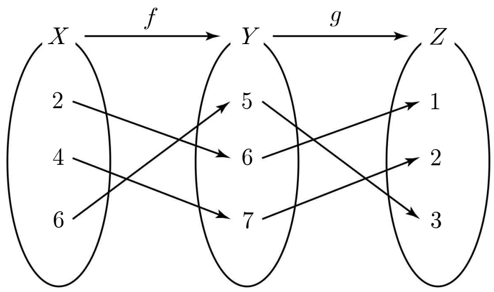
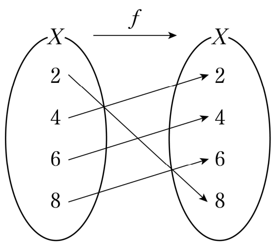
1. 1.그림은 두 함수 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$를 나타낸 것이다.



$g^{-1}(3)+(g \circ f)(4)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

2. 2.그림은 함수 $f: X \rightarrow X$를 나타낸 것이다.



$f(6)+f^{-1}(8)$의 값은? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

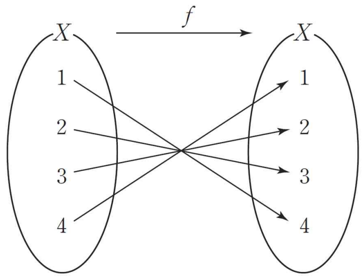
3. 3.함수 $f(x)=2x-1$에 대하여 $(f \circ f)(5)$의 값은? [3점]

① 11 ② 13 ③ 15
④ 17 ⑤ 19

4. 4.함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $2g(5)=4$이다. $f(2)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

5. 5.그림은 함수 $f: X \rightarrow X$를 나타낸 것이다.



$f^{-1}(3)+(f \circ f)(1)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

6. 6.집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 함수 $f: X \rightarrow X$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) f는 일대일 대응이다.
(나) $f(1)=3$, $f^{-1}(1)=5$, $f^{-1}(5)=2$
(다) $f(a)=a$인 a $(a \in X)$가 존재한다.

$f^{-1}(2)-f^{-1}(4)$의 값은? [3점]

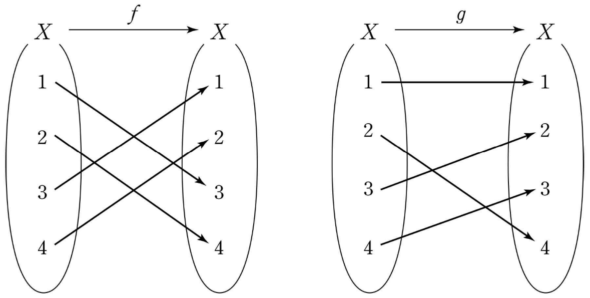
① -2 ② -1 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

7. 7.함수 $f(x)=2x+10$에 대하여 $f^{-1}(100)$의 값을 구하시오. [3점]

8. 8.정의역이 $\{1,\ 2\}$인 두 함수 $f(x)=x^2$, $g(x)=ax+b$에 대하여 $f=g$일 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

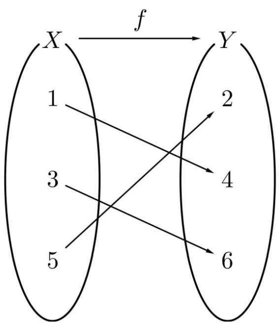
① -6 ② -5 ③ -4
④ -3 ⑤ -2

9. 9.그림은 두 함수 $f : X \to X$, $g : X \to X$를 나타낸 것이다. $(f \circ g)(2)-(g \circ f)(2)$의 값은? [3점]



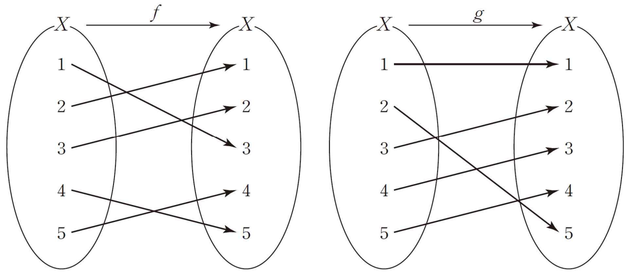
① -2　　② -1　　③ 0
④ 1　　⑤ 2

10. 10.그림은 함수 $f : X \to Y$를 나타낸 것이다. 함수 $g : Y \to X$에 대하여 함수 $g \circ f : X \to X$가 항등함수일 때, $g(6)+(f \circ g)(4)$의 값은? [3점]



① 4　② 5　③ 6
④ 7　⑤ 8

11. 그림은 두 함수 $f : X \to X$, $g : X \to X$를 나타낸 것이다.



$(f \circ g)(1)=(g \circ f)(a)$를 만족시키는 a의 값은? [3점]
① 1　　② 2　　③ 3
④ 4　　⑤ 5

12. 12.함수 $f(x)=-\sqrt{10-x}-3$에 대하여 $(f \circ f)(1)$의 값은? [3점]
① -1　　② -3　　③ -5
④ -7　　⑤ -9

13. 13.함수 $f(x)$가

$$f(3x-2)=2x^2+3$$

을 만족시킬 때, $f(1)+f(4)$의 값은? [3점]
① 12　　② 13　　③ 14
④ 15　　⑤ 16

14. 14.함수 $f(x)=3x+2$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(x) \geq 10$을 만족시키는 실수 x의 최솟값을 구하시오. [3점]

15. 15. $x \ge 5$에서 정의된 함수 $f(x)=x^2-10x+30$에 대하여 $f^{-1}(14)$의 값을 구하시오. [3점]

16. 실수 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로의 일대일 대응 $f(x)$가 있다. 함수 $f(2x+1)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. $f(5)=6$, $g(5)=-3$일 때, $g(6)=a$이고 $f(b)=5$이다. $a+b$의 값은? [3점]

① -3 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 3

17. 두 함수 $f(x)=ax+4a+1$, $g(x)=\frac{1}{2}x-a$가 있다. 함수 $y=(f \circ g^{-1})(x)$의 그래프의 y절편의 최솟값은? (단, a는 실수이다.) [3점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

18. 18. 두 함수

$$f(x)=x+a,\ g(x)=\begin{cases} 2x-6 & (x<a) \\ x^2 & (x \ge a) \end{cases}$$

에 대하여 $(g \circ f)(1)+(f \circ g)(4)=57$을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합을 S라 할 때, $10S^2$의 값을 구하시오. [4점]

19. 19. 일대일 대응인 두 함수 f, g가 모든 실수 x에 대하여

$$(g^{-1} \circ f)(x)=\frac{1}{2}x-7$$

을 만족시킨다. 방정식 $f\left(\frac{x}{2}\right)=g(2x)$의 해는? [4점]

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

20. 20. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에서 양의 실수 전체의 집합으로의 함수 f가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(4)=9$
(나) $f(x+1)=\lvert 1-2f(x)\rvert$ (단, $x=1,\ 2,\ 3$)

$f(1)$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

21. 21. 집합 $X=\{x \mid -1 \le x \le 1,\ x$는 실수$\}$에 대하여 함수 $f: X \to X$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=ax^2+bx+c$ (단, $a>0$)
(나) $f(x)$의 역함수가 존재한다.
(다) $f^{-1}(1)<f^{-1}(0)$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $b=-1$

ㄴ. $0<a \le \frac{1}{2}$

ㄷ. $(f \circ f)(k)=f(k)$를 만족시키는 실수 k $(-1 \le k \le 1)$는 오직 한 개 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

22. 22.집합 $X=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수는? [4점]

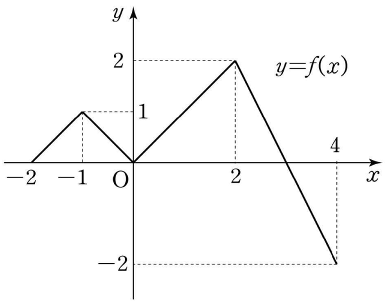
(가) f의 역함수가 존재한다. (나) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $xf(x)$의 값은 짝수이다.

① 18　② 24　③ 30
④ 36　⑤ 42

23. 23.$-2 \le x \le 4$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & (-2 \le x < -1) \\ |x| & (-1 \le x < 2) \\ -2x+6 & (2 \le x \le 4) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



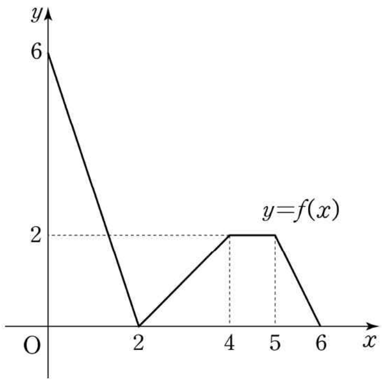
$-2 \le x \le 4$에서 방정식 $(f \circ f)(x)=1$을 만족시키는 실수 x의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}$　② 2　③ $\frac{5}{2}$
④ 3　⑤ $\frac{7}{2}$

24. 24.집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) f는 일대일 대응이다. (나) $f^{-1}(5)=2$ (다) $f(f(3))=1$

25. 그림과 같이 집합 $X=\{x|0 \le x \le 6\}$에서 X로의 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(0,\ 6)$, $(2,\ 0)$, $(4,\ 2)$, $(5,\ 2)$, $(6,\ 0)$을 이 순서대로 선분으로 연결한 것과 같다.



$0 \le k \le 7$인 실수 k에 대하여 집합 S를

$$S=\{x|f(x)+(f \circ f)(x)=k\}$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>
ㄱ. $0 \le k < 2$이면 $S=\varnothing$이다. ㄴ. $n(S)=2$가 되도록 하는 k의 값이 존재한다. ㄷ. $1 \in S$이면 집합 S의 모든 원소의 합은 $\frac{67}{6}$이다.

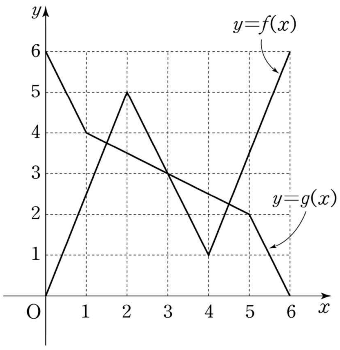
① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

26. 26.실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=a|x-1|+3x-5$$

가 역함수를 가지도록 하는 실수 a의 값의 범위는 $\alpha < a < \beta$이다. $\beta-\alpha$의 최댓값을 구하시오. [4점]

27. 그림과 같이 닫힌 구간 $[0,\ 6]$에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $f(x)$의 그래프는 점 $(0,\ 0)$, $(2,\ 5)$, $(4,\ 1)$, $(6,\ 6)$을 이 순서대로 선분으로 연결한 것과 같고, 함수 $g(x)$의 그래프는 점 $(0,\ 6)$, $(1,\ 4)$, $(5,\ 2)$, $(6,\ 0)$을 이 순서대로 선분으로 연결한 것과 같다.



방정식 $f(x)+g^{-1}(x)=5$의 서로 다른 실근의 개수는? [4점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

28. 28.최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$g(x)=\{-x+4$

함수 $g(x)$의 치역이 실수 전체의 집합이고, 함수 $g(x)$의 역함수가 존재할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(-2)+f(1)=3$

ㄴ. $g(0)=-1$, $g(1)=-3$이면 곡선 $y=f(x)$의 꼭짓점의 x좌표는 $\frac{5}{2}$이다.

ㄷ. 곡선 $y=f(x)$의 꼭짓점의 x좌표가 -2이면 $g^{-1}(1)=0$이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

29. 29.실수 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로의 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 임의의 두 실수 a, b에 대하여
> $$a+f(b)\times f(b)=4b+f\left(f(a)+b^2\right)$$
> 이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

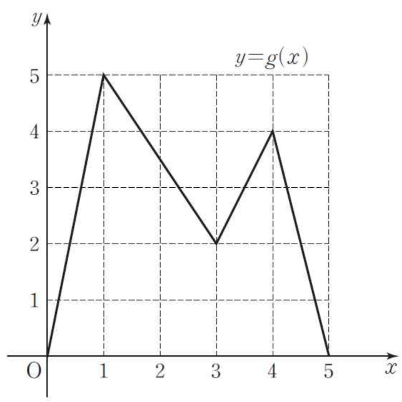
ㄱ. $f(0)\times f(0)=f(f(0))$

ㄴ. 함수 $f(x)$는 일대일함수이다.

ㄷ. 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다.

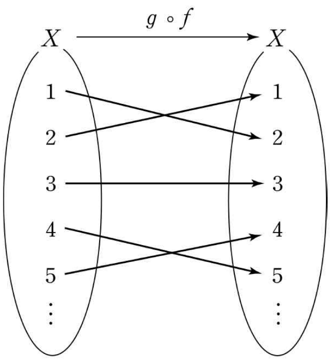
① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

30. 30.실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=x^2-6x+11$이 있다. 정의역이 $\{x|0\le x\le 5\}$인 함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같다.



함수 $(g\circ f)(x)$가 정의되는 정의역이 $\{x|\alpha\le x\le\beta\}$이다. $\beta-\alpha$의 값이 최대가 되도록 하는 정의역에서 함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프 위의 점들 중 x좌표 또는 y좌표가 정수인 점의 개수를 구하시오.
(단, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다섯 개의 점 $(0,\ 0)$, $(1,\ 5)$, $(3,\ 2)$, $(4,\ 4)$, $(5,\ 0)$을 순서대로 선분으로 연결한 것이다.) [4점]

31. 31.집합 $X=\{x|x$는 15 이하의 자연수$\}$와 두 일대일 대응 $f:X\to X$, $g:X\to X$에 대하여 그림은 함수 $g\circ f:X\to X$의 일부를 나타낸 것이다.



두 함수 f, g가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(2)=1$, $g(4)=2$이고 $f(4)+g(3)=6$이다.
(나) 10 이하의 모든 자연수 x에 대하여
$f(x+5)=f(x)+5$이다.
(다) 15 이하의 모든 자연수 x에 대하여
$g(16-x)=16-g(x)$이다.

$(g\circ f)(10)+(g\circ f)(12)+(g\circ f)^{-1}(12)$의 값은? [4점]

① 33 ② 34 ③ 35
④ 36 ⑤ 37

32. 함수 $f(x)=x^3-x^2$이 있다. 양의 실수 t에 대하여 원점을 지나고 곡선 $y=f(x)+t$와 접하는 직선의 기울기를 $g(t)$라 하고, 접점의 x좌표를 $h(t)$라 하자. 두 일대일 대응 $g(t)$, $h(t)$에 대하여 $g^{-1}(8)+h^{-1}(3)$의 값은? [4점]

① 55 ② 57 ③ 61
④ 63 ⑤ 65

33. t가 -1이 아닌 실수일 때, 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2\ (x<t) \\ -2\ (x\ge t)\end{cases},\quad g(x)=|x-1|+|x-t|$$

가 있다. 함수 $(g\circ f)(x)$의 치역의 두 원소 중 큰 수를 $M(t)$, 작은 수를 $m(t)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $M(0)-m(0)=2$
ㄴ. 모든 양의 실수 t에 대하여 $M(t-1)=M(-t-1)$이다.
ㄷ. t에 대한 방정식 $m(t)=a$ (a는 상수)가 서로 다른 세 실근을 가질 때, 이 세 실근의 합은 3이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

34. 34.집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에서 집합 $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$으로의 두 함수 f, g가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 f는 일대일함수이고 함수 g의 치역의 모든 원소의 합은 10이다.
(나) $\dfrac{6}{f(2)}\in A$이고 $f(2)f(4)=6$이다.
(다) $x\in A$인 모든 x에 대하여

$$f(g(x))=\begin{cases}\dfrac{x+3}{2}\ (x\text{는 홀수})\\ \dfrac{x+4}{2}\ (x\text{는 짝수})\end{cases}$$

이다.

$g(1)<g(2)$일 때, $g(2)+f(3)+f(4)$의 최댓값은? [4점]

① 13 ② 14 ③ 15
④ 16 ⑤ 17

정답 및 해설

1. 정답 ②

[출제의도] 합성함수와 역함수 이해하기

$g(5)=3$이므로 $g^{-1}(3)=5$

$(g\circ f)(4)=g(f(4))=g(7)=2$

$g^{-1}(3)+(g\circ f)(4)=7$

2. 정답 ①

[출제의도] 함숫값과 역함수의 함숫값을 구한다.

$f(6)=4$

$f(2)=8$에서

$f^{-1}(8)=2$

따라서 $f(6)+f^{-1}(8)=4+2=6$

3. 정답 ④

[출제의도] 합성함수의 뜻을 이해한다.

$f(x)=2x-1$에서

$f(5)=2\times5-1=9$

이므로

$(f\circ f)(5)=f(f(5))=f(9)$

$\qquad\qquad=2\times9-1=17$

[다른 풀이]

$(f\circ f)(x)=f(f(x))$

$\qquad\qquad=f(2x-1)$

$\qquad\qquad=2(2x-1)-1$

$\qquad\qquad=4x-3$

이므로

$(f\circ f)(5)=4\times5-3=17$

4. 정답 ⑤

[출제의도] 역함수의 정의를 이용하여 주어진 함숫값을 구한다.

$2g(5)=4$에서 $g(5)=2$

따라서 역함수의 정의로부터 $f(2)=5$이다.

5. 정답 ③

$f(2)=3$이므로 $f^{-1}(3)=2$

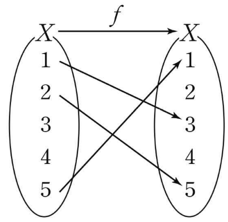
$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(4)=1$

$\therefore f^{-1}(3)+(f\circ f)(1)=2+1=3$

6. 정답 ②

[출제의도] 역함수의 정의를 이해한다.

조건 (나)에서 $f(1)=3$, $f(5)=1$, $f(2)=5$



조건 (다)에서 $f(a)=a$를 만족시킬 수 있는 a의 값은 4뿐이다.

즉, $f(4)=4$이다.

이때 조건 (가)에서 함수 f는 일대일 대응이므로 $f(3)=2$

$\therefore f^{-1}(2)-f^{-1}(4)=3-4=-1$

7. 정답 45

이해력 - 함수

$f^{-1}(100)=a$라 하면 $f(a)=100$이므로

$2a+10=100$

$\therefore a=45$

8. 정답 ①

$f(1)=g(1)$에서 $1=a+b$ ⋯ ㉠

$f(2)=g(2)$에서 $4=2a+b$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=3$, $b=-2$이므로 $ab=-6$

9. 정답 ②

이해력 - 함수

$g(2)=4$, $f(4)=2$이므로

$(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(4)=2$

$f(2)=4$, $g(4)=3$이므로

$(g\circ f)(2)=g(f(2))=f(4)=3$

$(f\circ g)(2)-(g\circ f)(2)=2-3=-1$

10. 정답 ④

g는 f의 역함수이므로 $g(6)+(f\circ g)(4)=3+4=7$

11. 정답 ⑤

$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(1)=3$이고, $g(4)=3$이므로

$(g\circ f)(a)=g(f(a))=3$에서 $f(a)=4$ $\quad\therefore a=5$

12. 정답 ④

[출제의도] 합성함수의 값을 구할 수 있다.

$f(x)=-\sqrt{10-x}-3$에서

$f(1)=-\sqrt{10-1}-3=-3-3=-6$

$f(-6)=-\sqrt{10-(-6)}-3=-4-3=-7$

$\therefore (f\circ f)(1)=f(f(1))=f(-6)=-7$

13. 정답 ⑤

$3x-2=1$에서 $x=1$이므로

$f(3x-2)=2x^2+3$에 $x=1$을 대입하면

$f(3\times1-2)=2\times1^2+3=5$
또, $3x-2=4$에서 $x=2$이므로
$f(3\times2-2)=2\times2^2+3=11$
$\therefore f(1)+f(4)=5+11=16$

14. 정답 32
이해 능력-함수
$y=3x+2$에서 $x=\dfrac{y-2}{3}$이므로 $g(x)=\dfrac{x-2}{3}$
이때 $\dfrac{x-2}{3}\ge10$에서 $x\ge32$이므로
부등식 $g(x)\ge10$을 만족시키는 실수 x의 최솟값은 32이다.

15. 정답 8
$f^{-1}(14)=a$라 하면 $f(a)=14$ $(a\ge5)$이어야 하므로
$f(a)=a^2-10a+30=14$
$a^2-10a+16=(a-2)(a-8)=0$
$\therefore a=8$ $(\because a\ge5)$

16. 정답 ①
이해력 - 함수 [3점]
$h(x)=f(2x+1)$이라 하자.
$f(5)=f(2\times2+1)=6$
에서 $h(2)=6$이므로
$g(6)=2$
$\therefore a=2$
$g(5)=-3$에서 $h(-3)=5$이므로
$f(2\times(-3)+1)=f(-5)=5$
$\therefore b=-5$
$\therefore a+b=2+(-5)=-3$

같은 내용 다른 유형 문항

함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$에 대하여 $g(1)=2$이다. 함수 $f(2x-3)$의 역함수를 $h(x)$라 할 때, $h(1)$의 값은?

① $\dfrac{5}{2}$ ② 2 ③ $\dfrac{3}{2}$ ④ 1 ⑤ $\dfrac{1}{2}$

함수 $f(x)$의 역함수는 $g(x)$이므로
$g(1)=2$에서
$f(2)=1$ ……㉠
함수 $f(2x-3)$의 역함수는 $h(x)$이므로
$h(f(2x-3))=x$ $(\because f^{-1}(f(x))=x)$
이 때 $f(2x-3)=1$이 되는 x의 값을 구하면
$2x-3=2$에서 $x=\dfrac{5}{2}$이므로
$h\left(f\left(2\times\dfrac{5}{2}-3\right)\right)=\dfrac{5}{2}$, $h(f(2))=\dfrac{5}{2}$
$\therefore h(1)=\dfrac{5}{2}$ $(\because$㉠$)$

정답 ①

17. 정답 ②
함수 $g(x)$의 역함수를 구해보자.
$y=\dfrac{1}{2}x-a$에서 x, y를 서로 바꾸면
$x=\dfrac{1}{2}y-a$이므로 $y=2x+2a$
$g^{-1}(x)=2x+2a$이므로
$(f\circ g^{-1})(x)=f(g^{-1}(x))=a(2x+2a)+4a+1$
$=2ax+2a^2+4a+1$
따라서 직선 $y=(f\circ g^{-1})(x)$의 y절편은
$2a^2+4a+1=2(a+1)^2-1$이므로
y절편은 $a=-1$일 때 최솟값 -1을 갖는다.

18. 정답 40
[출제의도] 함수의 성질을 이용하여 추론하기
$(g\circ f)(1)=g(a+1)=(a+1)^2$
$a\le4$일 때
$(f\circ g)(4)=f(16)=a+16$
$(g\circ f)(1)+(f\circ g)(4)=a^2+3a+17=57$
$a^2+3a-40=(a-5)(a+8)=0$
$a=-8$
$a>4$일 때
$(f\circ g)(4)=f(2)=a+2$
$(g\circ f)(1)+(f\circ g)(4)=a^2+3a+3=57$
$a^2+3a-54=(a-6)(a+9)=0$
$a=6$
$S=-8+6=-2$
따라서 $10S^2=40$

19. 정답 ①
이해력 - 함수
[해설]
$(g^{-1}\circ f)(x)=\dfrac{1}{2}x-7$에서
$g\circ(g^{-1}\circ f)=(g\circ g^{-1})\circ f=f$이므로
$f(x)=g\left(\dfrac{1}{2}x-7\right)$
$\therefore f\left(\dfrac{x}{2}\right)=g\left(\dfrac{1}{4}x-7\right)$
$f\left(\dfrac{x}{2}\right)=g(2x)$에서 $g\left(\dfrac{1}{4}x-7\right)=g(2x)$
함수 g가 일대일 대응이므로
$\dfrac{1}{4}x-7=2x$
$\therefore x=-4$

20. 정답 ②

조건 (나)에서 $x=3$일 때

$f(4)=|1-2f(3)|=9$에서 $f(3)=-4$ 또는 $f(3)=5$

$f(3)>0$이므로 $f(3)=5$

$x=2$일 때

$f(3)=|1-2f(2)|=5$에서 $f(2)=-2$ 또는 $f(2)=3$

$f(2)>0$이므로 $f(2)=3$

$x=1$일 때

$f(2)=|1-2f(1)|=3$에서 $f(1)=-1$ 또는 $f(1)=2$

$f(1)>0$이므로 $f(1)=2$

$\therefore f(1)=2$

21. 정답 ⑤

ㄱ. $f(x)$의 역함수가 존재하므로

일대일 대응이다.

$f^{-1}(0)=p$,

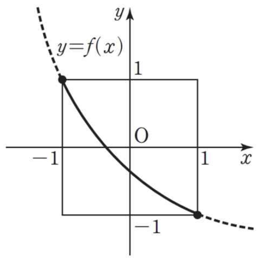
$f^{-1}(1)=q$ 라 하면

$f(p)=0$, $f(q)=1$이고, 조건 (다)에서

$p>q$이므로 $f(x)$는 감소함수이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는

그림과 같다. $f(1)=-1$이므로 $a+b+c=-1 \cdots$ ㉠



$f(-1)=1$이므로 $a-b+c=1 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $b=-1$, $c=-a$ $\therefore$ 참

ㄴ. 꼭짓점의 x좌표는 $-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{1}{2a}$이고 함수 $y=f(x)$의

그래프에서 꼭짓점의 x좌표가 1이상이므로

$$\frac{1}{2a}\geq 1$$

$$\therefore 0<a\leq\frac{1}{2} \qquad \therefore \text{참}$$

ㄷ. $f(k)=l(l\neq k)$이라 하면 $(f\circ f)(k)=f(k)$에서

$f(l)=l$이므로 일대일 대응에 모순이다.

$$\therefore f(k)=k$$

따라서 $-1\leq x\leq 1$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의

교점은 오직 한 개만 존재한다. $\therefore$ 참

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

22. 정답 ④

이해 능력-함수

(가)에서 함수 f는 일대일 대응이고,

(나)에서 x가 홀수이면 $f(x)$는 짝수이어야 한다.

따라서 $f(3)$의 값은 2, 4, 6 중 하나이어야 하고,

$f(5)$의 값은 $f(3)$의 값을 제외한 나머지 두 개의 짝수 중

하나이어야 한다.

또, 2, 4, 6은 $f(3)$과 $f(5)$의 값을 제외한 나머지 세 개의 원소에

각각 하나씩 대응해야 한다.

따라서 구하는 함수의 개수는

$3\times2\times3\times2\times1=36$

23. 정답 ③

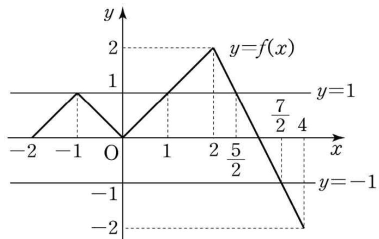
이해력 - 함수

$f(x)=t$라 하면

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(t)=1$

다음 그림에서 방정식 $f(t)=1$을 만족시키는 실수 t의 값은 -1

또는 1 또는 $\dfrac{5}{2}$이다.



방정식 $(f\circ f)(x)=1$을 만족시키는 실수 x의 값은

$f(x)=-1$에서 $x=\dfrac{7}{2}$

$f(x)=1$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=\dfrac{5}{2}$

$f(x)=\dfrac{5}{2}$를 만족시키는 실수 x의 값은 존재하지 않는다.

따라서 $M=\dfrac{7}{2}$, $m=-1$이므로

$M+m=\dfrac{7}{2}+(-1)=\dfrac{5}{2}$

24. 정답 2

[출제의도] 조건을 만족시키는 함수의 개수를 구할 수 있다.

조건 (나)에서 $f^{-1}(5)=2$이므로 $f(2)=5$이고 조건 (다)에서

$f(f(3))=1$이므로

(i) $f(3)=1$이면

$f(f(3))=f(1)=1$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $f(3)=2$이면

$f(f(3))=f(2)=1$이므로 조건 (나)에 의하여 모순이다.

(iii) $f(3)=3$이면

$f(f(3))=f(3)=1$이므로 f는 함수가 아니다.

(iv) $f(3)=4$이면

$f(f(3))=f(4)=1$이므로 $\{1, 5\}$에서 $\{2, 3\}$으로의 일대일 대응 의 개수와 같으므로 $2\times1=2$

(i)~(iv)에서 구하는 함수 f의 개수는 2이다.

25. 정답 ⑤

[추론 능력(추측)-함수]

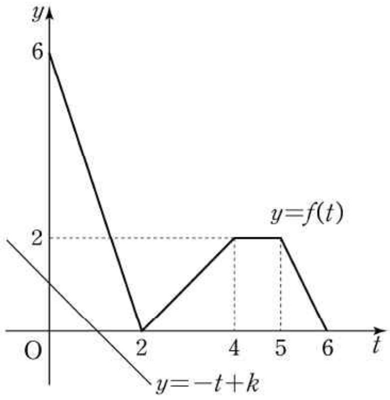
ㄱ. x에 대한 방정식 $f(x)+(f\circ f)(x)=k$에서 $f(x)=t$라 하면

$t+f(t)=k$, $f(t)=-t+k$이고, 방정식 $f(t)=-t+k$의 실근은

두 함수 $y=f(t)$, $y=-t+k$의 그래프의 교점의 t좌표와 같다.

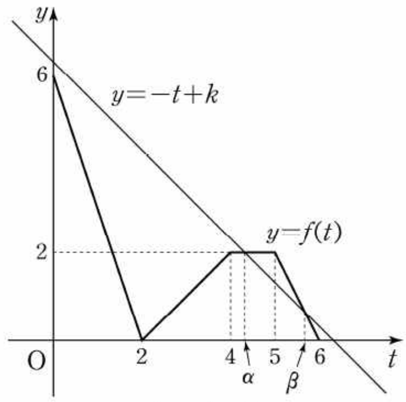
$0\leq k<2$이면 두 함수 $y=f(t)$, $y=-t+k$의 그래프의

교점은 [그림 1]과 같이 존재하지 않으므로 $S=\varnothing$이다. (참)



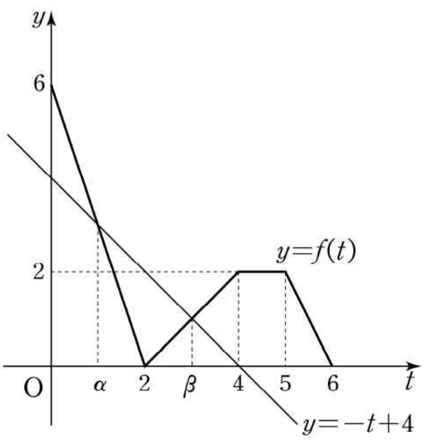
[그림 1]

ㄴ. $6<k<7$일 때, 두 함수 $y=f(t)$, $y=-t+k$의 그래프의 교점의 t좌표를 α, β라 하면 [그림 2]에서 $4<\alpha<5<\beta<6$
$f(x)=t$에서 $f(x)=\alpha$, $f(x)=\beta$는 각각 하나의 실근을 가지므로 $n(S)=2$이다. (참)



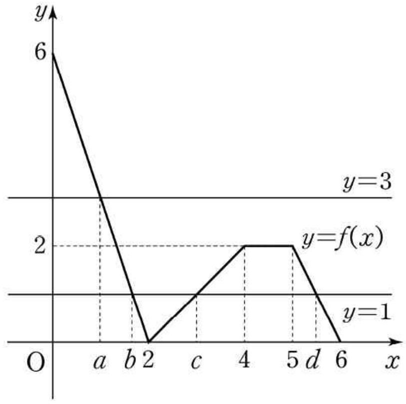
[그림 2]

ㄷ. $1\in S$이므로 $f(1)+(f\circ f)(1)=k$
$\therefore k=f(1)+f(f(1))=3+f(3)=3+f(3)=3+1=4$
$f(t)=-t+4$에서 방정식 $f(t)=-t+4$의 그래프의 교점의 t좌표와 같다.
두 함수 $y=f(t)$, $y=-t+4$의 그래프의 교점의 t좌표를 α, β라 하면 [그림 3]에서 $\alpha=1$, $\beta=3$



[그림 3]

$f(x)=t$에서 $f(x)=1$, $f(x)=3$
[그림 4]와 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=3$의 교점의 x좌표를 a라 하고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 x좌표를 b, c, d라 하면



[그림 4]

$(2,\ 0)$, $(0,\ 6)$을 지나는 직선의 방정식은 $y=-3x+6$이므로
$-3a+6=3$에서 $a=1$

$$-3b+6=1\text{에서 } b=\frac{5}{3}$$

$(2,\ 0)$, $(4,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은 $y=x-2$이므로
$c-2=1$에서 $c=3$
$(5,\ 2)$, $(6,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은 $y=-2x+12$이므로
$-2d+12=1$에서 $d=\dfrac{11}{2}$

따라서 $S=\left\{1,\ \dfrac{5}{3},\ 3,\ \dfrac{11}{2}\right\}$이므로 집합 S의 모든 원소의 합은 $1+\dfrac{5}{3}+3+\dfrac{11}{2}=\dfrac{67}{6}$이다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

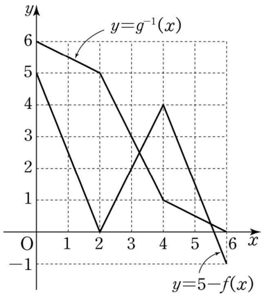
26. **정답** 6

$$f(x)=\begin{cases}(a+3)x-5-a & (x\geq 1)\\(-a+3)x-5+a & (x<1)\end{cases}$$

함수 $y=f(x)$가 역함수를 가지려면 일대일대응이어야 하므로 두 구간에서 직선의 기울기의 부호가 같아야 한다.
$(a+3)(-a+3)>0$, $(a+3)(a-3)<0$
$\therefore\ -3<a<3$
따라서 $f(x)$가 역함수를 가지도록 하는 실수 a의 값의 범위가 $\alpha<a<\beta$일 때, $\beta-\alpha$의 최댓값은 6

27. **정답** ②

$f(x)+g^{-1}(x)=5$에서 $g^{-1}(x)=5-f(x)$이므로
방정식 $g^{-1}(x)=5-f(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=g^{-1}(x)$, $y=5-f(x)$의 그래프의 교점의 개수와 같다.
함수 $y=g^{-1}(x)$의 그래프는 함수 $y=g(x)$의 그래프를 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것이므로 점 $(0,\ 6)$, $(2,\ 5)$, $(4,\ 1)$, $(6,\ 0)$을 이 순서대로 선분으로 연결한 것과 같고, 함수 $y=5-f(x)$ 의 그래프는 $(0,\ 5)$, $(2,\ 0)$, $(4,\ 4)$, $(6,\ -1)$을 이 순서대로 선분으로 연결한 것과 같으므로 두 함수 $y=g^{-1}(x)$, $y=5-f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



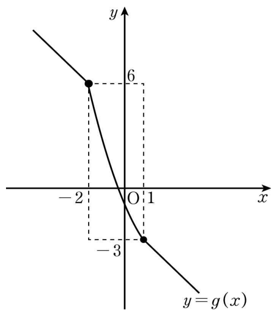
두 함수 $y=g^{-1}(x)$, $y=5-f(x)$의 그래프의 교점의 개수가 2이므로 방정식 $f(x)+g^{-1}(x)=5$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

28. **정답** ⑤

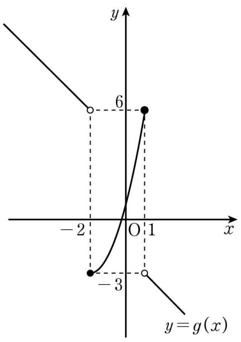
[출제의도] 일대일대응을 이해하여 명제의 참, 거짓을 추론한다.

ㄱ. 함수 $g(x)$의 정의역과 치역이 모두 실수 전체의 집합이고 함수 $g(x)$의 역함수가 존재하므로 함수 $g(x)$는 일대일대응이다. 따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같이 두 가지이다.

(ⅰ) $g(-2)=f(-2)=6$, $g(1)=f(1)=-3$일 때,



(ⅱ) $g(-2)=f(-2)=-3$, $g(1)=f(1)=6$일 때,



(ⅰ), (ⅱ)에서

$f(-2)+f(1)=3$ (참)

ㄴ. $g(0)=f(0)=-1$에서

$f(x)=ax^2+bx-1$(a는 양의 상수, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

$g(1)=f(1)=-3$이면 $f(-2)=6$이어야 하므로

$a+b-1=-3$, $4a-2b-1=6$

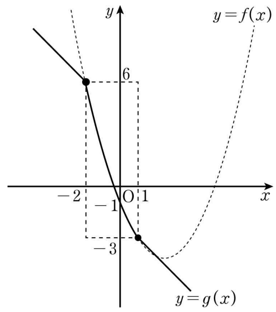
연립방정식 $\begin{cases} a+b=-2 \\ 4a-2b=7 \end{cases}$ 을 풀면

$a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{5}{2}$

따라서

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x-1$$
$$=\frac{1}{2}\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{33}{8}$$

이므로 곡선 $y=f(x)$의 꼭짓점의 x좌표는 $\frac{5}{2}$이다. (참)



ㄷ. 곡선 $y=f(x)$의 꼭짓점의 x좌표가 -2이므로

$f(x)=a(x+2)^2+p$(a는 양의 상수, p는 상수)

라 할 수 있다.

이때 함수 $g(x)$가 일대일대응이므로

$f(-2)=-3$, $f(1)=6$

이다.

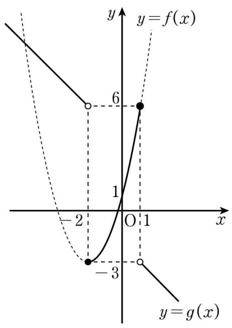
$p=-3$, $9a+p=6$

에서 $a=1$이므로

$f(x)=(x+2)^2-3$

따라서 $g(0)=f(0)=1$이므로

$g^{-1}(1)=0$ (참)



그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

29. **정답** ②

추론 능력(추측) - 함수

[해설]

ㄱ. $a+f(b)\times f(b)=4b+f(f(a)+b^2)$ ……㉠

㉠의 양변에 a대신에 0, b대신에 0을 대입하면

$0+f(0)\times f(0)=0+f(f(0)+0)$

$\therefore$ $f(0)\times f(0)=f(f(0))$ (참)

ㄴ. ㉠의 양변에 a대신에 x, b대신에 0을 대입하면

$x+f(0)\times f(0)=0+f(f(x)+0)$

$\therefore$ $f(f(x))=x+f(0)\times f(0)$ ……㉡

임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)=f(x_2)$이면

$f(f(x_1))=f(f(x_2))$이므로

㉡에서 $x_1+f(0)\times f(0)=x_2+f(0)\times f(0)$

$\therefore\ x_1 = x_2$

따라서 함수 $f(x)$는 일대일함수이다. (참)

ㄷ. ㉠의 양변에 a대신에 0, b대신에 x을 대입하면

$f(x)\times f(x) = 4x + f\left(f(0)+x^2\right)$ ……㉢

㉢의 양변에 x대신 $-x$를 대입하면

$f(-x)\times f(-x) = -4x + f\left(f(0)+x^2\right)$ ……㉣

㉢−㉣에서 모든 실수 x에 대하여

$f(x)\times f(x) - f(-x)\times f(-x) = 8x$ ……㉤

이때 모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = -f(x)$가 성립한다고 가정하면

$f(x)\times f(x) = f(-x)\times f(-x)$이므로

$f(x)\times f(x) - f(-x)\times f(-x) = 0$

이는 ㉤을 만족시키지 않으므로 모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = -f(x)$가 성립하지 않는다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

왜 틀렸을까

명제의 참, 거짓을 판단하는 문제는 기본 개념에 대한 이해부터 응용력과 추론력까지 묻는 유형으로 수능에서 매년 출제되고 있다. 함수의 정의와 일대일함수에 대한 개념을 생각하면서 쉬운 수준의 명제부터 시작하여 어려운 수준의 명제를 차례대로 해결한다. 어려운 수준의 명제를 해결할 때는 낮은 수준의 명제로부터 힌트나 연관성을 찾아보고, 직접 증명이 어려운 경우는 반례를 찾아보도록 한다. 일대일 함수, 일대일 대응, 합성함수와 역함수의 정의와 성질을 활용하는문제 등이 자주 출제되므로 관련 내용을 확실하게 정리해야 한다.

같은 내용 다른 유형 문항

정의역이 실수 전체의 집합인 함수 $f(x)$가 임의의 두 실수 a, b에 대하여 등식

$f(a+b) + f(a-b) = 2f(a) + 2f(b)$

를 만족시킨다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단 $f(x)$는 상수함수가 아니다.)

[보 기]

ㄱ. $f(0) = 0$

ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = f(x)$이다.

ㄷ. $f(1) = 2$이면 $f(2^n) = 2^{2n+1}$이다. (단, $n = 1, 2, 3, \cdots$)

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. 주어진 식의 양변에 $a = b = 0$을 대입하면

$f(0) + f(0) = 2f(0) + 2f(0)$

$2f(0) = 0$

$\therefore\ f(0) = 0$ (참)

ㄴ. 주어진 식의 양변에 $a = 0$을 대입하면

$f(b) + f(-b) = 2f(0) + 2f(b)$

$f(-b) = f(b)$ ($\because$ ㄱ)

$\therefore\ f(-x) = f(x)$ (참)

ㄷ. 주어진 식의 양변에 $b = a$을 대입하면

$f(2a) + f(0) = 2f(a) + 2f(a)$

$f(2a) = 4f(a)$ ($\because$ ㄱ)

$\therefore\ f(2^n) = f(2\times 2^{n-1})$

$= 4f(2^{n-1})$

$= 4f(2\times 2^{n-2})$

$= 4^2 f(2^{n-2})$

$\vdots$

$= 4^{n-1} f(2\times 1)$

$= 4^n f(1)$

$= 4^n \times 2$ ($\because f(1) = 2$)

$= 2^{2n+1}$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

정답 ⑤

30. **정답** 17

$f(x) = x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 + 2$

함수 $(g\circ f)(x)$가 정의되기 위해서는 함수 $f(x)$의 치역이 함수 $g(x)$의 정의역에 포함되어야 한다.

이때 함수 $g(x)$의 정의역은 $\{x | 0 \le x \le 5\}$이므로

$0 \le (x-3)^3 + 2 \le 5$에서 $3-\sqrt{3} \le x \le 3+\sqrt{3}$

따라서 $\beta-\alpha$의 값이 최대가 되도록 하는 함수 $(g\circ f)(x)$의 정의역은 $\{x | 3-\sqrt{3} \le x \le 3+\sqrt{3}\}$이다.

한편, 함수 $y = (g\circ f)(x)$의 그래프 위의 점의 x좌표 또는 y좌표가 정수인 점을 각 경우로 나누면 다음과 같다.

(i) x좌표가 정수인 점

x의 값의 범위가 $3-\sqrt{3} \le x \le 3+\sqrt{3}$이므로 조건을 만족시키는 정수 x이 값은 2, 3, 4의 3개이고

$(g\circ f)(2) = g(3) = 2$

$(g\circ f)(3) = g(2) = 3.5$

$(g\circ f)(4) = g(3) = 2$

(ii) y좌표가 정수인 점

$(g\circ f)(x)$의 함숫값이 정수이므로 조건을 만족시키는 함숫값은 0, 1, 2, 3, 4, 5이다.

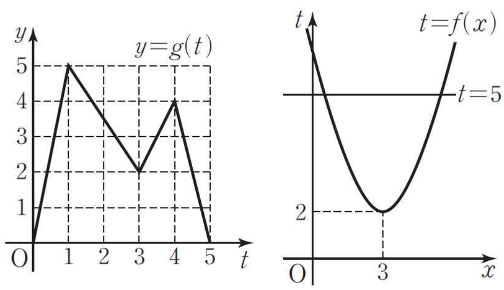
$f(x) = t$로 놓으면 $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(t)$

① $g(f(x)) = 0$인 경우

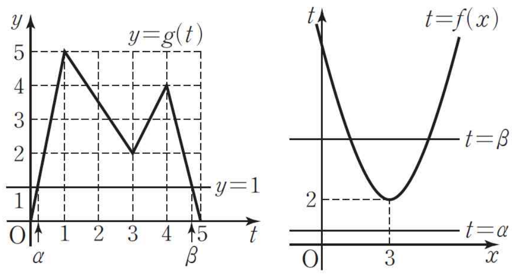
$g(t) = 0$을 만족시키는 t의 값은 0 또는 5이다.

이때 $f(x) \ge 2$이므로 $f(x) = 5$

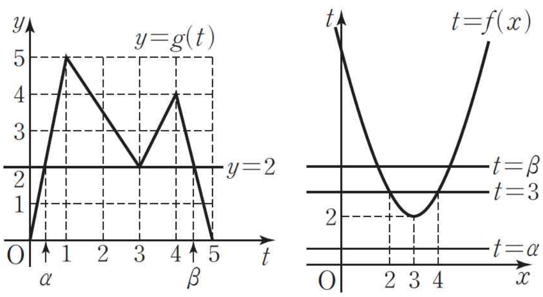
따라서 조건을 만족시키는 x의 값의 개수는 2이다.



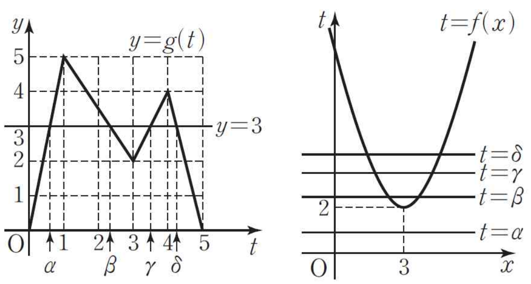
② $g(f(x))=1$인 경우
$g(t)=1$을 만족시키는 t의 값을 $\alpha(0<\alpha<1)$, $\beta(4<\beta<5)$라 하면 다음 그림과 같이 $f(x)=\alpha$, $f(x)=\beta$를 만족시키는 서로 다른 x의 값의 개수는 2이다.



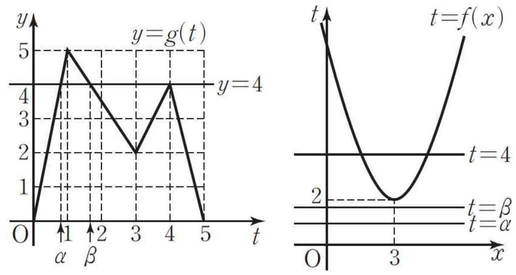
③ $g(f(x))=2$인 경우
$g(t)=2$를 만족시키는 t의 값을 $\alpha(0<\alpha<1)$, 3, $\beta(4<\beta<5)$라 하면 다음 그림과 같이 $f(x)=\alpha$, $f(x)=3$, $f(x)=\beta$를 만족시키는 서로 다른 x의 값의 개수는 4이다.
이때 $f(2)=3$, $f(4)=3$이므로 함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 두 점 $(2,\ 2)$, $(4,\ 2)$를 포함한다.



④ $g(f(x))=3$인 경우
$g(t)=3$을 만족시키는 t의 값을
$\alpha(0<\alpha<1)$, $\beta(2<\beta<3)$, $\gamma(3<\gamma<4)$,
$\delta(4<\delta<5)$
라 하면 다음 그림과 같이 $f(x)=\alpha$, $f(x)=\beta$, $f(x)=\gamma$, $f(x)=\delta$를 만족시키는 서로 다른 x이 값의 개수는 6이다.

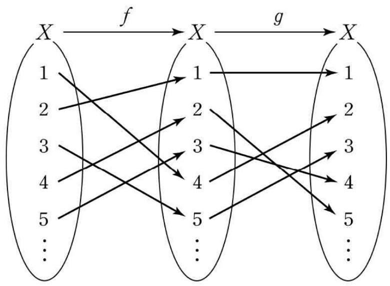


⑤ $g(f(x))=4$인 경우
$g(t)=4$를 만족시키는 t의 값을 $\alpha(0<\alpha<1)$, $\beta(1<\beta<2)$, 4라 하면 다음 그림과 같이 $f(x)=\alpha$, $f(x)=\beta$, $f(x)=4$를 만족시키는 서로 다른 x의 값의 개수는 2이다.



⑥ $g(f(x))=5$인 경우
$g(t)=5$를 만족시키는 t의 값은 1이고 다음 그림과 같이 $f(x)=1$을 만족시키는 서로 다른 x의 값의 개수는 0이다.
①~⑥에서 y좌표가 정수인 점의 개수는
$2+2+4+6+2+0=16$
한편, (ⅰ)과 (ⅱ)의 ③에서 $(g\circ f)(3)=2$, $(g\circ f)(4)=2$이므로 x좌표 또는 y좌표가 정수인 점의 개수는 $3+16-2=17$

31. **정답** ④
추론 능력(추측) – 함수
주어진 그림에서 $(g\circ f)(2)=1$이고 조건 (가)에서
$f(2)=1$이므로
$(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(1)=1$
조건 (가)에서 $g(4)=2$이고 함수 g는 일대일대응 이므로
$g(x)=2$를 만족시키는 x는 4뿐이다.
이때 주어진 그림에서 $(g\circ f)(1)=g(f(1))=2$이므로
$f(1)=4$
이사에서 $f(2)=1$, $f(1)=4$, $g(1)=1$, $g(4)=2$이다.
이때 두 함수 f, g는 일대일 대응이므로 $f(4)\neq 1$, $f(4)=\neq 4$, $g(3)\neq 1$, $g(3)\neq 2$이다. 따라서 $f(4)+g(3)=6$을 만족시키는 경우는 다음과 같다.
(ⅰ) $f(4)=g(3)=3$일 때
$(g\circ f)(4)=g(f(4))=g(3)=3$이고 주어진 그림에서
$(g\circ f)(4)=5$이므로 모순이다.
(ⅱ) $f(4)=2$, $g(3)=4$일 때
$(g\circ f)(4)=g(f(4))=g(2)=5$이므로
$g(2)=5$
$(g\circ f)(5)=g(f(5))=4$이고 $g(3)=4$이므로 $f(5)=3$
한편, 주어진 그림에서
$(g\circ f)(3)=g(f(3))=3$
이때 $f(3)\geq 6$이면 조건 (나)에 의해
$f(13)=f(8)+5=f(3)+10\geq 16$
이므로 모순이다.
따라서 $f(3)\leq 5$이고 함수 f는 일대일 대응이므로
$f(3)=5$, $g(5)=3$



따라서 조건 (나)에서

$f(10)=f(5)+5=3+5=8$

이고, 조건 (다)에서

$g(8)=g(16-8)=16-g(8)$, 즉 $g(8)=8$

이므로

$(g\circ f)(10)=g(f(10))=g(8)=8$ …… ㉠

또, 조건 (나)에서

$f(12)=f(7)+5=f(2)+10=11$

이고, 조건 (다)에서

$g(11)=g(16-5)=16-g(5)=16-3=13$ 이므로

$(g\circ f)(12)=g(f(12))=g(11)=13$ …… ㉡

한편, $(g\circ f)^{-1}(12)=f^{-1}(g^{-1}(12))$이다.

$g^{-1}(12)=a$라 하면 $g(a)=12=16-4$이고, $g(3)=4$이므로

$g(16-3)=16-g(3)$에서 $a=13$

이때 $f^{-1}(13)=b$라 하면

$13=f(b)=f(b-5)+5=f(b-10)+10$이고,

$f(b-10)=3$이므로 $b-10=5$에서

$b=15$

$\therefore (g\circ f)^{-1}(12)=f^{-1}(g^{-1}(12))=f^{-1}(13)=15$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$(g\circ f)(10)+(g\circ f)(12)+(g\circ f)^{-1}(12)$

$=8+13+15=36$

왜 틀렸을까

주어진 조건을 해석하고 일대일 대응, 합성함수, 역함수의 개념을 이용해야 하는 함수 단원의 고난도 문항이다. 우선 주어진 그림과 조건 (가)를 이용하여 정의역과 공역의 원소 1, 2, 3, 4, 5에 대한 함수 f와 g의 대응관계를 파악해야 한다. 또한 조건 (나), 조건(다)와 앞서 파악한 대응관계를 이용하여 문제에서 묻는 값들을 구해야 한다. 이 문항을 해결하기 위해서는 함수 단원의 여러 개념에 대한 폭 넓은 이해가 필요하다.

32. 정답 ②

수학 내적 문제 해결 능력 - 다항함수의 미분법 [4점]

$f(x)=x^3-x^2$에서

$f'(x)=3x^2-2x$

원점을 지나는 직선이 곡선 $y=f(x)+t$와 접하는 접점의 x좌표를 s라 하면

$h(t)=s$, $g(t)=f'(s)=3s^2-2s$ …… ㉠

이고, 접선의 방정식은 $y-f(s)-t=f'(s)(x-s)$에서

$y-s^3+s^2-t=(3s^2-2s)(x-s)$

이 직선이 원점을 지나므로

$0-s^3+s^2-t=(3s^2-2s)(0-s)$

$\therefore t=2s^3-s^2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$g(2s^3-s^2)=3s^2-2s$, $h(2s^3-s^2)=8$이므로

$g^{-1}(3s^2-2s)=2s^3-s^2$ …… ㉢

$h^{-1}(s)=2s^3-s^2$ …… ㉣

㉢에서 $3s^2-2s=8$이면

$3s^2-2s-8=(s-2)(3s+4)=0$이므로

$s=2$ 또는 $s=-\dfrac{4}{3}$

이 때 $s=-\dfrac{4}{3}$이면 ㉡에서 $t<0$이므로 모순이다.

$\therefore s=2$

따라서 $2s^3-s^2=2\times 2^3-2^2=12$이므로 ㉢에서 $g^{-1}(8)=12$

㉣에서

$h^{-1}(3)=2\times 3^3-3^2=45$

$\therefore g^{-1}(8)+h^{-1}(3)=12+45=57$

33. 정답 ③

[출제의도] 합성함수의 치역을 구하고 주어진 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있다.

$(g\circ f)(x)$

$=g(f(x))$

$=|f(x)-1|+|f(x)-t|$

$=\begin{cases}|2-1|+|2-t| & (x<t)\\ |-2-1|+|-2-t| & (x\geq t)\end{cases}$

$=\begin{cases}|t-2|+1 & (x<t)\\ |t+2|+3 & (x\geq t)\end{cases}$

이므로 t의 값의 범위에 따라 함수 $(g\circ f)(x)$는 다음과 같다.

(i) $t<-2$일 때,

$(g\circ f)(x)=\begin{cases}-t+3 & (x<t)\\ -t+1 & (x\geq t)\end{cases}$

$\therefore M(t)=-t+3$, $m(t)=-t+1$

(ii) $-2\leq t<2(t\neq -1)$일 때,

$(g\circ f)(x)=\begin{cases}-t+3 & (x<t)\\ t+5 & (x\geq t)\end{cases}$

따라서 $-t+3>t+5$, 즉 $-2\leq t<-1$이면

$M(t)=-t+3$, $m(t)=t+5$

$-t+3<t+5$, 즉 $-1<t<2$이면

$M(t)=t+5$, $m(t)=-t+3$

(iii) $t\geq 2$일 때,

$(g\circ f)(x)=\begin{cases}t-1 & (x<t)\\ t+5 & (x\geq t)\end{cases}$

$\therefore M(t)=t+5$, $m(t)=t-1$

ㄱ. $-1<t<2$일 때

$M(t)=t+5$, $m(t)=-t+3$이므로

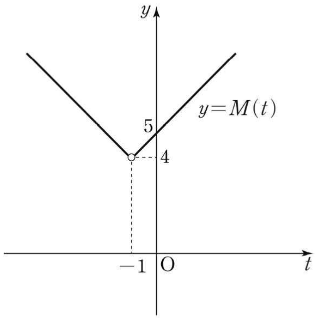
$M(0)-m(0)=5-3=2$ (참)

ㄴ. $M(t)=\begin{cases}-t+3 & (t<-1)\\ t+5 & (t>-1)\end{cases}$이므로 모든 양의 실수 t에 대하여

$M(t-1)=(t-1)+5=t+4$

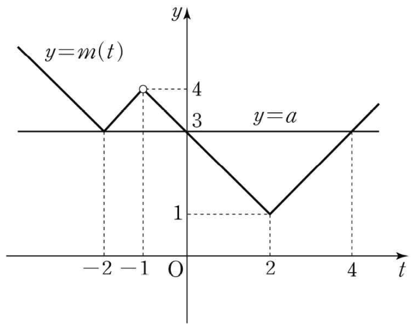
$M(-t-1)=-(-t-1)+3=t+4$

이다. 즉, $M(t-1)=M(-t-1)$이 성립한다. (참)



ㄷ. $m(t)=\begin{cases}-t+1 & (t<2)\\ t+5 & (-2\le t<-1)\\ -t+3 & (-1<t<2)\\ t-1 & (t\ge 2)\end{cases}$이므로

$y=m(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y=m(t)$의 그래프와 직선 $y=a$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 a의 값은 3뿐이다.

이때 이 세 교점의 x좌표는 $-2,\ 0,\ 4$이므로 방정식 $m(t)=a$의 서로 다른 세 실근의 합은

$(-2)+0+4=2$ (거짓)

34. **정답** ③

#함수의 성질 #일대일함수 #집합의 원소 #함숫값

[출제의도] 여러 가지 함수의 성질을 이해하여 함수를 추론하고 함숫값을 구할 수 있다.

[1단계] 조건 (나)를 이용하여 $f(2)$가 될 수 있는 값을 구한다.

조건 (나)에서 $\dfrac{6}{f(2)}\in A$이므로 $f(2)$의 값으로 가능한 것은

2, 3, 6이다.

[2단계] 조건 (가), (다)를 이용하여 함수 g에 대한 식을 구한다.

조건 (다)에 의하여

$f(g(1))=\dfrac{1+3}{2}=2,\ f(g(2))=\dfrac{2+4}{2}=3,$

$f(g(3))=\dfrac{3+3}{2}=3,\ f(g(4))=\dfrac{4+4}{2}=4,$

$f(g(5))=\dfrac{5+3}{2}=4$

이고 조건 (가)에서 함수 f는 일대일함수이므로

$g(2)=g(3)\le 5,\ g(4)=g(5)\le 5$ ……………………………………㉠

[3단계] $f(2)=2,\ f(2)=3,\ f(2)=6$인 경우 각각 조건 (다)와 (가)가 성립하는지 확인한다.

(i) $f(2)=2$인 경우

$f(2)f(4)=6$이므로 $g(4)=3$ 즉, ㉠에 의하여

$g(5)=3$

조건 (다)에 의하여 $f(3)=4$

조건 (가)에서 함수 g의 치역의 모든 원소의 합이 10이고

$g(1)<g(2)$와 ㉠에 의해

$g(1)=2,\ g(2)=g(3)=5$인 경우뿐이다.

$g(1)=2,\ g(2)=g(3)=5$인 경우

$f(g(1))=f(2)=2,$

$f(g(2))=f(g(3))=f(5)=3$

이때 함수 f가 일대일함수이므로 $f(4)$의 값으로 가능한 값은 1, 5, 6중 하나이다.

$g(2)+f(3)+f(4)$의 최댓값은

$5+4+6=15$

(ii) $f(2)=3$인 경우

$f(2)g(4)=6$이므로 $g(4)=2$

㉠에 의하여 $g(5)=2$

조건 (다)에 의하여

$f(g(4))=f(g(5))=f(2)=4$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $f(2)=6$인 경우

$f(2)g(4)=6$이므로 $g(4)=1$

㉠에 의하여 $g(5)=1$

조건 (다)에 의하여

$f(g(4))=f(g(5))=f(1)=4$

조건 (가)에서 함수 g의 치역의 모든 원소의 합이 10이고

$g(1)<g(2)$와 ㉠에 의해

$g(1)=4,\ g(2)=g(3)=5$인 경우뿐이다.

$g(1)=4,\ g(2)=g(3)=5$인 경우

$f(g(1))=f(4)=2,$

$f(g(2))=f(g(3))=f(5)=3$

이때 함수 f가 일대일함수이므로 $f(3)$의 값으로 가능한 값은 1, 5 중 하나이므로

$g(2)+f(3)+f(4)$의 최댓값은

$5+5+2=12$

[4단계] $g(2)+f(3)+f(4)$의 최댓값을 구한다.

(i)~(iii)에서 $g(2)+f(3)+f(4)$의 최댓값은 15이다.