2} = \overline{C_2D_2} = \overline{D_2A_2}$,

$\overline{A_2B_2} : \overline{B_2C_2} = 5 : 3$ 인 사다리꼴 $A_2B_2C_2D_2$ 를 그린다.

그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 사다리꼴 $A_2B_2C_2D_2$ 에 두 개의 삼각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]

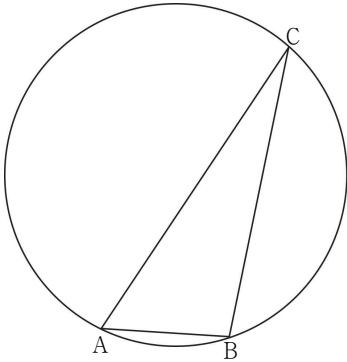


- ① $\frac{234}{19} \sqrt{2}$ ② $\frac{236}{19} \sqrt{2}$ ③ $\frac{238}{19} \sqrt{2}$
 ④ $\frac{240}{19} \sqrt{2}$ ⑤ $\frac{242}{19} \sqrt{2}$

19. 그림과 같이 원 C 에 내접하고 $\overline{AB}=3$, $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$ 인

삼각형 ABC 가 있다. 원 C 의 넓이가 $\frac{49}{3}\pi$ 일 때,

원 C 위의 점 P 에 대하여 삼각형 PAC 의 넓이의 최댓값은?
(단, 점 P 는 점 A 도 아니고 점 C 도 아니다.) [4점]



① $\frac{32}{3}\sqrt{3}$

② $\frac{34}{3}\sqrt{3}$

③ $12\sqrt{3}$

④ $\frac{38}{3}\sqrt{3}$

⑤ $\frac{40}{3}\sqrt{3}$

20. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여

함수 $f: X \rightarrow X$ 의 치역을 A , 합성함수 $f \circ f$ 의 치역을 B 라 할 때, 두 집합 A, B 가 다음 조건을 만족시킨다.

- $n(A) \geq 3$
- 집합 A 의 모든 원소의 합이 3의 배수이다.
- $n(A) > n(B)$

다음은 함수 f 의 개수를 구하는 과정이다.

(i) $n(A)=3$ 이고 모든 원소의 합이 3의 배수인

집합 A 는

$\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}$

이다.

$A = \{1, 2, 3\}$ 인 경우 $n(B) < 3$ 이므로

집합 B 는

$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$

이다.

$A = \{1, 2, 3\}, B = \{1\}$ 인 경우

함수 f 의 개수는 $\boxed{\text{가}}$ 이고,

$A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2\}$ 인 경우

함수 f 의 개수는 $\boxed{\text{나}}$ 이므로

$n(A)=3, n(B) < 3$ 이고 집합 A 의 모든 원소의 합이 3의 배수가 되도록 하는 함수 f 의 개수는

$4 \times (3 \times \boxed{\text{가}}) + 3 \times \boxed{\text{나}}$ 이다.

(ii) $n(A)=4$ 이고 모든 원소의 합이 3의 배수인

집합 A 는 $\{1, 2, 4, 5\}$ 뿐이므로 이 경우 $n(B) < 4$ 를

만족시키는 함수 f 의 개수는 $\boxed{\text{다}}$ 이다.

(iii) $n(A)=5$ 인 경우 함수 f 는 일대일대응이고

$n(B)=5$ 이므로 $n(A) > n(B)$ 를 만족시키는

함수 f 는 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 함수 f 의 개수는

$4 \times (3 \times \boxed{\text{가}}) + 3 \times \boxed{\text{나}} + \boxed{\text{다}}$ 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r 라 할 때,
 $p+q+r$ 의 값은? [4점]

① 164

② 168

③ 172

④ 176

⑤ 180

21. 자연수 k 에 대하여 집합 A_k 를

$$A_k = \left\{ \sin \frac{2(m-1)}{k} \pi \mid m \text{은 자연수} \right\}$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $A_3 = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$

ㄴ. 1이 집합 A_k 의 원소가 되도록 하는 두 자리 자연수 k 의 개수는 22이다.

ㄷ. $n(A_k)=11$ 을 만족시키는 모든 k 의 값의 합은 33이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

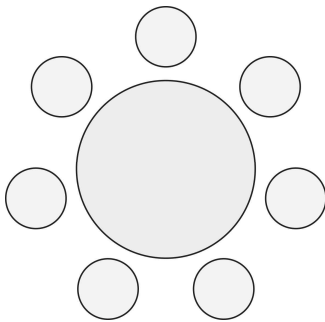
22. ${}_6\text{H}_2 + {}_2\text{H}_6$ 의 값을 구하십시오. [3점]

23. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = 6$, $a_3 + a_6 = a_{11}$ 일 때, a_4 의 값을 구하십시오. [3점]

24. 함수 $f(x)=2^{x+p}+q$ 의 그래프의 점근선이 직선 $y=-4$ 이고 $f(0)=0$ 일 때, $f(4)$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 상수이다.) [3점]

26. $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 정의된 함수 $y=a \sin 3x+b$ 의 그래프가 두 직선 $y=9$, $y=2$ 와 만나는 점의 개수가 각각 3, 7이 되도록 하는 두 양수 a , b 에 대하여 $a \times b$ 의 값을 구하시오. [4점]

25. 그림과 같이 원형 탁자에 7개의 의자가 일정한 간격으로 놓여 있다. A 학교 학생 2명, B 학교 학생 2명, C 학교 학생 3명이 모두 이 7개의 의자에 앉으려고 할 때, A 학교 학생 2명이 서로 이웃하여 앉고 B 학교 학생 2명도 서로 이웃하여 앉는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



27. 자연수 n 에 대하여 점 $(1, 0)$ 을 지나고 점 (n, n) 에서 직선 $y=x$ 와 접하는 원의 중심의 좌표를 (a_n, b_n) 이라 할 때,

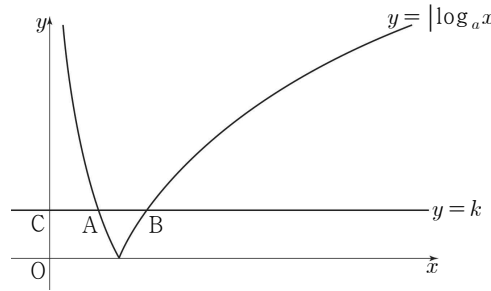
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - b_n}{n^2} \text{의 값을 구하시오. [4점]}$$

28. 그림과 같이 1보다 큰 실수 a 에 대하여 곡선 $y = |\log_a x|$ 가 직선 $y=k$ ($k > 0$)과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=k$ 가 y 축과 만나는 점을 C라 하자.

$\overline{OC} = \overline{CA} = \overline{AB}$ 일 때, 곡선 $y = |\log_a x|$ 와 직선 $y = 2\sqrt{2}$ 가 만나는 두 점 사이의 거리는 d 이다. $20d$ 의 값을 구하시오.

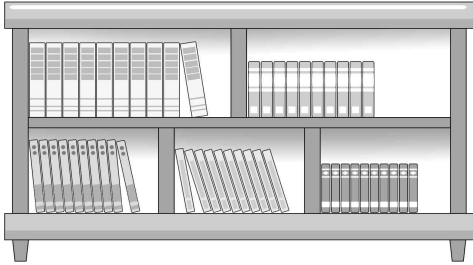
(단, O는 원점이고, 점 A의 x 좌표는 점 B의 x 좌표보다 작다.)

[4점]



29. 어느 학교 도서관에서 독서프로그램 운영을 위해 철학, 사회과학, 자연과학, 문학, 역사 분야에 해당하는 책을 각 분야별로 10권씩 총 50권을 준비하였다. 한 학급에서 이 50권의 책 중 24권의 책을 선택하려고 할 때, 다음 조건을 만족시키도록 선택하는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 분야에 해당하는 책은 서로 구별하지 않는다.) [4점]

- (가) 철학, 사회과학, 자연과학 각각의 분야에 해당하는 책은 4권 이상씩 선택한다.
 (나) 문학 분야에 해당하는 책은 선택하지 않거나 4권 이상 선택한다.
 (다) 역사 분야에 해당하는 책은 선택하지 않거나 4권 이상 선택한다.



30. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $a_{2n} = b_n + 2$
 (나) $a_{2n+1} = b_n - 1$
 (다) $b_{2n} = 3a_n - 2$
 (라) $b_{2n+1} = -a_n + 3$

$a_{48} = 9$ 이고 $\sum_{n=1}^{63} a_n - \sum_{n=1}^{31} b_n = 155$ 일 때, b_{32} 의 값을 구하시오.

[4점]

※ 확인 사항

답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.