I 함수의 극한과 연속

생생 수학 체험 p.48 학교 신문 기사 쓰기
진로 체험 p.49 비파괴 검사원

극한과 연속, 끊임없는 변화를 표현하다.

시간에 따라 끊임없이 변화하는 현상은 연속함수로 나타낼 수 있다. 어느 시점의 현상은 전후 시점 현상의 움직임과 관계가 있다. 식물의 성장, 날아가는 공의 높이, 자전거가 계속 움직인 거리 등은 연속적으로 변하는 현상으로 시간에 대한 연속함수를 써서 나타내고 분석할 수 있다.

시작하면서

이 단원을 학습하기 전 나의 다짐을 적어 봅시다.

이 단원에서는

함수의 극한의 뜻과 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구하는 방법을 학습한다. 또, 연속함수의 뜻과 성질을 이해하고, 이를 활용한 문제를 해결하는 방법을 공부한다.

1 함수의 극한

1. 함수의 극한의 뜻　2. 함수의 극한의 성질

고대 그리스의 수학자 아르키메데스[1]는 ‘원에 내접하는 정다각형은 변의 개수를 점점 늘려나가면 그 원에 한없이 가까워진다.’라는 사실에 착안하여, 소수 둘째 자리까지 정확한 원주율의 어림수인 3.14를 구하였다. 아르키메데스 이후 직관에만 의존해 왔던 ‘한 값에 한없이 가까워진다.’라는 개념은 19세기에 이르러 프랑스의 수학자 코시[2]의 엄밀한 정의에 의해 비로소 명확해졌다. 이를 계기로 여러 가지 자연 현상과 사회 현상을 수학적으로 더욱 분명하게 기술할 수 있게 되었다.

(출처: H. 이브스(이우영, 신항균 역), “수학사”)

알고 있나요?

1 다음 함수의 그래프를 그리시오.

(1) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$　　(2) $f(x)=\sqrt{x-3}+1$

2 다음 함수의 그래프를 그리시오.

(1) $f(x)=|x|$　　(2) $f(x)=\begin{cases} x+1 & (x \geq 0) \\ -2x & (x < 0) \end{cases}$

핵심 용어로 글을 써 봅시다.

경주 석굴암 석굴

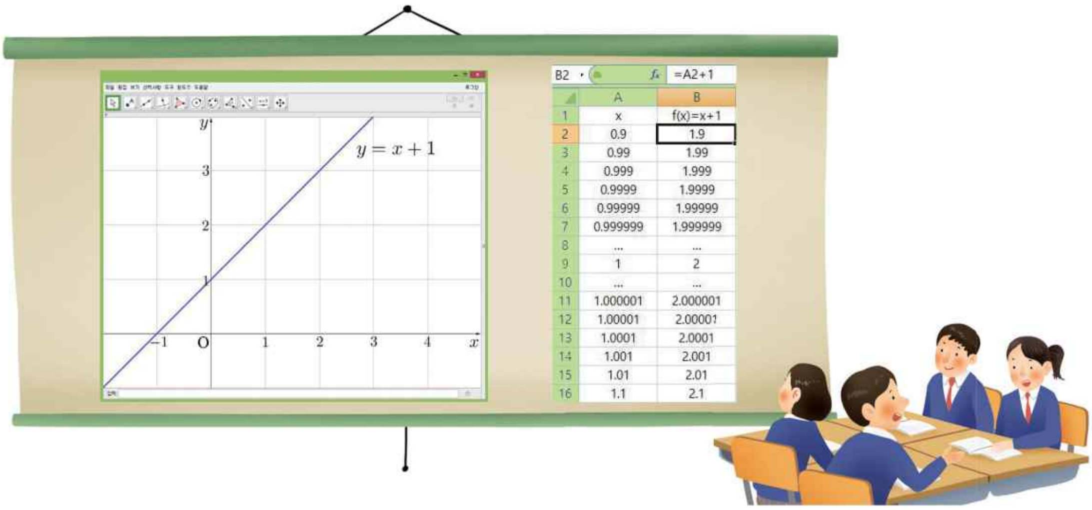
1 함수의 극한의 뜻

- 함수의 극한의 뜻을 안다.

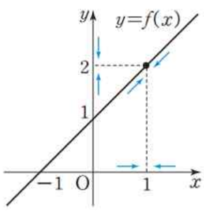
함수의 수렴

탐구 활동

다음 그림은 컴퓨터 프로그램을 이용하여 함수 $f(x)=x+1$의 그래프와 x의 값에 따른 함숫값을 나타낸 것이다. x의 값이 1이 아니면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 어떤 값에 한없이 가까워지는지 친구들과 서로 말해 보자.



위 **탐구 활동**에서 x의 값이 1이 아니면서 1에 한없이 가까워질 때, 함수 $f(x)=x+1$의 값은 2에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.

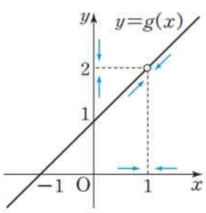


한편, 함수 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$은 $x=1$에서 정의되지 않는다.

하지만

$$g(x)=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1\ \ (x\neq 1)$$

이므로 오른쪽 그림과 같이 x의 값이 1이 아니면서 1에 한없이 가까워질 때, $g(x)$의 값은 2에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.



학습 도움말

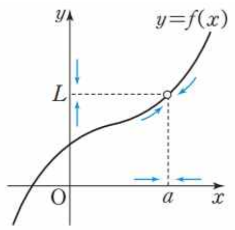
정의역이 주어져 있지 않을 때, 유리함수의 정의역은 분모를 0으로 하지 않는 실수 전체의 집합이다.

일반적으로 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 L에 **수렴**한다고 한다.

이때 L을 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 **극한값** 또는 **극한**이라고 하며, 이것을 기호로

$$\lim_{x \to a} f(x)=L \text{ 또는 } x \to a\text{일 때 } f(x) \to L$$

과 같이 나타낸다.



학습 도움말

함수가 수렴할 때, 함수의 극한이 존재한다고 한다.

예를 들어,

$$\lim_{x \to 1}(x+1)=2, \ \lim_{x \to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

이다.

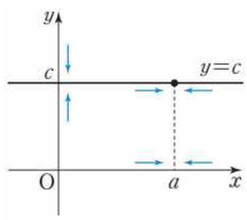
학습 도움말

함숫값이 정의되지 않을 때도 극한값이 존재할 수 있다.

특히, 상수함수 $f(x)=c$ (c는 상수)는 모든 실수 x에 대하여 함숫값이 항상 c이므로 a의 값과 관계없이

$$\lim_{x \to a} f(x)=\lim_{x \to a} c=c$$

이다.



함수의 극한값

예제 1 함수의 그래프를 이용하여 다음 극한값을 구하시오.

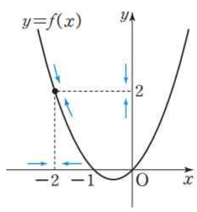
(1) $\lim_{x \to -2}(x^2+x)$ (2) $\lim_{x \to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}$

풀이

(1) $f(x)=x^2+x$라고 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이 그래프에서 $x \to -2$일 때, $f(x) \to 2$이다. 즉,

$$\lim_{x \to -2}(x^2+x)=2$$



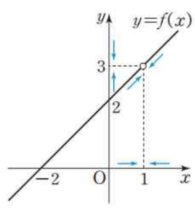
(2) $f(x)=\frac{x^2+x-2}{x-1}$라고 하면 $x \neq 1$일 때

$$f(x)=\frac{x^2+x-2}{x-1}=\frac{(x+2)(x-1)}{x-1}=x+2$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이 그래프에서 $x \to 1$일 때, $f(x) \to 3$이다. 즉,

$$\lim_{x \to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}=3$$



답 (1) 2 (2) 3

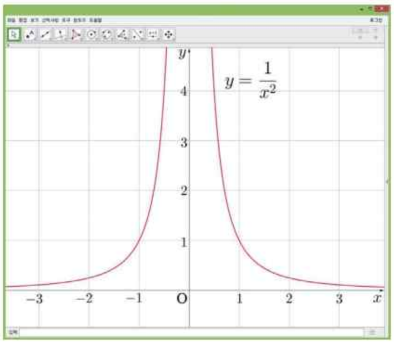
문제 1 함수의 그래프를 이용하여 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{x\to3}(5x-7)$ (2) $\lim_{x\to1}(x^2-2x)$

(3) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{x-2}$ (4) $\lim_{x\to-1}\sqrt{x+3}$

함수 $f(x)$에서 x의 값이 한없이 커지거나 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때도 함수 $f(x)$의 극한을 생각할 수 있다.

함수 $f(x)=\frac{1}{x^2}$의 그래프를 컴퓨터 프로그램을 이용하여 그리면 오른쪽 그림과 같다.



이 그래프에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워짐을 알 수 있다. 또, x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때도 $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.

일반적으로 함수 $f(x)$에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 L에 수렴한다고 하며, 이것을 기호로

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=L \text{ 또는 } x\to\infty \text{일 때 } f(x)\to L$$

과 같이 나타낸다. 이때 L은 $x\to\infty$일 때 $f(x)$의 극한이다.

여기서 ∞는 한없이 커짐을 뜻하는 기호로 **무한대**라고 읽는다.

또, x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 L에 수렴한다고 하며, 이것을 기호로

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=L \text{ 또는 } x\to-\infty \text{일 때 } f(x)\to L$$

과 같이 나타낸다. 이때 L은 $x\to-\infty$일 때의 $f(x)$의 극한이다.

예를 들어,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$$

이다.

학습 도움말

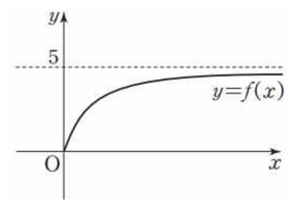
$-\infty$는 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커짐을 뜻한다.

문제 2 함수의 그래프를 이용하여 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}$ (2) $\lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x}$

(3) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x}+2\right)$ (4) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x+3}$

문제 3 물이 담긴 유리컵에 잉크를 떨어뜨린 후 x초가 지났을 때, 유리컵 속의 어느 한 지점에서의 잉크의 농도를 $f(x)$ %라고 하자. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 $y=5$를 점근선으로 가질 때, $\lim_{x \to \infty} f(x)$의 값을 구하시오.

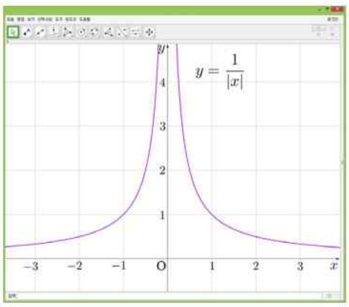


함수의 발산

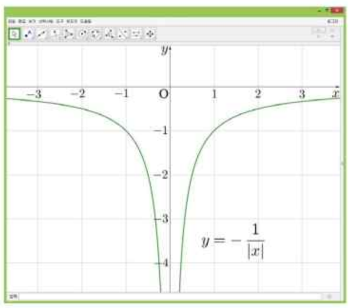
함수 $f(x)$에 대하여 $x=a$에서의 극한이 존재하지 않을 경우, 함수 $f(x)$는 발산한다고 한다. 함수 $f(x)$가 발산하는 경우를 알아보자.

함수 $f(x)=\frac{1}{|x|}$의 그래프를 컴퓨터 프로그램을 이용하여 그리면 오른쪽 그림과 같다.

이 그래프에서 $x \to 0$일 때, $f(x)$의 값은 한없이 커짐을 알 수 있다.



또, 오른쪽 그림과 같은 함수 $f(x)=-\frac{1}{|x|}$의 그래프에서 $x \to 0$일 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커짐을 알 수 있다.



일반적으로 함수 $f(x)$에서 $x \to a$일 때, $f(x)$의 값이 한없이 커지면 함수 $f(x)$는 양의 무한대로 발산한다고 하며, 이것을 기호로

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \quad \text{또는} \quad x \to a\text{일 때 } f(x) \to \infty$$

와 같이 나타낸다.

또, $x \to a$일 때 $f(x)$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 함수 $f(x)$는 음의 무한대로 발산한다고 하며, 이것을 기호로

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \quad \text{또는} \quad x \to a\text{일 때 } f(x) \to -\infty$$

와 같이 나타낸다.

예를 들어,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = \infty, \quad \lim_{x \to 0}\left(-\frac{1}{|x|}\right) = -\infty$$

이다.

문제 4 함수의 그래프를 이용하여 다음 극한을 조사하시오.

(1) $\lim_{x \to 1} \frac{1}{|x-1|}$

(2) $\lim_{x \to 0}\left(2 - \frac{1}{|x|}\right)$

(3) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$

(4) $\lim_{x \to -1} \frac{1}{(x+1)^2}$

한편, $x \to \infty$ 또는 $x \to -\infty$일 때, 함수 $f(x)$가 양의 무한대 또는 음의 무한대로 발산하는 것도 같은 방법으로 정의하며, 각각 다음과 같이 나타낸다.

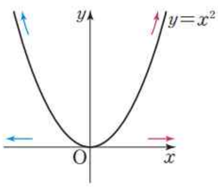
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

보기

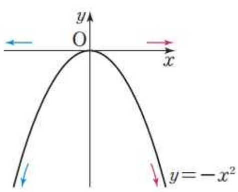
❶ 함수 $f(x) = x^2$의 그래프에서

$$\lim_{x \to \infty} x^2 = \infty, \quad \lim_{x \to -\infty} x^2 = \infty$$



❷ 함수 $f(x) = -x^2$의 그래프에서

$$\lim_{x \to \infty}(-x^2) = -\infty, \quad \lim_{x \to -\infty}(-x^2) = -\infty$$



문제 5 함수의 그래프를 이용하여 다음 극한을 조사하시오.

(1) $\lim_{x \to \infty}(x^2 - 1)$

(2) $\lim_{x \to -\infty}(x+3)$

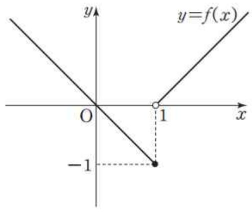
함수의 좌극한과 우극한

탐구 활동

오른쪽 그림은 함수

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & (x>1) \\ -x & (x\le 1)\end{cases}$$

의 그래프이다. 물음에 답해 보자.



❶ 다음의 각 경우에서 $f(x)$의 값은 어떤 값에 한없이 가까워지는지 말해 보자.

(1) x의 값이 1보다 작으면서 1에 한없이 가까워질 때

(2) x의 값이 1보다 크면서 1에 한없이 가까워질 때

❷ x의 값이 1이 아니면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 하나의 값에 한없이 가까워지는지 친구들과 서로 말해 보자.

위 **탐구 활동**에서 x의 값이 1보다 작으면서 1에 한없이 가까워질 때와 1보다 크면서 1에 한없이 가까워질 때, 함수 $f(x)$의 값은 각각 서로 다른 값에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.

일반적으로 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a보다 작으면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 L을 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 **좌극한**이라고 하며, 이것을 기호로

$$\lim_{x\to a-} f(x)=L \text{ 또는 } x\to a-\text{일 때 } f(x)\to L$$

과 같이 나타낸다.

또, x의 값이 a보다 크면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 M에 한없이 가까워지면 M을 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 **우극한**이라고 하며, 이것을 기호로

$$\lim_{x\to a+} f(x)=M \text{ 또는 } x\to a+\text{일 때 } f(x)\to M$$

과 같이 나타낸다.

예를 들어, 함수

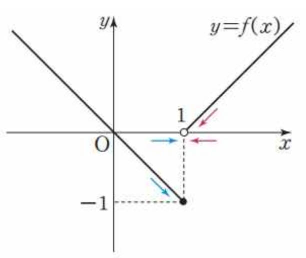
$$f(x)=\begin{cases} x-1 & (x>1) \\ -x & (x\le 1)\end{cases}$$

에서

$$\lim_{x\to 1-} f(x)=-1,$$

$$\lim_{x\to 1+} f(x)=0$$

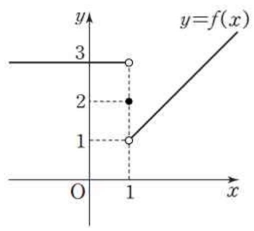
이다.



문제 6 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음을 구하시오.

(1) $\lim\limits_{x\to1-}f(x)$

(2) $\lim\limits_{x\to1+}f(x)$



함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 극한값이 L이면, 함수의 극한의 정의에 의하여 $x=a$에서의 좌극한과 우극한이 각각 존재하면서 그 값이 모두 L과 같다. 또, 그 역도 성립한다.

즉, 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\to a}f(x)=L \iff \lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a+}f(x)=L$$

따라서 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 좌극한과 우극한이 각각 존재하더라도 그 값이 서로 다르면 극한 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$는 존재하지 않는다.

좌극한과 우극한

예제 2 함수의 그래프를 이용하여 극한 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{|x|}$를 조사하시오.

풀이 함수

$$y=\frac{x}{|x|}=\begin{cases}1 & (x>0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서

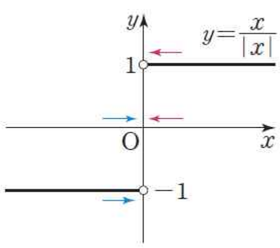
$$\lim_{x\to0-}\frac{x}{|x|}=-1,$$

$$\lim_{x\to0+}\frac{x}{|x|}=1$$

이다. 이때

$$\lim_{x\to0-}\frac{x}{|x|}\neq\lim_{x\to0+}\frac{x}{|x|}$$

이므로 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{|x|}$는 존재하지 않는다.



학습 도움말

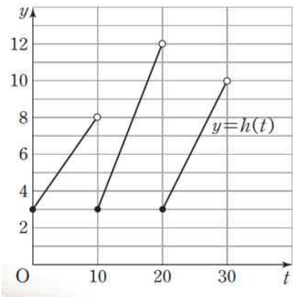
$$|x|=\begin{cases}x & (x\geq0)\\ -x & (x<0)\end{cases}$$

답 존재하지 않는다.

문제 7 함수의 그래프를 이용하여 다음 극한을 조사하시오.

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{|x|}$ (2) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{|x-1|}$

문제 8 어느 공원에서는 10일 간격으로 잔디를 깎는다고 한다. 잔디의 높이를 측정하기 시작하여 t일 후의 잔디의 높이를 $h(t)$ cm라고 할 때, 함수 $y=h(t)$ $(0\le t<30)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. $t=20$에서의 함수 $h(t)$의 극한을 조사하시오.



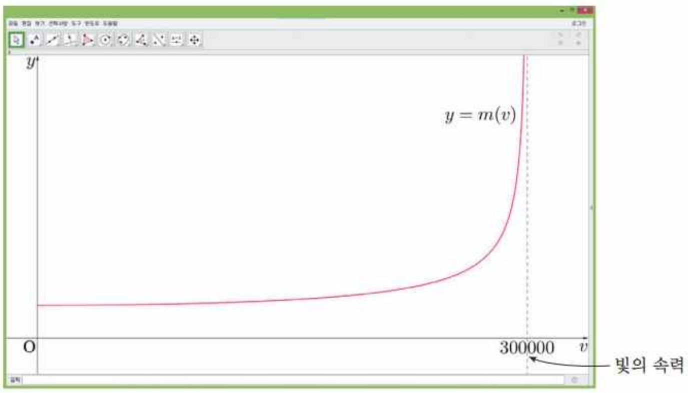
이야기 속 수학 탐구

빛의 속력, 따라잡을 수 있을까?

아인슈타인(Einstein, A., 1879 ~ 1955)의 특수 상대성 이론에 의하면 운동하고 있는 물체의 속력이 커지면 물체의 질량도 함께 커지게 된다. 아인슈타인은 속력 v로 움직이는 물체의 질량 $m(v)$를 다음과 같은 식으로 나타내었다.

$$m(v)=\frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$ (c는 빛의 속력으로 3×10^5 km/s이고, m_0은 정지해 있을 때의 물체의 질량이다.)

예를 들어, 컴퓨터 프로그램을 이용하여 $m_0=1$일 때의 $y=m(v)$의 그래프를 그리면 다음 그림과 같다. 이 그래프에서 물체의 속력이 빛의 속력에 한없이 가까워지면 그 질량은 양의 무한대로 발산함을 알 수 있다. 따라서 빛의 속력으로 운동하는 것은 현실적으로 불가능하다. (출처: 박문호, "뇌 생각의 출현")



소단원 확인 문제

정답 155쪽

개념 굳히기 **1** 다음 왼쪽과 오른쪽의 값을 각각 구하고, 그 값이 같은 것끼리 선으로 연결하시오.

(1) $\lim\limits_{x\to3}2$ — ㉠ $\lim\limits_{x\to2+}\sqrt{x-2}$

(2) $\lim\limits_{x\to-3+}(x+4)$ — ㉡ $\lim\limits_{x\to3}1$

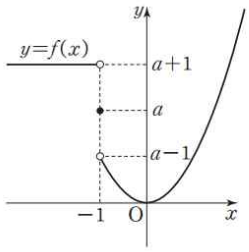
(3) $\lim\limits_{x\to1}(x^2-4x+3)$ — ㉢ $\lim\limits_{x\to-1}(-x^2+3)$

개념 넓히기 **2** 다음 극한을 조사하시오.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-1)$ (2) $\lim\limits_{x\to\infty}(2-3x^2)$

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{2-x}$ (4) $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-\sqrt{1-x})$

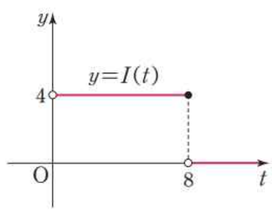
3 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $\lim\limits_{x\to-1-}f(x)=3$이다. 이때 상수 a의 값과 $\lim\limits_{x\to-1+}f(x)$의 값을 각각 구하시오.



4 극한 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x(x-2)^2}{|x-2|}$을 조사하시오.

역량 키우기 창의·융합 **5** 4A의 전류가 흐르는 어떤 저기 회로에서 전류가 흐르기 시작한 시점으로부터 8초 후에 스위치를 껐다. 이 회로에서 전류가 흐르기 시작한 지 t초 후의 전류를 $I(t)$A라고 할 때, 함수 $y=I(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 함수 $y=I(t)$에서 다음을 만족하는 양의 실수 a의 값을 모두 조사해 보자.

A (암페어) 전류의 단위이다.



(1) $t=a$에서 좌극한이 존재

(2) $t=a$에서 우극한이 존재

(3) $t=a$에서 극한값이 존재

발표하기 위에서 조사한 a의 값을 모두 말하고, 그 까닭을 발표해 보자.

스스로 예습 함수의 극한의 성질을 예습해 봅시다.

2 함수의 극한의 성질

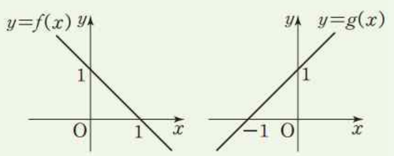
- 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.

함수의 극한의 성질

생각 열기

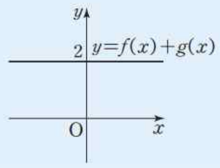
두 함수 $f(x)=1-x$, $g(x)=1+x$에 대하여 다음 물음에 답해 보자.

❶ 아래 그림의 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 것을 써넣어 보자.

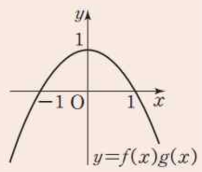


$\lim\limits_{x\to0}f(x)+\lim\limits_{x\to0}g(x)=$ (가)

$\lim\limits_{x\to0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to0}g(x)=$ (나)



$\lim\limits_{x\to0}\{f(x)+g(x)\}=$ (다)



$\lim\limits_{x\to0}f(x)g(x)=$ (라)

❷ 위 ❶의 결과에서 값이 같은 것끼리 짝지어 보자. **생각 이끌기** $f(x)+g(x)=2$, $f(x)g(x)=1-x^2$

위 **생각 열기**에서

$$\lim_{x\to0}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to0}f(x)+\lim_{x\to0}g(x)$$

$$\lim_{x\to0}f(x)g(x)=\lim_{x\to0}f(x)\cdot\lim_{x\to0}g(x)$$

임을 알 수 있다.

일반적으로 함수의 극한에서는 다음과 같은 성질이 성립한다.

함수의 극한의 성질

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=M$ (L, M은 실수)일 때

❶ $\lim\limits_{x\to a}cf(x)=cL$ (c는 상수)

❷ $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=L+M$

❸ $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=L-M$

❹ $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)=LM$

❺ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L}{M}$ $(M\neq0)$

학습 도움말

함수의 극한의 성질은 $x\to a-$, $x\to a+$, $x\to\infty$, $x\to-\infty$일 때도 성립한다.

함수의 극한의 성질을 이용하면 그래프를 이용하지 않고도 함수의 극한값을 간단히 구할 수 있다.

보기 ❶ $\lim_{x\to 2}(3x^2-2)=\lim_{x\to 2}3x^2-\lim_{x\to 2}2$

$=3\lim_{x\to 2}x\cdot\lim_{x\to 2}x-\lim_{x\to 2}2$

$=3\times 2^2-2=10$

❷ $\lim_{x\to 1}\frac{x+6}{x-2}=\frac{\lim_{x\to 1}(x+6)}{\lim_{x\to 1}(x-2)}=\frac{\lim_{x\to 1}x+\lim_{x\to 1}6}{\lim_{x\to 1}x-\lim_{x\to 1}2}$

$=\frac{1+6}{1-2}=-7$

문제 1 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{x\to 1}(x^2-2x+4)$ (2) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3}{x-1}$

함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$에서 분모와 분자의 극한이 모두 0이거나 분모와 분자가 각각 양 또는 음의 무한대로 발산할 때는 식 $\frac{f(x)}{g(x)}$를 적절히 변형하면 그 극한값을 구할 수 있는 경우가 있다.

$\frac{0}{0}$ 꼴의 극한값

예제 1 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}$ (2) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$

풀이

(1) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x}$

$=\lim_{x\to 0}(\sqrt{x+1}+1)=\sqrt{1}+1=2$

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) 2

문제 2 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-1}{x-1}$ (2) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1-\sqrt{x+2}}{x+1}$

$\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값

예제 2

다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2-x+1}{x^2+2}$ (2) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+3}}{x+1}$

풀이

(1) 분모와 분자를 x^2으로 각각 나누면

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2-x+1}{x^2+2} = \lim_{x \to \infty} \frac{2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}} = \frac{2}{1} = 2$$

(2) 분모와 분자를 x로 각각 나누면

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{2x^2+3}}{x+1} = \lim \frac{\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

학습 도움말

(2) $x \to \infty$일 때

$\frac{3}{x^2} \to 0$이므로

$\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{2+\frac{3}{x^2}} = \sqrt{2}$

답 (1) 2 (2) $\sqrt{2}$

문제 3 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2+3}{(x+1)^2}$ (2) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{3x^2+x}}{x+1}$

함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$에서 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$ (L은 실수)이고, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$이면 함수의 극한의 성질에 의하여

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x) \right\} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \lim_{x \to a} g(x) \\ &= L \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

이다. 즉, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$이다.

극한값을 이용하여 상수 구하기

예제 3 다음 등식이 성립하도록 하는 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=4$$

풀이

$f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=x-1$이라고 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=4,\ \lim_{x\to1}g(x)=0$$

이므로

$$\lim_{x\to1}f(x)=0$$

즉, $\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)=0$에서 $1+a+b=0$

이때 $b=-a-1$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}&=\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-a-1}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+a+1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}(x+a+1)=a+2\end{aligned}$$

따라서 $a+2=4$이므로 $a=2$, $b=-a-1=-3$

답 $a=2$, $b=-3$

문제 4 다음 등식이 성립하도록 하는 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

(1) $\lim_{x\to3}\frac{x^2+ax+b}{x-3}=2$

(2) $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+a}+b}{x-2}=\frac{1}{4}$

함수의 극한에서 다음의 대소 관계가 성립함이 알려져 있다.

함수의 극한의 대소 관계

$\lim_{x\to a}f(x)=L$, $\lim_{x\to a}g(x)=M$일 때, a에 가까운 모든 실수 x에 대하여

❶ $f(x)\le g(x)$이면 $L\le M$

❷ $f(x)\le h(x)\le g(x)$이고 $L=M$이면 $\lim_{x\to a}h(x)=L$

학습 도움말

함수의 극한의 대소 관계는 $x\to a-$, $x\to a+$, $x\to\infty$, $x\to-\infty$일 때도 성립한다.

함수의 극한의 대소 관계

예제 4 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음을 만족할 때, $\lim\limits_{x\to1} f(x)$의 값을 구하시오.

$$2x \le f(x) \le x^2+1$$

풀이

$\lim\limits_{x\to1} 2x = 2$, $\lim\limits_{x\to1}(x^2+1)=2$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to1} f(x) = 2$$

답 2

문제 5 함수 $f(x)$가 다음을 만족할 때, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$의 값을 구하시오.

$$5-\frac{1}{x} < f(x) < 5+\frac{1}{x} \quad (x>0)$$

문제 6 함수 $f(x)$가 다음을 만족할 때, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$의 값을 구하시오.

$$\frac{x^2}{x+1} \le f(x) \le \frac{x^3}{x^2+2} \quad (x \ge 2)$$

창의 탐구 돋보기 무인 우주선

지구를 탈출한 어떤 무인 우주선이 지구로부터 r km 떨어졌을 때의 속력 $v(r)$ km/s는 대략

$$v(r) = 11.2\sqrt{\frac{6400}{r}+1}$$

이라고 한다. 이 무인 우주선이 지구로부터 한없이 멀어질 때, 그 속력의 극한값을 구해 보자.

설명하기 위 결과와 그 까닭을 설명해 보자.

이야기 속으로 지표면에서 공중으로 쏘아 올려진 물체 대부분은 지구의 중력을 이기지 못하고 다시 지표면으로 떨어진다. 하지만 물체가 쏘아 올려진 순간의 속도인 초기 속도를 점점 크게 하면 점점 높이 올라가게 되는데, 이는 물체의 힘이 초기 속도의 제곱에 비례하기 때문이다. 쏘아 올려진 물체에 작용하는 다른 추진력이 없을 때, 어떤 천체의 중력을 이기고 벗어날 수 있게 하는 최소한의 초기 속도를 그 천체에 대한 탈출 속도라고 한다. 예를 들어, 지구 표면에서의 지구 탈출 속도는 11.2 km/s이다.

(출처: 조경철, "우주로켓")

소단원 확인 문제

정답 155쪽

개념 굳히기 **1** 다음 극한값을 오른쪽 그림에서 찾으시오.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^2+3x+2}{x+1}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2}{2x^3-x+1}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+2}{x^2-x+1}$

개념 넓히기 **2** $\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=2$, $\displaystyle\lim_{x\to0}g(x)=5$일 때, 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\{f(x)+g(x)\}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)g(x)$

3 다음 등식이 성립하도록 하는 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax-2}{x^2-3x+2}=b$$

4 모든 실수 x에 대하여 $|f(x)|\le1$일 때, 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}x^2f(x)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-1}{x}$

역량 키우기 추론 **5** 다음은 한 학생이 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{1-x}+x\right)$의 값을 구한 과정을 나타낸 것이다. 이 학생의 풀이에서 등호가 성립하지 않는 곳을 찾아보자.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{1-x}+x\right)\overset{㉠}{=}\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{x^2}{x\left(\frac{1}{x}-1\right)}+x\right\}$$
$$\overset{㉡}{=}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{\frac{1}{x}-1}+x\right)$$
$$\overset{㉢}{=}\lim_{x\to\infty}(-x+x)\overset{㉣}{=}0$$

설명하기 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{1-x}+x\right)$의 값을 구하고, 그 풀이 과정을 설명해 보자.

스스로 예습 연속함수를 예습해 봅시다.

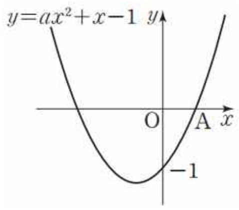
함께 생각하는 탐구

나는 0으로, 너는 어디로?

함수의 극한을 이용하면 선분의 길이와 관련된 극한값을 구할 수 있는 경우가 있다.

목표 좌표평면 위에서 변하는 선분의 길이와 관련된 극한값을 구해 보자.

과정 1 오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=ax^2+x-1$의 그래프가 x축의 양의 방향과 점 A에서 만날 때, $\lim\limits_{a\to0+}\overline{\mathrm{OA}}$의 값을 다음 단계에 따라 구해 보자. $(a>0)$



활동 ① 다음 □ 안에 알맞은 것을 써넣어 보자.

구하려는 것은? □의 값을 구한다.

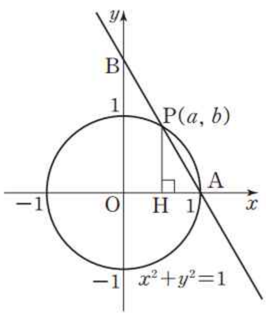
주어진 조건은? 이차함수 $y=ax^2+x-1$의 그래프가 x축의 양의 방향과 점 A에서 만난다.

무엇을 알아야 하지? 점 A의 x좌표는 이차방정식 □의 양의 실근이다.

② 위 ①을 이용하여 선분 OA의 길이를 a로 나타내고, 모둠원끼리 비교해 보자.

③ 위 ②의 결과를 이용하여 $\lim\limits_{a\to0+}\overline{\mathrm{OA}}$의 값을 구해 보자.

과정 2 오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+y^2=1$ 위의 제1사분면의 점 P$(a,\ b)$와 점 A$(1,\ 0)$을 지나는 직선이 y축과 만나는 점을 B, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라고 하자. 이때 $\lim\limits_{a\to0-}\overline{\mathrm{OB}}\cdot\overline{\mathrm{PH}}$의 값을 구해 보자.



활동 위 **과정 1**의 활동 단계에 따라 **과정 2**를 해결해 보자.

정리 및 발표

모둠별로 위 탐구 과정을 정리하여 발표해 보자.

중단원 연습 문제

정답 155쪽

5분 정리 노트

모둠별로 함께 빈칸을 알맞게 채워 보자.

함수의 극한

함수의 수렴

함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 L에 수렴한다고 한다.

함수의 발산

함수의 극한의 성질

함수의 극한의 대소 관계

다지기

01 다음 극한을 조사하시오.

(1) $\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2}$ (2) $\lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$

(3) $\lim_{x \to \infty} \left(3 + \frac{2}{|x|}\right)$ (4) $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x+5}{x}$

02 함수 $f(x) = \begin{cases} -2x+1 & (x \geq -1) \\ 1 & (x < -1) \end{cases}$에서 다음을 구하시오.

(1) $\lim_{x \to -1-} f(x)$ (2) $\lim_{x \to -1+} f(x)$

03 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{x \to -1} \frac{2x^2+x-1}{x+1}$ (2) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

(3) $\lim_{x \to \infty} \frac{6x^2+5}{3x^2+7x}$ (4) $\lim_{x \to \infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}$

04 함수 $f(x)$가 다음을 만족할 때, $\lim_{x \to -1} f(x)$의 값을 구하시오.

$$x^3 - 1 \leq f(x) \leq 3x + 1 \quad (x < 0)$$

나아가기

05 함수 $f(x)=\begin{cases} 2x+k & (x \geq 1) \\ x^2 & (x<1) \end{cases}$에 대하여

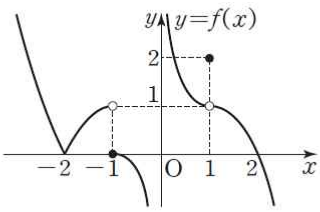
$\lim_{x \to 1} f(x)$가 존재하도록 하는 상수 k의 값을 구하시오.

06 다음 등식이 성립하도록 하는 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

(1) $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^2+ax+b}{x^2+3x+2}=5$

(2) $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+a}-3}{x-1}=\dfrac{1}{b}$

07 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 극한을 조사하시오.



(1) $\lim_{x \to 0} f(x)$

(2) $\lim_{x \to 1} f(x)$

(3) $\lim_{x \to -1} f(x)$

(4) $\lim_{x \to -2} f(x)$

08 모든 실수 x에 대하여 $0 \leq f(x) \leq 1$일 때,

$\lim_{x \to 0} \dfrac{|x|}{2-f(x)}$의 값을 구하시오.

도약하기

09 다음 조건을 만족하는 이차함수 $f(x)$를 구하시오.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{3x^2-x+1}=1, \quad \lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{x-2}=9$$

이 단원의 수학자 p.10

1 **아르키메데스**(Archimedes, B.C. 287? ~ B.C. 212) 그리스의 수학자. 정96각형을 이용하여 π의 값을 계산.

2 **코시**(Cauchy, A . L., 1789 ~ 1857) 프랑스의 수학자. 극한, 수렴 등의 개념들을 고안.

2 함수의 연속

1. 연속함수　2. 연속함수의 성질

사진은 순간의 정지된 화면을 기억하기 위해 촬영하는 것이 보통이지만, 조리개를 장시간 노출하는 촬영기법을 사용하면 물체의 연속적인 움직임도 사진으로 남길 수 있다. 밤거리 차들의 움직임을 연속 촬영한 사진을 보면 불빛이 그리는 곡선을 따라 차들이 움직인 모습을 볼 수 있다. 또, 밤하늘의 별들의 움직임을 연속 촬영한 사진을 보면 북극성을 중심으로 하는 원을 따라 별들이 움직인 모습을 볼 수 있다. 이와 같이 주위에서 볼 수 있는 연속적인 현상을 수학과 관련하여 이해하는 것은 여러 가지 문제를 해결하는 데 중요하게 이용된다.

(출처: 앤서니 애브니(최광열 역), "시간의 문화사")

알고 있나요?

1 다음 함수의 정의역을 구하시오.

(1) $y=\dfrac{2}{x+1}-1$　　(2) $y=\sqrt{x-2}+1$

2 다음 함수의 그래프를 그리시오.

(1) $y=x^2-2x$　　(2) $y=\dfrac{x}{x+1}$

핵심 용어로 글을 써 봅시다.

보물 제1025호 청자 복숭아모양 연적

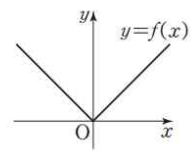
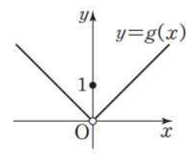
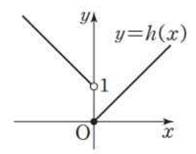
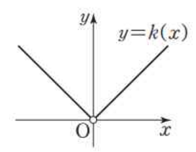
1 연속함수

- 함수의 연속의 뜻을 안다.

함수의 연속과 불연속

탐구 활동

네 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$, $y=k(x)$의 그래프가 각각 다음과 같을 때, 표를 완성하고 물음에 답해 보자.

함수의 그래프				
$x=0$에서의 함숫값	0			정의되지 않음.
$x=0$에서의 극한값			존재하지 않음.	

❶ $x=0$에서의 함숫값과 극한값이 일치하는 함수를 말해 보자.
❷ 그래프가 $x=0$에서 이어진 함수를 말해 보자.
❸ 위 ❶, ❷의 결과를 비교해 보자.

위 **탐구 활동**에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x=0$에서 이어져 있다. 이때

$$\lim_{x\to 0}f(x)=0 \text{ 이고 } f(0)=0$$

이므로

$$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$$

이 성립한다.

그러나 세 함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$, $y=k(x)$의 그래프는 $x=0$에서 끊어져 있다. 이때 함수 $g(x)$에서

$$\lim_{x\to 0}g(x)=0 \text{ 이지만 } g(0)=1$$

이므로

$$\lim_{x\to 0}g(x)\neq g(0)$$

이다. 또, 함수 $h(x)$에서 $\lim_{x\to 0-}h(x)=1$이고 $\lim_{x\to 0+}h(x)=0$이므로

$$\lim_{x\to 0-}h(x)\neq \lim_{x\to 0+}h(x)$$

이다. 따라서 극한 $\lim_{x\to 0}h(x)$는 존재하지 않는다.

한편, 함수 $k(x)$는 $x=0$에서 정의되지 않는다.

일반적으로 함수 $f(x)$와 실수 a에 대하여

> ❶ 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있고
> ❷ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$가 존재하며
> ❸ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **연속**이라고 한다.

한편, 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이 아닐 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **불연속**이라고 한다.

즉, 위 세 조건 중에서 어느 하나라도 만족하지 않으면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이다.

함수의 연속

예제 1 다음 함수가 $x=0$에서 연속인지 불연속인지 조사하시오.

(1) $f(x)=x|x|$　　(2) $f(x)=\begin{cases} x+1 & (x\neq 0) \\ 3 & (x=0) \end{cases}$

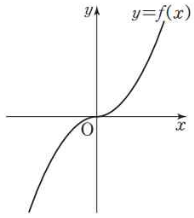
풀이

(1) 함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=0$이고

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x|x|=0$$

이므로 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

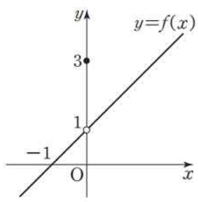


(2) 함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=3$이고

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} (x+1)=1$$

이므로 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\neq f(0)$이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.



답 (1) 연속 (2) 불연속

문제 1 다음 함수가 $x=1$에서 연속인지 불연속인지 조사하시오.

(1) $f(x)=\begin{cases} |x-1| & (x\neq 1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$　　(2) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x-1} & (x\geq 1) \\ 1-x^2 & (x<1) \end{cases}$

구간의 뜻

두 실수 a, $b(a<b)$에 대하여 집합

$$\{x|a \le x \le b\},\ \{x|a < x < b\},\ \{x|a \le x < b\},\ \{x|a < x \le b\}$$

를 **구간**이라고 하며, 이것을 각각 기호로

$$[a,\ b],\ (a,\ b),\ [a,\ b),\ (a,\ b]$$

와 같이 나타낸다.

이때 $[a,\ b]$를 **닫힌구간**, $(a,\ b)$를 **열린구간**이라고 하며, $[a,\ b)$, $(a,\ b]$를 **반닫힌 구간** 또는 **반열린 구간**이라고 한다.

또, a가 실수일 때, 집합

$$\{x|x \le a\},\ \{x|x < a\},\ \{x|x \ge a\},\ \{x|x > a\}$$

도 구간이라고 하며, 이것을 각각 기호로

$$(-\infty,\ a],\ (-\infty,\ a),\ [a,\ \infty),\ (a,\ \infty)$$

와 같이 나타낸다.

특히, 실수 전체의 집합도 하나의 구간으로 보고, 기호로 $(-\infty,\ \infty)$와 같이 나타낸다.

> **학습 도움말**
> $(-\infty,\ a)$, $(a,\ \infty)$, $(-\infty,\ \infty)$도 열린구간이라고 한다.

보기 구간의 기호를 사용하면 함수의 정의역을 간단히 나타낼 수 있다.

❶ 함수 $f(x)=x^2$의 정의역은 $(-\infty,\ \infty)$이다.

❷ 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x}$의 정의역은 $(-\infty,\ 0)\cup(0,\ \infty)$이다.

❸ 함수 $f(x)=\sqrt{x+1}$의 정의역은 $[-1,\ \infty)$이다.

문제 2 다음 함수의 정의역을 구간의 기호를 사용하여 나타내시오.

(1) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ (2) $f(x)=1+\sqrt{3-x}$

연속함수의 뜻

함수 $f(x)$가 어떤 열린구간의 모든 점에서 연속일 때, 함수 $f(x)$는 그 열린구간에서 연속이라고 한다. 또, 어떤 열린구간에서 연속인 함수를 그 열린구간에서의 **연속함수**라고 한다.

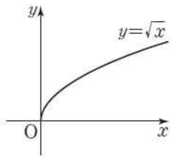
한편, 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 정의된 함수 $f(x)$가 열린구간 $(a,\ b)$에서 연속이고

$$\lim_{x\to a+} f(x)=f(a),\quad \lim_{x\to b-} f(x)=f(b)$$

일 때, 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이라고 하며, $f(x)$는 그 닫힌구간에서의 연속함수라고 한다.

학습 도움말
반열린 구간이나 구간 $(-\infty,\ a]$, $[a,\ \infty)$에서의 함수의 연속도 마찬가지 방법으로 정한다.

보기
① 상수함수 $f(x)=c$ (c는 상수)는 열린구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이다.
② 함수 $f(x)=2x$는 열린구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이다.
③ 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x}$은 열린구간 $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ \infty)$에서 연속이다.
④ 함수 $f(x)=\sqrt{x}$는 열린구간 $(0,\ \infty)$에서 연속이고 $\lim_{x\to 0+} f(x)=f(0)$이므로 구간 $[0,\ \infty)$에서 연속이다.



문제 3 다음 함수가 연속인 점들의 집합을 구간의 기호를 사용하여 나타내시오.

(1) $f(x)=x^2+3$ (2) $f(x)=\dfrac{x}{x-3}$

(3) $f(x)=\sqrt{2-x}$ (4) $f(x)=|x|$

창의 탐구 돋보기 함수의 연속

추론 / 의사소통 / 수학 역량

열린구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 정의된 함수 $f(x)$가 $x\neq 0$일 때 $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x}$이다. 네 학생이 함수 $f(x)$를 다음과 같이 설명하였을 때, 잘못된 부분이 있으면 올바르게 고쳐 보자.


진석
$x=1$에서 연속이다.


미현
$\lim_{x\to 0} f(x)=1$이다.


민경
열린구간 $(-\infty,\ 0)$에서 연속이다.


진호
$x=0$에서 연속이면 $f(0)=2$이다.

발표하기 올바르게 고친 것을 발표해 보자.

소단원 확인 문제

정답 156쪽

개념 굳히기

1 다음 함수가 $x=2$에서 연속이면 오른쪽 그림의 '연속' 칸에, 불연속이면 '불연속' 칸에 그 번호를 써넣으시오.

(1) $f(x)=x|x-2|$

(2) $f(x)=\begin{cases} |x-1| & (x\neq 2) \\ 1 & (x=2) \end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & (x\neq 2) \\ 3 & (x=2) \end{cases}$

(4) $f(x)=\begin{cases} 1+\sqrt{x-2} & (x\geq 2) \\ \sqrt{4-x} & (x<2) \end{cases}$

2 다음 함수가 연속인 점들의 집합을 구간의 기호를 사용하여 나타내시오.

(1) $f(x)=\begin{cases} x-1 & (x\geq 0) \\ x+1 & (x<0) \end{cases}$ (2) $f(x)=\sqrt{3-2x}$

개념 넓히기

3 다음 함수가 열린구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이 되도록 하는 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

(1) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-a}{x-1} & (x\neq 1) \\ b & (x=1) \end{cases}$ (2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+3}-a}{x-1} & (x\neq 1) \\ b & (x=1) \end{cases}$

역량 키우기 문제 해결

4 오른쪽 그림은 어떤 주차장의 주차 요금 안내판이다. 이 주차장에 x시간 동안 주차했을 때의 주차비를 $f(x)$원이라고 하자. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 불연속이고 $0<a<3$일 때, a의 값을 조사해 보자.

발표하기 a의 값을 조사한 과정을 정리하여 발표해 보자.

스스로 예습 연속함수의 성질을 예습해 봅시다.

2 연속함수의 성질

- 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

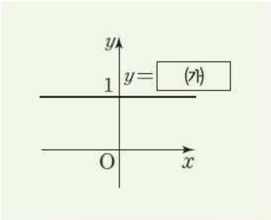
연속함수의 성질

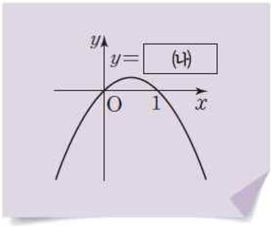
생각 열기

두 함수 $f(x)=x$, $g(x)=1-x$에 대하여 다음 물음에 답해 보자.

❶ 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=1$에서 연속인지 불연속이지 조사해 보자.

❷ 아래 그림의 ㈎, ㈏에 $f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$ 중 알맞은 것을 써넣어 보자.





❸ 위 ❷의 그래프를 이용하여 두 함수 $f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속인지 불연속인지 조사해 보자.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속일 때, 두 함수 $f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$도 $x=a$에서 연속인지 알아보자.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a),\ \lim_{x\to a} g(x)=g(a)$$

이다. 이때 함수의 극한의 성질에 의하여

$$\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)=f(a)+g(a)$$

$$\lim_{x\to a}\{f(x)g(x)\}=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)=f(a)g(a)$$

이다. 따라서 두 함수 $f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$도 $x=a$에서 연속이다.

같은 방법으로 함수의 극한의 성질을 이용하면 연속함수에서 다음이 성립함을 알 수 있다.

연속함수의 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 다음 함수도 $x=a$에서 연속이다.

❶ $cf(x)$ (c는 상수)

❷ $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$

❸ $f(x)g(x)$

❹ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(a)\neq 0)$

문제 1 함수의 극한의 성질을 이용하여 앞의 연속함수의 성질에서 ❶, ❹가 성립함을 보이시오.

일차함수 $y=x$는 모든 실수에서 연속이므로 이 함수의 곱으로 나타나는 함수

$$y=x^2,\ y=x^3,\ y=x^4,\ \cdots$$

은 모두 모든 실수에서 연속이다. 또, 다항함수는 위 함수들의 실수배와 상수함수의 합이므로 모든 실수에서 연속이다.

한편, 유리함수는 두 다항함수의 몫으로 나타나므로 그 분모를 0으로 하지 않는 모든 실수에서 연속이다.

학습 도움말

함수 $P(x)$, $Q(x)$가 다항함수일 때, $\frac{P(x)}{Q(x)}\ (Q(x)\neq 0)$ 꼴로 나타나는 함수를 유리함수라고 한다.

보기 ❶ 함수 $f(x)=x^4+3x-4$는 모든 실수에서 연속이다.

❷ 함수 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$은 $x\neq 2$인 모든 실수에서 연속이다.

연속함수의 성질

예제 1 두 함수 $f(x)=x+3$, $g(x)=x^2-4x-5$에 대하여 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$가 연속인 구간을 조사하시오.

풀이

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에서

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x+3}{x^2-4x-5}=\frac{x+3}{(x+1)(x-5)}$$

이때 연속함수의 성질에 의하여 유리함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $x\neq -1$, $x\neq 5$인 모든 실수에서 연속이다.

따라서 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 열린구간

$$(-\infty,\ -1),\ (-1,\ 5),\ (5,\ \infty)$$

에서 연속이다.

답 $(-\infty,\ -1)$, $(-1,\ 5)$, $(5,\ \infty)$

문제 2 다음 함수가 연속인 구간을 조사하시오.

(1) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+3x+2}$

(2) $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x^2+x+1}$

최대•최소 정리

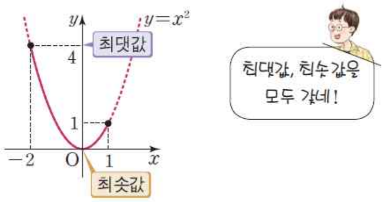
주어진 구간에서 연속함수의 최댓값과 최솟값이 존재하는지 알아보자.

함수 $f(x)=x^2$은 모든 실수에서 연속이다.
이때 닫힌구간 $[-2,\ 1]$에서 함수 $f(x)$는

최댓값 $f(-2)=4$,

최솟값 $f(0)=0$

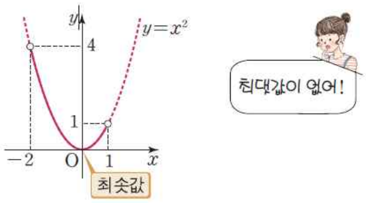
을 갖는다.



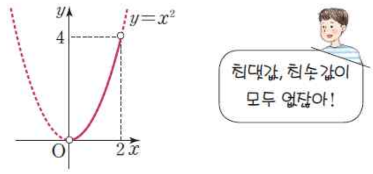
한편, 열린구간 $(-2,\ 1)$에서 함수 $f(x)$는

최솟값 $f(0)=0$

을 갖지만 최댓값은 갖지 않는다.



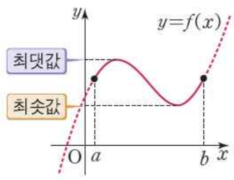
또, 열린구간 $(0,\ 2)$에서 함수 $f(x)$는 최댓값과 최솟값을 모두 갖지 않는다.



일반적으로 닫힌구간에서 연속인 함수에 대하여 다음과 같은 **최대•최소 정리**가 성립한다.

최대•최소 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이면 함수 $f(x)$는 이 닫힌구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.



문제 3 다음 함수가 주어진 닫힌구간에서 최댓값을 갖는지 말하시오. 또, 최솟값을 갖는지 말하시오.

(1) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+1}$, $[0,\ 3]$ (2) $f(x)=\sqrt{3-x}$, $[-5,\ 2]$

사잇값의 정리

탐구 활동

어느 날 지리산 천왕봉의 최고 기온과 최저 기온이 다음과 같이 측정되었다.

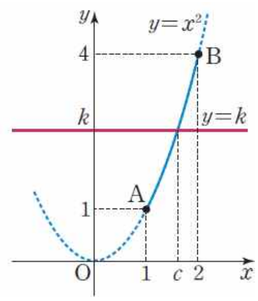
최고 기온: 12.3 ℃
최저 기온: 4.0 ℃

이날 천왕봉의 기온이 9.0 ℃인 순간이 반드시 있었다고 할 수 있는가?
또, 그 까닭을 친구들과 서로 말해 보자.

함수 $f(x)=x^2$은 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 연속이므로 이 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B 사이에서 끊어지지 않고 이어져 있다.

따라서 $1<k<4$인 임의의 k에 대하여 x축에 평행한 직선 $y=k$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 반드시 만난다.

즉, 1과 4 사이의 임의의 값 k에 대하여 $f(c)=k$가 되는 c가 열린구간 $(1,\ 2)$에 반드시 존재한다.



천왕봉
지리산의 최고봉으로, 천왕봉의 해돋이는 '지리 10경' 중 하나로 꼽힐 만큼 아름답기로 유명하다.
(출처: "경인일보", 2014년 10월 10일)

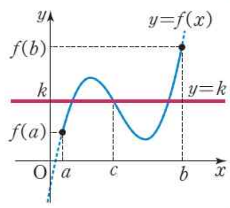
일반적으로 닫힌구간에서 연속인 함수에 대하여 다음과 같은 사잇값의 정리가 성립한다.

사잇값의 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$이면, $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여

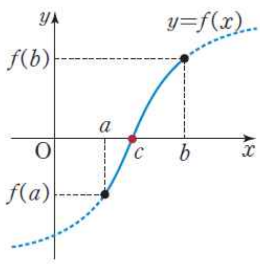
$$f(c)=k$$

인 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.



특히, 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 서로 다르면, $f(a)$와 $f(b)$ 사이에 0이 있으므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.

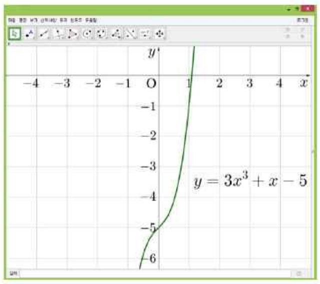
즉, 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(a,\ b)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.



예제 2 (사잇값의 정리의 활용)

방정식 $3x^3+x-5=0$은 열린구간 $(1,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 보이시오.

풀이



$f(x)=3x^3+x-5$라고 하면

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 연속이고

$$f(1)=-1<0,\ f(2)=21>0$$

이다.

따라서 사잇값의 정리에 의하여

$$f(c)=0$$

인 c가 열린구간 $(1,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

즉, 방정식 $3x^3+x-5=0$은 열린구간 $(1,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

답 풀이 참조

문제 4 다음 방정식은 주어진 열린구간에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 보이시오.

(1) $x^3-4x^2+4=0,\ (1,\ 2)$ (2) $2x^4+3x^2+x-2=0,\ (0,\ 1)$

창의 탐구 돋보기 사잇값의 정리

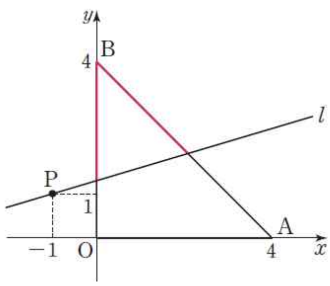
추론 의사소통 수학 역량

오른쪽 그림에서 기울기가 m인 직선 l은 점 $\mathrm{P}(-1,\ 1)$을 지나고 직각삼각형 OAB와 만난다. 삼각형 OAB의 둘레 중에서 직선 l보다 위쪽에 놓인 부분의 길이를 $f(m)$이라고 할 때, 다음 물음에 답해 보자.

❶ m의 최솟값 a와 최댓값 b를 각각 구해 보자.

❷ 함수 $f(m)$은 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속함수인지 토론해 보자.

설명하기 삼각형 OAB의 둘레의 길이를 이등분하는 직선 l이 존재함을 설명해 보자.



소단원 확인 문제

정답 156쪽

개념 굳히기

1 다음 왼쪽의 각 열린구간에서 연속인 함수를 오른쪽에서 모두 찾아 선으로 연결하시오.

(1) $(-\infty,\ \infty)$

(2) $(0,\ \infty)$

(3) $(-\infty,\ 0)$

㉠ $f(x)=x^4$

㉡ $f(x)=\dfrac{1}{x^4}$

㉢ $f(x)=\dfrac{1}{x^4+1}$

개념 넓히기

2 두 함수 $f(x)=x^2+x$, $g(x)=2x+2$에 대하여 다음 함수가 연속인 구간을 조사하시오.

(1) $\dfrac{g(x)}{f(x)}$

(2) $\dfrac{f(x)+g(x)}{f(x)-g(x)}$

3 다음 중 이차함수 $f(x)=x^2-4x+5$가 최댓값을 갖는 구간을 모두 말하시오. 또, 최솟값을 갖는 구간을 모두 말하시오.

(1) $(-2,\ 0)$

(2) $[0,\ 4]$

(3) $[1,\ 3)$

(4) $(3,\ 5]$

4 방정식 $x^3=2x+2$는 열린구간 $(1,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 보이시오.

역량 키우기 의사소통

5 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족한다.

> (가) 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 연속이다.
> (나) 닫힌구간 $[0,\ 1]$에 속하는 모든 x에 대하여 $0<f(x)<1$이다.

이때 방정식 $f(x)=x$는 열린구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 설명해 보자.

발표하기 위 풀이 과정을 정리하여 발표해 보자.

스스로 예습 미분계수를 예습해 봅시다.

함께 생각하는 **탐구**

실근! 너 어디쯤에 있니?

연속함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $f(x)=0$의 실근이 존재할 때, 사잇값의 정리를 이용하면 그 실근이 존재하는 구간을 알 수 있다. 이때 사잇값의 정리를 적용하는 구간을 절반씩 나누어 점점 좁혀 나가면 실근에 충분히 가까운 어림수를 구할 수 있다

(출처: C. H. Edwards. Jr., David E. Penney, "CALCULUS and Analytic Geometry")

목표 방정식의 실근이 존재하는 구간을 절반씩 좁혀 나가 보자.

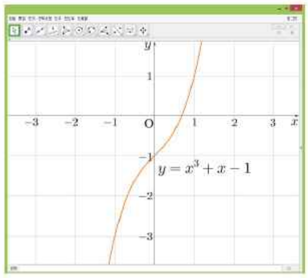
과정

함수 $f(x)=x^3+x-1$에 대하여

$$f(0)=-1<0,\ f(1)=1>0$$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $x^3+x-1=0$은 열린구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근 α를 갖는다.

실제로 α는 방정식 $x^3+x-1=0$의 유일한 실근이다.



활동 1 α가 존재하는 열린구간을 절반씩 나누어 사잇값의 정리를 적용하는 과정을 여러 번 반복한 후 정리하면 오른쪽 표와 같다. 빈칸을 알맞게 채워 표를 완성해 보자.

단계	x	$f(x)$	$f(x)$의 부호	α가 존재하는 열린구간
1	0	-1	$-$	$(0,\ 1)$
	1	1	$+$	
2	$\frac{1}{2}$	-0.3750	$-$	$\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$
3	$\frac{3}{4}$			
4				
5				

활동 2 방정식 $x^3+x-1=0$과 같이 열린구간 $(0,\ 1)$에서 유일한 실근을 갖는 삼차방정식을 모둠별로 정한 후 **활동 1** 에서와 같은 표를 완성해 보자.

정리 및 발표

모둠별로 위 탐구 과정을 정리하여 발표해 보자.

중단원 연습 문제

5분 정리 노트

이 단원에서 학습한 개념이나 공식을 친구들과 함께 정리해 보자.

함수의 연속

연속함수의 성질

최대•최소 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이면 함수 $f(x)$는 이 닫힌구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

사잇값의 정리

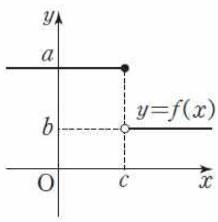
다지기

01 다음 함수가 $x=2$에서 연속인지 불연속인지 조사하시오.

(1) $f(x)=\sqrt{3x-1}$

(2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & (x \neq 2) \\ 0 & (x=2) \end{cases}$

02 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 함수 $f(x)$가 $x=c$에서 불연속임을 설명하시오.



03 다음 함수가 연속인 구간을 조사하시오.

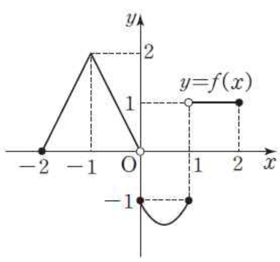
(1) $f(x)=x^2-2$

(2) $f(x)=\sqrt{2x-1}$

(3) $f(x)=x^2+3x$

(4) $f(x)=\dfrac{x^3+2x-1}{x+2}$

04 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 불연속일 때, a의 값을 모두 구하시오.



정답 157쪽

나아가기

05 두 함수 $f(x)=x^2-x$, $g(x)=3x^2+x$에 대하여 보기의 함수 중 모든 실수에서 연속인 함수를 있는 대로 고르시오.

보기

ㄱ. $f(x)+g(x)$　　ㄴ. $f(x)-g(x)$

ㄷ. $f(x)g(x)$　　ㄹ. $\dfrac{g(x)}{f(x)}$

06 함수 $f(x)=\begin{cases} 3x+k & (x \ge 1) \\ x^2-2x+3 & (x<1) \end{cases}$이 $x=1$에서 연속일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

07 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음을 만족할 때, $f(1)$의 값을 구하시오.

$$(x-1)f(x)=x^3-1$$

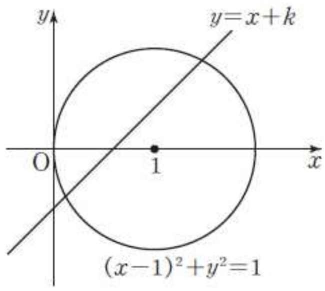
08 함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2+ax}{x+1} & (x \ne -1) \\ b & (x=-1) \end{cases}$가 $x=-1$에서 연속일 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

09 방정식 $3x^3+x-2=0$은 열린구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 보이시오.

10 연속함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$, $\mathrm{B}(2,\ 3)$을 지날 때, 방정식 $f(x)-x^2=0$은 열린구간 $(1,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 보이시오.

도약하기

11 다음 그림과 같이 원 $(x-1)^2+y^2=1$과 직선 $y=x+k$가 만나는 점의 개수를 $f(k)$라고 하자. 함수 $f(k)$가 $k=a$에서 불연속일 때, a의 값을 모두 구하시오.



12 사잇값의 정리를 이용하여 다음 방정식은 서로 다른 두 실근을 가짐을 보이시오.

$(\alpha<\beta<\gamma)$

$$(x-\alpha)(x-\beta)+(x-\beta)(x-\gamma)+(x-\gamma)(x-\alpha)=0$$

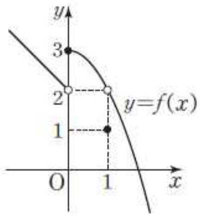
대단원 종합 문제

다지기

01 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때,

$$\lim_{x\to 0+} f(x)+\lim_{x\to 1} f(x)$$

의 값을 구하시오.



02 함수 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x+1|}$에 대하여

$$\lim_{x\to -1-} f(x)=a,\quad \lim_{x\to -1+} f(x)=b$$

일 때, $a+2b$의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2
④ -1 ⑤ 0

03 $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-7x+6}{2x-4}$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{1}{2}$
④ 1 ⑤ 2

04 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{-5x+2}{x+2}+\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$ 의 값은?

① -5 ② -3 ③ -1
④ 3 ⑤ 5

나아가기

05 다음 등식이 성립할 때, 상수 a의 값은?

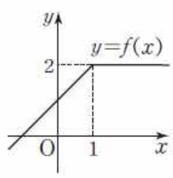
$$\lim_{x\to\infty}\frac{2ax}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax}}=5$$

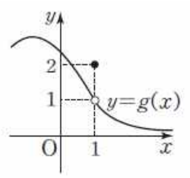
① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

06 $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{4x^2+3}}{x-2}$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

07 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x)g(x)$의 값은?





① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

08 함수 $f(x)$가 다음을 만족할 때, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$의 값을 구하시오.

$$\frac{3x^2-1}{x^2}<f(x)<\frac{3x+2}{x}\quad (x>0)$$

정답 158쪽

09 함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 1+} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to 1-} f(x)=0$$

을 만족하고, 극한값 $\lim_{x\to 1}\frac{2f(x)+a}{f(x)+2}$가 존재할 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

10 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to 0} f(x)=3$일 때,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+xf(x)}-\sqrt{1-xf(x)}}{x}$$

의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② 1 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

11 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to\infty}\{2f(x)-g(x)\}=1$$

일 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{5f(x)-g(x)}{f(x)+g(x)}$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

12 함수 $f(x)=\frac{1+x^3}{1+x}$에 대하여

$\lim_{x\to 1} f(x)f(-x)$의 값은?

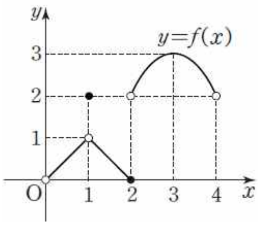
① -3 ② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

13 구간 $[-2,\ \infty)$에서 연속인 함수 $f(x)$가

$f(x)=\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}\ (x\neq 2)$일 때, $f(2)$의 값은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

14 열린구간 $(0,\ 4)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같다. 이 열린구간에서 다음 조건을 만족하는 a의 개수를 m, b의 개수를 n이라고 할 때, $m-n$의 값은?



(가) $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 극한이 존재하지 않는다.
(나) 함수 $f(x)$는 $x=b$에서 불연속이다.

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

15 연속함수 $y=f(x)$의 그래프가 네 점 A$(-2,\ 3)$, B$(0,\ -1)$, C$(1,\ 2)$, D$(2,\ 4)$를 지난다. 방정식 $f(x)=0$에 대하여 보기 중에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기
ㄱ. 닫힌구간 $[-2,\ 0]$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
ㄴ. 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
ㄷ. 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

16 연속함수 $f(x)$가

$$f(0)=a+1,\ f(1)=a-2,$$
$$f(-1)>1,\ f(2)<4$$

를 만족하고, 방정식 $f(x)-x^2=0$의 실근이 오직 하나 존재한다. 이 실근이 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재할 때, 정수 a의 개수는?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

17 모든 실수에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$f(a)=3,\ (x-a)f(x)=x^2-x+b$$

를 만족할 때, $a+b+f(1)$의 값은?
(a, b는 상수)

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

18 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}=2,\ \lim_{x\to -2}\frac{f(x)}{x+2}=-1$$

을 만족할 때, $f(0)$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

도약하기

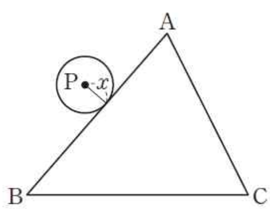
19 두 함수

$$f(x)=x+k,\ g(x)=\begin{cases} x+3 & (x\geq 1) \\ -x+2 & (x<1)\end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속일 때, 상수 k의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2
④ -1 ⑤ 0

20 둘레의 길이가 1인 삼각형 ABC가 있다. 반지름의 길이가 x인 원이 삼각형 ABC의 각 변에 접하면서 이 삼각형의 둘레를 한 바퀴 돌 때, 원의 중심 P가 그리는 도형의 길이를 $f(x)$라고 하자. 이때



$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ π
④ 2π ⑤ $\pi+1$

정답 158쪽

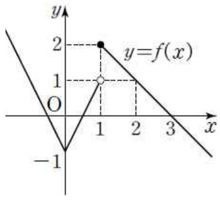
서술형

[21~24] 다음 문제의 풀이 과정을 자세히 쓰시오.

21 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 함수

$g(x)=\{f(x)-1\}\{f(x)-2\}$

가 $x=1$에서 연속인지 불연속인지 조사하시오.

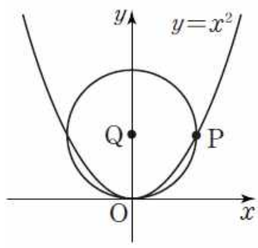


22 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-x+5}=2,\ \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+2x-3}=\frac{3}{2}$$

을 만족할 때, $f(0)$의 값을 구하시오.

23 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=x^2$ 위의 점 P와 원점 O를 지나고, y축 위의 점 Q를 중심으로 하는 원이 있다. 점 P가 곡선 $y=x^2$을 따라 원점 O에 한없이 가까워질 때, 점 Q는 점 $(0,\ a)$에 한없이 가까워진다. 이때, a의 값을 구하시오.



24 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족할 때, $f(17)$의 값을 구하시오.

(가) $f(x)=\begin{cases} x+2 & (0\le x<4) \\ a(x-4)^2+b & (4\le x\le 6)\end{cases}$

(a, b는 상수)

(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+6)=f(x)$이다.

Math Clinic **다 배우고 나서…**

맞은 개수 | 개 | 틀린 개수 | 개

- 이 단원을 배우는 동안 나는 어떠했는지 1~5점까지 ☆에 표시해 봅시다.

- 부족한 부분의 내용과 보충 계획을 써 봅시다.

협력 학습 기록장 |

- 우리 모둠원 가운데 다음 수업 태도와 가장 어울리는 사람을 적어 주세요.
  - 내가 모르는 문제를 친절하게 설명해 준 친구
  - 내가 생각하지 못했던 질문이나 이야기를 많이 한 친구
  - 이야기를 잘 들어 주고 호응이 좋은 친구
- 수업 내용 중에서 가장 기억에 남는 것을 써 봅시다.

도전해 볼까?

너는 시인, 나는 기자!

다음은 어느 고등학교의 학교 신문 기사의 일부이다.

열정 가득한 우리, 함께 하자!

5월 28일 열린 고등학교 대운동장에서 전교생이 참여한 교내 체육대회가 열렸다. 이번 체육대회는 협동심을 기를 수 있는 종목으로 구성했으면 좋겠다는 학생회의 의견을 수렴하여 7인 8각 경기, 단체줄넘기, 축구 등의 단체 경기 중심으로 진행되었다. 마지막 경기는 체육대회에서 결코 빠질 수 없는 이어달리기 결승전! 청팀 선수들은 초반에 무서운 기세로 앞서 나갔지만 세 번째 주자와 네 번째 주자가 연속하여 넘어지는 바람에 아쉽게 우승을 하지 못했다. 이날 학생들은 자신의 역량을 맘껏 발산하면서 즐거운 하루를 보냈다.

열린신문 우극한 기자

활동 1 이 단원에서 배운 용어 중에서 한 개를 선택하여 이행시 또는 삼행시를 지어 보자.

활동 2 모둠별로 이 단원에서 배운 용어 중에서 2개 이상을 사용하여 학교 신문 기사를 써 보자.

생생
진로 체험

우리의 안전을 책임지는

비파괴 검사원

제31회 리우데자네이루 올림픽에서 한국 양궁 대표 팀은 전 종목에서 금메달을 획득하였다. 이러한 쾌거 뒤에는 과학 기술이 숨겨져 있었는데, 고온다습한 브라질에서는 활이 변형될 가능성이 클 것을 예상해 비파괴 검사로 활의 결함을 확인하고 조치를 취했던 것이다.

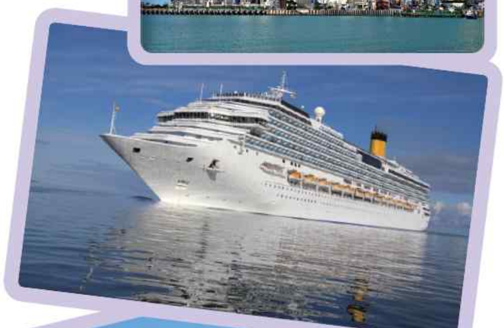
(출처: "조선일보", 2016년 7월 22일/ 2016년 8월 15일)

비파괴 검사란?

물체를 절단하거나 파괴하지 않고 검사하는 것을 비파괴 검사라고 한다. 비파괴 검사 방법 중 초음파를 이용할 때는 시설물 내부로 초음파를 보내 반사되어 온 초음파의 그래프가 연속적으로 그려지는지 아닌지를 분석하여 시설물의 내부에 균열이 있는지를 파악한다.

비파괴 검사원의 역할은?

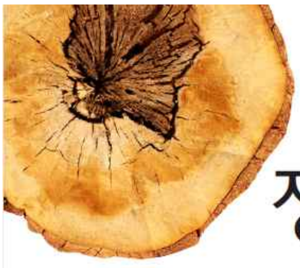
비파괴 검사가 발전소, 선박, 교량 등의 광범위한 분야에서 이루어짐에 따라 비파괴 검사원은 산업계 전반의 안전을 책임진다고 할 수 있다. 특히, 고도의 안전성이 요구되는 우주 산업과 원자력 산업의 발달로 인해 그 역할도 함께 커지고 있다.



비파괴 검사원이 되려면?

비파괴 검사원은 비파괴 검사 결과를 분석할 수 있어야 하므로 수학, 물리 등과 관련된 지식과 수리 논리력, 분석력 등의 공학적인 소양이 뛰어나야 한다.

(출처: "사이언스타임즈", 2013년 4월 4일)



정답

I. 함수의 극한과 연속

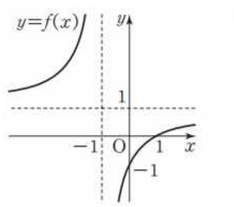
학습하기 전 나의 다짐 p. 9

예시 수학 Ⅱ 과목의 첫 단원이므로 이후에 배우게 될 내용의 기초가 될 것으로 예상된다. 수업 시간에 집중하여 공부하고, 모든 문제를 빠짐없이 꼼꼼하게 풀어 기초를 튼튼하게 다져야겠다.

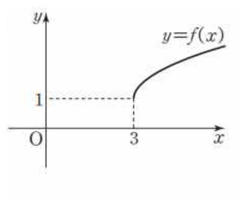
1 함수의 극한

알고 있나요? p. 10

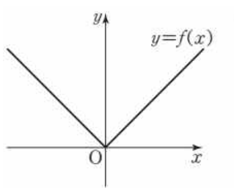
1 (1)



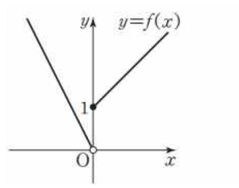
(2)



2 (1)



(2)



1 함수의 극한의 뜻 p. 11~18

탐구 활동 2

1 (1) 8 (2) -1 (3) 3 (4) $\sqrt{2}$
2 (1) 0 (2) 0 (3) 2 (4) 1
3 5
4 (1) ∞ (2) $-\infty$ (3) ∞ (4) ∞
5 (1) ∞ (2) $-\infty$

탐구 활동 ❶ (1) -1 (2) 0
❷ 하나의 값에 한없이 가까워지지 않는다.

6 (1) 3 (2) 1
7 (1) 0 (2) 존재하지 않는다.
8 존재하지 않는다.

소단원 확인 문제 p. 19

1 (1)–㉢: 2, (2)–㉡: 1, (3)–㉠: 0
2 (1) ∞ (2) $-\infty$ (3) ∞ (4) $-\infty$
3 $a=2$, $\lim_{x\to-1+} f(x)=1$ **4** 0
5 (1) 모든 양의 실수 (2) 모든 양의 실수
(3) 8이 아닌 모든 양의 실수

2 함수의 극한의 성질 p. 20~24

생각 열기 ❶ (가) 2 (나) 1 (다) 2 (라) 1
❷ (가)와 (다), (나)와 (라)

1 (1) 3 (2) -3 **2** (1) 3 (2) $-\frac{1}{2}$
3 (1) 2 (2) $\sqrt{3}$
4 (1) $a=-4$, $b=3$ (2) $a=2$, $b=-2$
5 5 **6** 1

창의 탐구 돋보기

11.2 km/s

소단원 확인 문제 p. 25

1 (1) 1 (2) -1 (3) $\frac{1}{2}$ (4) 5
2 (1) 7 (3) 10
3 $a=-1$, $b=3$
4 (1) 0 (2) 0 **5** ㉢

설명하기

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{1-x}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-x^2}{1-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1-x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}-1}=-1$$

함께 생각하는 탐구 p. 26

과정 1 ❶ $\lim_{a\to0+}\overline{\mathrm{OA}}$, $ax^2+x-1=0$
❷ $\dfrac{-1+\sqrt{1+4a}}{2a}$
❸ 1

과정 2 2

중단원 연습 문제

p. 27~28

01 (1) ∞ (2) $-\infty$ (3) 3 (4) 2

02 (1) 1 (2) 3

03 (1) -3 (2) $\dfrac{1}{4}$ (3) 2 (4) $\dfrac{3}{2}$

04 -2 **05** -1

06 (1) $a=-1,\ b=-6$ (2) $a=8,\ b=6$

07 (1) 존재하지 않는다. (2) 1

(3) 존재하지 않는다. (4) 0

08 0

09 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{3x^2-x+1}=1$에서 $f(x)$는 이차항의 계수가 3인 이차함수임을 알 수 있다.

또, $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=9$에서 $x\to2$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $f(2)=0$이므로 $f(x)=3(x-2)(x-a)$ (a는 상수)라고 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}&=\lim_{x\to2}\frac{3(x-2)(x-a)}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}3(x-a)\\&=6-3a\end{aligned}$$

$6-3a=9$에서 $a=-1$이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=3(x-2)(x+1)\\&=3x^2-3x-6\end{aligned}$$

답 $f(x)=3x^2-3x-6$

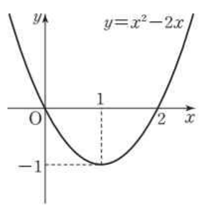
2 함수의 연속

알고 있나요?

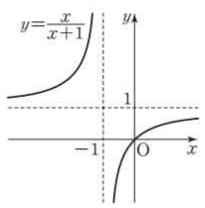
p. 29

1 (1) $\{x|x\neq-1$인 실수$\}$ (2) $\{x|x\geq2$인 실수$\}$

2 (1)



(2)



1 연속함수

p. 30~33

탐구 활동

	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$	$k(x)$
$x=0$에서의 함숫값	0	1	0	정의되지 않음.
$x=0$에서의 극한값	0	0	존재하지 않음.	0

❶ $f(x)$ ❷ $f(x)$ ❸ 같다.

1 (1) 불연속 (2) 연속

2 (1) $(-\infty,\ 1)\cup(1,\ \infty)$ (2) $(-\infty,\ 3]$

3 (1) $(-\infty,\ \infty)$ (2) $(-\infty,\ 3)\cup(3,\ \infty)$

(3) $(-\infty,\ 2]$ (4) $(-\infty,\ \infty)$

창의 탐구 돋보기

미현: $\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=2$이다.

소단원 확인 문제

p. 34

1 연속: (1), (2), 불연속: (3), (4)

2 (1) $(-\infty,\ 0)\cup(0,\ \infty)$ (2) $\left(-\infty,\ \dfrac{3}{2}\right]$

3 (1) $a=1,\ b=2$ (2) $a=2,\ b=\dfrac{1}{4}$

4 $1,\ \dfrac{3}{2},\ 2,\ \dfrac{5}{2}$

2 연속함수의 성질

p. 35~39

생각 열기 ❶ $f(x),\ g(x)$ 모두 $x=1$에서 연속이다.

❷ (가) $f(x)+g(x)$ (나) $f(x)g(x)$

❸ $f(x)+g(x),\ f(x)g(x)$ 모두 $x=1$에서 연속이다.

1 두 함수 $f(x),\ g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로

$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=f(a),\ \lim_{x\to a}g(x)=g(a)$이다.

❶ 함수의 극한의 성질에 의하여

$$\lim_{x\to a}cf(x)=c\lim_{x\to a}f(x)=cf(a)\ (c\text{는 상수})$$

따라서 함수 $cf(x)$도 $x=a$에서 연속이다.

❹ 함수의 극한의 성질에 의하여

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)}{\displaystyle\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}\quad(g(a)\neq0)$$

따라서 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$도 $x=a$에서 연속이다.

2 (1) $(-\infty,\ -2),\ (-2,\ -1),\ (-1,\ \infty)$ (2) $(-\infty,\ \infty)$

3 (1) 최댓값과 최솟값을 갖는다.

(2) 최댓값과 최솟값을 갖는다.

탐구 활동 기온이 $9.0\,^\circ\mathrm{C}$인 순간이 반드시 있었다고 할 수 있다. [까닭] 기온은 연속적으로 변하기 때문이다.

4 (1) $f(x)=x^3-4x^2+4$라고 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 연속이고

$f(1)=1>0,\ f(2)=-4<0$

이다. 따라서 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(1,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

즉, 방정식 $x^3-4x^2+4=0$은 열린구간 $(1,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

(2) $f(x)=2x^4+3x^2+x-2$라고 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고

$f(0)=-2<0,\ f(1)=4>0$

이다. 따라서 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(0,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.

즉, 방정식 $2x^4+3x^2+x-2=0$은 열린구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

창의 탐구 돋보기

❶ $a=-1,\ b=3$

❷ 예시 m의 값이 닫힌구간 $[-1,\ 3]$에서 연속적으로 변할 때 $f(m)$의 값도 연속적으로 변하므로 함수 $f(m)$은 닫힌구간 $[-1,\ 3]$에서 연속함수이다.

소단원 확인 문제 p. 40

1 (1)−㉠, ㉢, (2)−㉠, ㉡, ㉢, (3)−㉠, ㉡, ㉢

2 (1) $(-\infty,\ -1),\ (-1,\ 0),\ (0,\ \infty)$

(2) $(-\infty,\ -1),\ (-1,\ 2),\ (2,\ \infty)$

3 최댓값: (2), (3), (4), 최솟값: (2), (3)

4 $f(x)=x^3-2x-2$라고 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 연속이고

$f(1)=-3<0,\ f(2)=2>0$

이다.

따라서 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(1,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

즉, 방정식 $x^3=2x+2$는 열린구간 $(1,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

5 $g(x)=f(x)-x$라고 하면 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고

$g(0)=f(0)>0,\ g(1)=f(1)-1<0$

이다.

따라서 사잇값의 정리에 의하여 $g(c)=0$인 c가 열린구간 $(0,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.

즉, 방정식 $f(x)=x$는 열린구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

함께 생각하는 탐구 p. 41

활동 1

단계	x	$f(x)$	$f(x)$의 부호	a가 존재하는 열린구간
3	$\frac{3}{4}$	$0.1718\cdots$	$+$	$\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right)$
4	$\frac{5}{8}$	$-0.1308\cdots$	$-$	$\left(\frac{5}{8},\ \frac{3}{4}\right)$
5	$\frac{11}{16}$	$0.0124\cdots$	$+$	$\left(\frac{5}{8},\ \frac{11}{16}\right)$

중단원 연습 문제 p. 42~43

01 (1) 연속 (2) 불연속

02 $\lim\limits_{x\to c-}f(x)=a,\ \lim\limits_{x\to c+}f(x)=b$이므로

$\lim\limits_{x\to c-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to c+}f(x)$

따라서 $\lim\limits_{x\to c}f(x)$가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=c$에서 불연속이다.

03 (1) $(-\infty,\ \infty)$ (2) $\left[\frac{1}{2},\ \infty\right)$

(3) $(-\infty,\ \infty)$ (4) $(-\infty,\ -2),\ (-2,\ \infty)$

04 0, 1

05 ㄱ, ㄴ, ㄷ

06 -1

07 3

08 $a=2,\ b=-2$

09 $f(x)=3x^3+x-2$라고 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고

$f(0)=-2<0,\ f(1)=2>0$

이다.

따라서 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(0,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.

즉, 방정식 $3x^3+x-2=0$은 열린구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

10 $g(x)=f(x)-x^2$이라고 하면 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 연속이고

$g(1)=f(1)-1=1>0,\ g(2)=f(2)-4=-1<0$

이다.

따라서 사잇값의 정리에 의하여 $g(c)=0$인 c가 열린구간 $(1,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

즉, 방정식 $f(x)-x^2=0$은 열린구간 $(1,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

11 원 $(x-1)^2+y^2=1$의 중심 $(1,\ 0)$과 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ 사이의 거리는 $\frac{|k+1|}{\sqrt{2}}$이다.

❶ $\frac{|k+1|}{\sqrt{2}}<1$, 즉 $-1-\sqrt{2}<k<-1+\sqrt{2}$일 때 주어진 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

❷ $\frac{|k+1|}{\sqrt{2}}=1$, 즉 $k=-1\pm\sqrt{2}$일 때 주어진 원과 직선은 한 점에서 만난다.

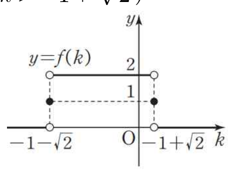
❸ $\frac{|k+1|}{\sqrt{2}}>1$, 즉 $k<-1-\sqrt{2}$ 또는 $k>-1+\sqrt{2}$일 때 주어진 원과 직선은 만나지 않는다.

❶, ❷, ❸에서

$$f(k)=\begin{cases}2\ (-1-\sqrt{2}<k<-1+\sqrt{2})\\1\ (k=-1\pm\sqrt{2})\\0\ (k<-1-\sqrt{2}\ \text{또는}\ k>-1+\sqrt{2})\end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(k)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 구하는 a의 값은 $-1-\sqrt{2},\ -1+\sqrt{2}$이다.



답 $-1-\sqrt{2},\ -1+\sqrt{2}$

12 $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)+(x-\beta)(x-\gamma)+(x-\gamma)(x-\alpha)$

라고 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[\alpha, \gamma]$에서 연속이므로 닫힌구간 $[\alpha, \beta]$와 닫힌구간 $[\beta, \gamma]$에서도 연속이다.

또,

$f(\alpha)=(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)>0$,

$f(\beta)=(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)<0$,

$f(\gamma)=(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)>0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 주어진 방정식은 열린구간 (α, β)와 열린구간 (β, γ)에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다. 한편, $f(x)=0$은 이차방정식이므로 최대 2개의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

답 풀이 참조

대단원 종합 문제 p. 44~47

다지기	**01** 5		**02** ③		**03** ③		**04** ④		
나아가기	**05** ④		**06** ①		**07** ②		**08** 3		
09 ④	**10** ③		**11** ④		**12** ④		**13** ②		
14 ②	**15** ③		**16** ②		**17** ⑤		**18** ④		
도약하기	**19** ④		**20** ④						

21 ① $g(1)=\{f(1)-1\}\{f(1)-2\}$

$=1\times0=0$ 30 %

② $x\to1-$일 때

$f(x)\to1$이므로 $g(x)\to0\times(-1)=0$

$x\to1+$일 때

$f(x)\to2$이므로 $g(x)\to1\times0=0$

따라서 $\lim_{x\to1}g(x)=0$이다. 60 %

③ 따라서 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다. 10 %

답 연속

22 ① $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-x+5}=2$이므로 $f(x)$는 이차항의 계수가 2인 이차함수이다.

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{(x+3)(x-1)}=\frac{3}{2}$에서

$\lim_{x\to1}(x+3)(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=0$

따라서 $f(x)=2(x-1)(x+a)$(a는 상수)로 놓을 수 있다. 50 %

② $\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)(x+a)}{(x+3)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{2(x+a)}{x+3}$

$=\frac{1+a}{2}=\frac{3}{2}$

이므로 $a=2$ 40 %

③ 따라서 $f(x)=2(x-1)(x+2)$이므로

$f(0)=2\times(-1)\times2=-4$ 10 %

답 -4

23 ① 두 점 P, Q의 좌표를 각각 $\mathrm{P}(t, t^2)$, $\mathrm{Q}(0, r)$라고 하면 두 점 O, P는 원 위의 점이므로

$\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{PQ}}$이다. 30 %

② 즉, $r=\sqrt{t^2+(t^2-r)^2}$이므로 양변을 제곱하여 정리하면

$t^4+t^2-2rt^2=0$, $t^2(t^2+1-2r)=0$

$r=\frac{1}{2}(t^2+1)$ 30 %

③ 이때 점 P가 원점 O에 한없이 가까워지면 $t\to0$이므로

$\lim_{t\to0}r=\lim_{t\to0}\frac{1}{2}(t^2+1)=\frac{1}{2}$

따라서 점 Q는 점 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$에 한없이 가까워지므로

$a=\frac{1}{2}$ 40 %

답 $\frac{1}{2}$

24 ① 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 연속이므로

$\lim_{x\to4-}f(x)=\lim_{x\to4+}f(x)=f(4)=b$

이다. 이때

$\lim_{x\to4-}f(x)=\lim_{x\to4-}(x+2)=b$

$\lim_{x\to4+}f(x)=\lim_{x\to4+}\{a(x-4)^2+b\}=b$

이므로 $b=6$이다. 40 %

② 또, 함수 $f(x)$는 $x=6$에서 연속이므로

$\lim_{x\to6-}f(x)=\lim_{x\to6+}f(x)=f(6)=4a+6$

이다. 이때

$\lim_{x\to6-}f(x)=\lim_{x\to6-}\{a(x-4)^2+6\}$

$=4a+6$

$\lim_{x\to6+}f(x)=\lim_{x\to0+}f(x)$

$=\lim_{x\to0+}(x+2)=2$

이므로 $a=-1$이다. 40 %

③ 즉, $f(x)=\begin{cases}x+2 & (0\le x<4)\\ -(x-4)^2+6 & (4\le x\le6)\end{cases}$이므로

$f(17)=f(11)=f(5)=-1+6=5$ 20 %

답 5