호남제일고 1학년 7월 20일 논술형 평가 자료

1. 1.좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(1,\ -3)$, $\mathrm{B}(2,\ 1)$ 사이의 거리는? [2점]

① $\sqrt{17}$ ② $3\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{19}$
④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{21}$

2. 2.좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(a,\ -4)$, $\mathrm{B}(3,\ b)$에 대하여 선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점의 좌표가 $(-3,\ 2)$일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

3. 3.좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A}(3,\ 2)$, $\mathrm{B}(-1,\ 4)$, $\mathrm{P}(a,\ 0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2$의 최솟값은? [3점]

① 22 ② 24 ③ 26
④ 28 ⑤ 30

4. 4.수직선 위에 길이가 8인 선분 AB가 있다. 선분 AB의 중점을 M, 선분 AB를 $3:1$로 내분하는 점을 N이라 하자. 선분 MN을 $3:1$로 외분하는 점을 P라 할 때, 선분 AP의 길이는? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

5. 5.좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$, $\mathrm{B}(a,\ b)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점의 좌표는 $(10,\ 0)$이다. $a+b$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

6. 6.좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 3)$, $\mathrm{B}(4,\ 1)$에 대하여 선분 AB를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 구하시오. [3점]

7. 7.좌표평면에서 직선 $12x-2y+5=0$의 기울기는? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

8. 8.좌표평면에서 직선 $3x+y-1=0$과 평행하고 점 $(1,\ -5)$를 지나는 직선의 y절편은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

9. 9.좌표평면에서 직선 $(2k+1)x+(k-3)y-6k+4=0$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 점 $(a,\ b)$를 지날 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

10. 10.좌표평면 위의 원점 O에서 직선 $ax+by-50=0$에 내린 수선의 발을 H라 하자. 점 H의 좌표가 $(4,\ 3)$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 7 ② 14 ③ 21
④ 28 ⑤ 35

11. 11.좌표평면에서 이차함수 $f(x)=-x^2+4x+5$의 그래프와 직선 $y=2x$가 만나는 두 점을 각각 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$, $\mathrm{B}(b,\ f(b))$ $(a<b)$라 하자. $a<t<b$인 점 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$애 대하여 점 P와 진선 AB 사이의 거리의 최댓값은? [4점]

① $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\frac{6\sqrt{5}}{5}$
④ $\frac{7\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

12. 12.좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 4)$, $\mathrm{B}(6,\ 6)$이 있다. 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하자. 점 $\mathrm{C}(0,\ k)$가 다음 조건을 만족시킬 때, k의 값은? [4점]

(가) $0<k<3$ (나) 삼각형 $\mathrm{A'BC}$의 넓이는 삼각형 ACB의 넓이의 2배이다.

① $\frac{4}{5}$ ② 1 ③ $\frac{6}{5}$
④ $\frac{7}{5}$ ⑤ $\frac{8}{5}$

13. 13.좌표평면에서 원 $x^2+y^2-6x+4y=0$의 넓이는? [2점]

① 13π ② 17π ③ 21π
④ 25π ⑤ 29π

14. 두 직선 $x+y+2=0$, $(a+2)x-3y+1=0$이 서로 수직일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

15. 직선 $3x-4y+5=0$과 평행하고 거리가 2인 직선 중 제 2사분면을 지나는 직선의 방정식이 $3x+ay+b=0$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)]3점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

16. 좌표평면에서 직선 $4x+3y-2=0$과 평행하고 점$(0,\ 1)$로부터의 거리가 1인 직선은 점$(0,\ a)$를 지난다. 양의 실수 a의 값은?[3점]

① $\frac{5}{3}$ ② 2 ③ $\frac{7}{3}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ 3

17. 좌표평면에서 두 직선 $ax+y+1=0$, $(a+2)x-3y+2=0$이 서로 수직일 때, 모든 상수 a의 값의 합은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

18. 좌표평면에서 평행한 두 직선 $3x+4y+1=0$, $3x+4y+a=0$ 사이의 거리가 2일 때, 양수 a의 값은? [3점]

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

19. 좌표평면에서 세 점$(0,\ 0)$, $(6,\ 0)$, $(-1,\ 1)$을 지나는 원의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$라 할 때, $a+b$의 값은?[3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

20. 점(3, 4)를 지나는 직선 l이 두 직선 $x=2$, $x=5$와 만나는 점의 y좌표를 각각 α, β라 하자. $\alpha\beta$의 값이 최대일 때, 원점과 직선 l사이의 거리는?[4점]

① $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{2}}{4}$

21. 좌표평면에서 삼각형 OAB의 무게중심을 G라 하자. 두 직선 AG, BG의 방정식이 각각 $2x+y-1=0$, $x-y-2=0$일 때, 직선 AB의 기울기는? (단, O는 원점이다.) [4점]

① -9 ② -8 ③ -7
④ -6 ⑤ -5

22. 좌표평면에서 세 직선 $x-y+1=0$, $x+2y-3=0$, $ax-3y+2=0$으로 둘러싸인 도형이 직각삼각형일 때, a^2의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [4점]

23. 좌표평면 위의 두 점 A, B와 2이상의 자연수 k에 대하여 선분 AB를 k : 1로 내분하는 점을 P, k : 1로 외분하는 점을 Q라 하자. 두 점 P, Q 사이의 거리가 9이고 $\overline{AP}$: $\overline{BQ}=3$: 2일 때, 선분 AB의 길이를 구하시오. [4점]

24. 24.원 $x^2+y^2-2x+4y-11=0$의 반지름의 길이를 구하시오. [3점]

25. 25.좌표평면에서 점 A(4, 3)과 원 $x^2+y^2=16$ 위의 점 P에 대하여 선분 AP의 길이의 최솟값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

26. 26.t가 1보다 큰 실수일 때, 원 $(x+t)^2+y^2=1$ 위의 점 P(a, b)와 원 $(x-t)^2+y^2=1$ 위의 점 Q(c, d)가 있다. $ac+bd=0$을 만족시키는 두 점 P, Q의 순서쌍 (P, Q)의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t의 값은? [4점]

① $\sqrt{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\sqrt{3}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

27. 27.원 $x^2+y^2+3x+ay+a+b=0$이 x축과 y축에 동시에 접할 때, 양수 b의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ 3
④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{21}{4}$

28. 28.직선 $y=x$ 위의 점을 중심으로 하고, x축과 y축에 동시에 접하는 원 중에서 직선 $3x-4y+12=0$과 접하는 원의 개수는 2이다. 두 원의 중심을 각각 A, B라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}^2$의 값을 구하시오. [4점]

29. 29.좌표평면 위의 점 $(2,\ -4)$에서 원 $x^2+y^2=2$에 그은 두 접선이 각각 y축과 만나는 점의 좌표를 $(0,\ a)$, $(0,\ b)$라 할 때, $a+b$의 값은? [4점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

30. 30.원 $C: x^2+y^2-5x=0$ 위의 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overline{\mathrm{OP}}=3$
> (나) 점 P는 제1사분면 위의 점이다.

원 C 위의 점 P에서의 접선의 기울기가 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

31. 좌표평면에서 원 C : $x^2+y^2-4x-10y+k=0$이 다음 조건을 만족시킬 때, 자연수 k의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. [4점]

> (가) 원 C는 x축과 만나지 않는다.
> (나) 원 C는 직선 $3x-4y-1=0$과 만난다.

32. 좌표평면에서 점A$(1,\ 2)$와 원$(x+3)^2+(y-5)^2=4$위를 움직이는 점P에 대하여 선분AP의 길이가 정수가 되도록 하는 점P의 개수는?[4점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

33. 좌표평면 위의 세 점 A, B, C에 대하여 두 점 A, B의 좌표는 각각 $(0,\ a)$, $(3,\ 0)$이고, 삼각형 ABC는 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$인 직각이등변삼각형이다. $-1\le a\le 2$일 때, 선분 OC의 길이의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $\frac{M}{m}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $\frac{14}{3}$ ② 5 ③ $\frac{16}{3}$ ④ $\frac{17}{3}$ ⑤ 6

34. 좌표평면에서 원 $x^2+(y-1)^2=1$과 직선 $y=mx-m+1$이 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 선분 PQ와 호 PQ로 둘러싸인 도형 중 넓이가 작은 도형의 넓이를 S_1, 선분 OQ와 호 OQ로 둘러싸인 도형 중 넓이가 작은 도형의 넓이를 S_2라 하자. $S_1=S_2$를 만족시키는 모든 실수 m의 값의 합을 구하시오. (단, O는 원점이고, 점 P의 x좌표는 점 Q의 x좌표보다 크다.) [4점]

35. 좌표평면 위의 두 점 A$(-2,\ 0)$, B$(3,\ 0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=2:3$을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형을 S라 하자. 도형 S위를 움직이는 점 P와 두 점 C$(0,\ 10)$, D$(4,\ 2)$에 대하여 사각형 CPDQ가 선분 PC, 선분 PD를 두 변으로 갖는 평행사변형이 되도록 점 Q를 정할 때, 평행사변형 CPDQ의 대각선 PQ의 길이의 최댓값은? [4점]

① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40

36. 좌표평면에서 두 직선 l_1 : $2x+y=14$, l_2 : $-x+2y=8$의 교점을 A라 하자. 점 A와 원점 O를 지름의 양 끝점으로 하는 원 위의 점 P와 직선 l_1 사이의 거리의 최댓값은 $a\sqrt{5}+b\sqrt{13}$이다. $5(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]

37. 좌표평면에서 반지름의 길이가 r이고 중심이 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{2}$의 그래프 위에 있는 원 중에서, 직선 $y=x+7$에 접하는 원의 개수를 m이라 하고 직선 $y=x$에 접하는 원의 개수를 n이라 하자. m이 홀수일 때, $m+n+r^2$의 값은? (단, r는 상수이다.) [4점]

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

38. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(5, 12)$, $\mathrm{B}(a, b)$에 대하여 선분 AB의 길이가 3일 때, a^2+b^2의 최댓값을 구하시오. [4점]

39. 39.직선 $y=\frac{2}{3}x-2$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 y절편은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

40. 40.좌표평면에서 직선 $2x-y+15=0$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [3점]

41. 41.좌표평면에서 점 $\mathrm{A}(2,\ -1)$을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점을 B라 하고, 점 B를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 C라 하자. 점 C의 좌표가 $(a,\ b)$일 때, $b-a$의 값을 구하시오. [3점]

42. 42.직선 $2x+y+5=0$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의 방정식이 $2x+y+a=0$일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

43. 43.좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$을 x축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점이 직선 $y=4x$ 위에 있을 때, 상수 a의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

44. 44.좌표평면에서 원 $C_1 : x^2+y^2-2x+4y=k$를 x축에 대하여 대칭이동한 원을 C_2라 하자. 원 C_1이 원 C_2의 중심을 지날 때, 두 원 C_1, C_2의 내부의 공통부분의 넓이는? (단, k는 상수이다.) [4점]

① $\frac{32}{3}\pi-8\sqrt{3}$ ② $\frac{32}{3}\pi+8\sqrt{3}$ ③ $8\pi-4\sqrt{3}$
④ $8\pi+4\sqrt{3}$ ⑤ $8\pi+8\sqrt{3}$

45. 45.원 $C_1 : x^2+y^2=2$를 x축의 방향으로 k만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 원을 C_2라 하자. 점 $\mathrm{A}(1,\ 1)$에서 원 C_2에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 상수 k의 값은? (단, $k>2$) [4점]

① $1+\sqrt{2}$ ② $2+\sqrt{2}$ ③ $1+2\sqrt{2}$
④ $3+\sqrt{2}$ ⑤ $2+2\sqrt{2}$

46. 46.좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$, $\mathrm{B}(2,\ 1)$이 있다. x축 위의 점 C에 대하여 삼각형 ABC의 둘레의 길이의 최솟값이 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$일 때, 두 자연수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하시오. (단, 점 C는 직선 AB 위에 있지 않다.) [4점]

47. 좌표평면에서 원 $x^2+y^2+10x-12y+45=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 원을 C_1이라 하고, 원 C_1을 x축에 대하여 대칭이동한 원을 C_2라 하자. 원 C_2의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$라 할 때, $10a+b$의 값을 구하시오. [3점]

48. 직선 $y=ax-6$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선이 점 $(2,\ 4)$를 지날 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

49. 좌표평면 위의 점 $(3,\ 2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A, 점 A를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 B라 할 때, 선분 AB의 길이는? [3점]

① $2\sqrt{13}$ ② $3\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{14}$
④ $\sqrt{58}$ ⑤ $2\sqrt{15}$

50. 점 $(4,\ -3)$을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(a,\ b)$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

51. 좌표평면에서 직선 $l : y=3x+k$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 후 원점에 대하여 대칭이동하였더니 원래의 직선l과 일치하였을 때, 상수 k의 값은?[3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

52. 직선 $3x+4y-12=0$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 P라 할 때, 점 P를 x축, y축에 대하여 대칭이동한 점을 각각 Q, R라 하자. 삼각형 RQP의 무게중심의 좌표를 $(a,\ b)$라 할 때, $a+b$의 값은? [4점]

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{8}{9}$ ⑤ $\frac{10}{9}$

53. 좌표평면에서 점 P(1, 3)을 직선 $y=2x+a$에 대하여 대칭이동시킨 점이 Q(5, b)일 때, $a+b$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

54. 좌표평면에서 직선 $3x+4y+17=0$을 x축의 방향으로 n만큼 평행이동한 직선이 원 $x^2+y^2=1$에 접할 때, 자연수 n의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

55. 55.두 집합 $A=\{1,\ 2,\ a\}$, $B=\{1,\ 4,\ b\}$에 대하여 $A=B$일 때, $a\times b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [2점]

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

56. 56.두 집합

$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$, $B=\{1,\ 5,\ 9\}$

에 대하여 집합 $A\cap B$의 모든 원소의 합은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

57. 57.두 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$에 대하여 집합 $A-B$의 모든 원소의 합은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

58. 58.두 집합 $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{4,5,6\}$ 에 대하여 집합 $B-A$ 의 모든 원소의 합은? [2점]

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

59. 59.두 집합 $A=\{1,\ 2,\ a^2-6\}$, $B=\{a+2,\ 4,\ 2a+9\}$에 대하여 $A\cap B=\{3\}$일 때, 집합 $B-A$의 모든 원소의 합은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

60. 60.두 집합 $A=\{1,\ 3,\ a\}$, $B=\{2,\ b\}$에 대하여 $A-B=\{1,\ 4\}$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 실수이다.) [2점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

61. 61.두 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{1,\ 3,\ 5\}$에 대하여 집합 $A\cap B$의 모든 원소의 합은? [2점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

62. 62.전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 7,\ 8,\ 9\}$의 두 부분집합

$A=\{2,\ 3,\ 7\}$, $B=\{1,\ 3,\ 7,\ 9\}$

에 대하여 집합 $A\cup B^c$의 모든 원소의 합은? [2점]

① 16 ② 17 ③ 18
④ 19 ⑤ 20

63. 63.두 집합

$A=\{x\,|\,(x-5)(x-a)=0\}$, $B=\{-3,\ 5\}$

에 대하여 $A\subset B$를 만족시키는 양수 a의 값을 구하시오. [3점]

64. 64.자연수 n에 대하여 자연수 전체 집합의 부분집합 A_n을 다음과 같이 정의하자.

$A_n=\{x\,|\,x$는 $\sqrt{n}$ 이하의 홀수$\}$

$A_n\subset A_{25}$를 만족시키는 n의 최댓값을 구하시오. [3점]

65. 65.전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$의 부분집합 A에 대하여

$\{1,\ 2\}-A=\{1\}$, $n(A)=3$

을 만족시키는 집합 A의 개수를 구하시오. [3점]

66. 66.두 집합 $A=\{a,\ a^2+1\}$, $B=\{a+3,\ a^2\}$에 대하여 $B-A=B$를 만족시키도록 하는 10 이하의 모든 자연수 a의 값의 합은? [3점]

① 44 ② 46 ③ 48
④ 50 ⑤ 52

67. 67.전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $A\cup B=U$

를 만족시키는 모든 집합 B의 개수를 구하시오. [3점]

68. 68.두 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여

$X\subset B$, $X\cap A\neq\varnothing$

를 만족시키는 집합 X의 개수를 구하시오. [3점]

69. 69.전체집합 $U=\{x\,|\,x$는 10 이하의 자연수$\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 U의 부분집합 X의 개수를 구하시오. [4점]

(가) 집합 X의 원소의 개수는 2 이상이다. (나) 집합 X의 원소 중 가장 큰 수와 가장 작은 수의 곱은 18이다

70. 70.전체집합 $U=\{x|x$는 $1<x<10$인 자연수$\}$의 부분집합 A를

$$A=\left\{x\,\middle|\,\frac{(x-1)!}{x}\text{은 자연수}\right\}$$

라 할 때, $A\subset X\subset U$를 만족시키는 모든 집합 X의 개수를 구하시오. [4점]

71. 71.두 집합 $A=\{-2,\ 1\}$, $B=\{x|m^2x-4=3mx\}$에 대하여 $A\cap B=B$가 되도록 하는 모든 실수 m의 값의 합은? [4점]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

72. 72.전체집합 $U=\{x|x$는 9 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A=\{2,\ 4,\ 5,\ 7\}$, $n(A\cap B)=2$이고 집합 B의 모든 원소의 합이 짝수가 되도록 하는 집합 B의 개수를 구하시오. [4점]

73. 73.전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A-B=\{1\}$을 만족하는 모든 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는? [4점]

① 81 ② 87 ③ 93
④ 99 ⑤ 105

74. 74.50명의 학생들을 대상으로 어느 수학 문제를 잠깐 보여주고 풀 수 있을지에 대한 의견을 물은 다음, 실제로 문제를 풀도록 하였더니 다음과 같은 결과가 나왔다고 한다.

(가) 문제를 풀 수 있다고 대답한 학생은 36명이다. (나) 실제로 문제를 풀어 답을 맞춘 학생은 30명이다. (다) 문제를 풀 수 있다고 대답한 학생 중에서 실제로는 답을 맞히지 못한 학생은 9명이다.

문제를 풀 수 있다고 대답했거나 실제로 답을 맞히지 못한 학생의 수를 구하시오. [4점]

75. 75.은행 A 또는 은행 B를 이용하는 고객 중 남자 35명과 여자 30명을 대상으로 두 은행 A, B의 이용 실태를 조사한 결과가 다음과 같다.

(가) 은행 A를 이용하는 고객의 수와 은행 B를 이용하는 고객의 수의 합은 82이다. (나) 두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 남자 고객의 수와 두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 여자 고객의 수는 같다.

이 고객 중 은행 A와 은행 B를 모두 이용하는 여자 고객의 수는? [4점]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

76. 76.전체집합 $U=\{x|x$는 20 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합

$A=\{x|x$는 4의 배수$\}$, $B=\{x|x$는 20의 약수$\}$

에 대하여 집합 $(A^C\cup B)^C$의 모든 원소의 합을 구하시오. [4점]

77. 77.전체집합 $U=\{x|x$는 10 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $B=\{4,\ 6\}$

에 대하여

$A\cap X=\{3,\ 4,\ 5\}$, $n(B\cup X)=6$

을 만족시키는 U의 부분집합 X의 모든 원소의 합의 최댓값은? [4점]

① 28 ② 29 ③ 30
④ 31 ⑤ 32

78. 78.어느 반 학생 24명을 대상으로 두 편의 연극 A, B의 관람여부를 조사하였더니 두 편의 연극을 모두 본 학생 수는 두 편의 연극을 모두 보지 않은 학생 수의 3배이고, 연극 B만 본 학생 수는 연극 A만 본 학생 수의 2배이었다. 연극 A를 본 학생이 13명일 때, 두 편의 연극을 모두 본 학생 수를 구하시오. [4점]

79. 79.전체집합 $U=\{x|x$는 19 이하의 자연수$\}$의 부분집합 A가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 집합 A의 모든 원소 a에 대하여 $2a\not\in A$이다.
(나) 집합 A의 모든 원소의 합은 짝수이다.

집합 A의 원소의 개수가 최대일 때, 모든 원소의 합의 최댓값은? [4점]

① 124 ② 132 ③ 140
④ 148 ⑤ 156

80. 80.전체집합

$U=\{x|x$는 3의 배수가 아닌 30 이하의 자연수$\}$

의 부분집합 A에 대하여 $n(A)=4$이고 집합 A의 모든 원소의 합은 100이다. 집합 A의 모든 원소를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 x_1, x_2, x_3, x_4라 할 때, $x_4-x_3+x_2-x_1$의 최댓값을 구하시오. [4점]

정답 및 해설

1. 정답 ①

$\overline{AB}=\sqrt{(2-1)^2+\{1-(-3)\}^2}=\sqrt{17}$

2. 정답 ④

두 점 $A(a,\ -4)$, $B(3,\ b)$에 대하여 선분 AB를 3 : 2로 외분하는 점의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$x=\dfrac{3\times3-2\times a}{3-2}=9-2a=-3$

즉, $2a=12$이므로 $a=6$

$y=\dfrac{3\times b-2\times(-4)}{3-2}=3b+8=2$

즉, $3b=-6$이므로 $b=-2$

따라서 $a+b=4$

3. 정답 ④

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=(a-3)^2+2^2+(a+1)^2+4^2$

$=2a^2-4a+30=2(a-1)^2+28$

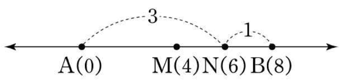
따라서 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$은 $a=1$일 때, 최솟값 28을 갖는다.

4. 정답 ④

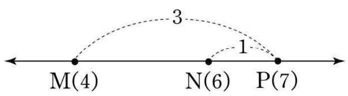
수직선 위의 두점 A, B의 좌표를 각각 0, 8이라 하자.

선분 AB의 중점 M의 좌표는 $\dfrac{0+8}{2}$, 즉 4이다.

선분 AB를 3:1로 내분하는 점 N의 좌표는 $\dfrac{3\times8+1\times0}{3+1}$, 즉 6이다.



따라서 두 점 $M(4)$, $N(6)$을 양 끝점으로 하는 선분 MN을 3:1로 외분하는 점 P의 좌표는 $\dfrac{3\times6-1\times4}{3-1}$, 즉 7이다.



그러므로 선분 AP의 길이는 7이다.

5. 정답 ④

[출제의도] 좌표평면에서 외분점의 좌표를 계산한다.

두 점 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$, $\mathrm{B}(a,\ b)$에 대하여 선분 AB를 2:1로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{2\times a-1\times(-2)}{2-1},\ \dfrac{2\times b-1\times0}{2-1}\right)$

즉 $(2a+2,\ 2b)$

이 점의 좌표가 $(10,\ 0)$이므로

$2a+2=10,\ 2b=0$

$a=4,\ b=0$

따라서 $a+b=4$

[다른 풀이]

$\mathrm{P}(10,\ 0)$이라 하자.

점 P가 선분 AB를 2:1로 외분하는 점이므로 점 B는 선분 AP의 중점이다.

$\mathrm{A}(-2,\ 0)$, $\mathrm{B}(a,\ b)$, $\mathrm{P}(10,\ 0)$에서 선분 AP의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{-2+10}{2},\ \dfrac{0+0}{2}\right)$

즉 $(4,\ 0)$

이 점의 좌표와 점 B의 좌표가 같으므로

$a=4,\ b=0$

따라서 $a+b=4$

6. 정답 29

[출제의도] 두 점 사이의 거리를 계산한다.

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(4+1)^2+(1-3)^2}$

$=\sqrt{29}$

선분 AB를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는

$\overline{\mathrm{AB}}^2=29$

7. 정답 ①

[출제의도] 직선의 방정식을 이해한다.

직선 $12x-2y+5=0$에서

$y=6x+\dfrac{5}{2}$

따라서 직선 $12x-2y+5=0$의 기울기는 6이다.

8. 정답 ①

$3x+y-1=0$에서 $y=-3x+1$

이때 직선 $y=-3x+1$과 평행한 직선의 기울기는 -3이므로 기울기가 -3이고 점 $(1,\ -5)$를 지나는 직선의 방정식은 $y=-3x-2$이다.

따라서 구하는 y절편은 -2이다.

9. 정답 ②

$(2k+1)x+(k-3)y-6k+4=0$에서

$x-3y+4+k(2x+y-6)=0$

실수 k의 값에 관계없이 위의 등식이 항상 성립해야 하므로

$x-3y+4=0$ …… ㉠

$2x+y-6=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $x=2$, $y=2$

따라서 주어진 직선은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(2,\ 2)$를 지나므로 $a+b=4$

10. 정답 ②

점 $H(4,\ 3)$이 직선 $ax+by-50=0$ 위의 점이므로

$4a+3b-50=0,\ 4a+3b=50$ …… ㉠

직선 OH의 기울기는 $\dfrac{3-0}{4-0}=\dfrac{3}{4}$

직선 $ax+by-50=0$의 기울기는 $-\dfrac{a}{b}$이고

두 직선은 서로 수직이므로

$\dfrac{3}{4}\times\left(-\dfrac{a}{b}\right)=-1,\ 3a-4b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=8,\ b=6$이므로 $a+b=14$

11. 정답 ③

점 P와 직선 AB사이의 거리가 최대이려면 점 P에서 이차함수 $y=-x^2+4x+5$와 접하는 직선의 기울기가 2이어야 한다.

따라서 이 직선의 방정식을 $y=2x+k$(k는 상수)라 놓으면

$-x^2+4x+5=2x+k$

$x^2-2x-5+k=0$ …… ㉠

㉠의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 한다.

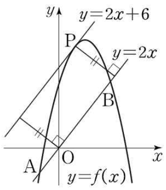
$\dfrac{D}{4}=(-1)^2-(-5+k)=6-k=0$

$k=6$

따라서 이차함수 $y=-x^2+4x+5$의 그래프와 점 P에서 접하는 기울기가 2인 직선의 방정식

$y=2x+6$ …… ㉡

점 P와 직선 $y=2x$ 사이의 거리는 원점과 직선 $y=2x+6$ 사이의 거리와 같으므로



점 P와 직선 $y=2x$ 사이의 거리를 d라 하면

$d=\dfrac{|0-0+6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

따라서 점 P와 직선 AB 사이의 거리의 최댓값은

$\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$이다.

12. 정답 ③

[출제의도] 점과 직선 사이의 거리를 활용하여 문제 해결하기

직선 AB의 방정식은 $y=\dfrac{1}{2}x+3$

직선 AB를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한

직선 A′B의 방정식은 $y=2x-6$

점 C와 직선 A′B 사이의 거리는

점 C와 직선 AB 사이의 거리의 2배이다.

$\dfrac{|-k-6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{|-2k+6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}\times 2$

$0<k<3$이므로 $k+6=2(-2k+6)$

따라서 $k=\dfrac{6}{5}$

13. 정답 ①

[출제의도] 원의 넓이를 구할 수 있다.

$x^2+y^2-6x+4y=0$에서

$(x-3)^2+(y+2)^2=13$

따라서 이 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{13}$이므로 넓이는

$(\sqrt{13})^2\pi=13\pi$

14. 답 ②

[해설] [출제의도] 두 직선의 수직 조건을 이용하여 상수의 값을 구한다.

직선 $x+y+2=0$의 기울기는 -1이고,

직선 $(a+2)x-3y+1=0$의 기울기는 $\dfrac{a+2}{3}$이다.

두 직선 $x+y+2=0,\ (a+2)x-3y+1=0$이 서로 수직이므로 두 직선의 기울기의 곱은 -1이다.

따라서 $(-1)\times\dfrac{a+2}{3}=-1$이므로

$a=1$

15. 답 ①

[해설]

직선 $3x-4y+5=0$과 평행하고 거리가 2인 직선의 방정식을

$3x-4y+k=0$ (k는 상수) …… ㉠

라 하면, 직선 $3x-4y+5=0$위의 한 점$(1,\ 2)$와 직선㉠사이의 거리가 2이므로

$\dfrac{|3-8+k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2,\ \dfrac{|k-5|}{5}=2$

$|k-5|=10$

$k-5=10$일 때, $k=15$

$k-5=-10$일 때, $k=-5$

이때 직선㉠이 제 2사분면을 지나야 하므로 $k=15$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$3x-4y+15=0$이므로

$a=-4,\ b=15$

따라서 $a+b=11$

16. 답 ④

[해설] 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 조건을 만족시키는 값을 구할 수 있다.

구하는 직선의 방정식을 $4x+3y+k=0$이라 하면 점$(0,\ 1)$과 직선 $4x+3y+k=0$사이의 거리가 1이므로

$\dfrac{|4\times0+3\times1+k|}{\sqrt{4^2+3^2}}=1,\ |3+k|=5$

즉, $3+k=5$또는 $3+k=-5$이므로 $k=2$또는 $k=-8$

따라서 직선의 방정식은

$4x+3y+2=0$ 또는 $4x+3y-8=0$

이므로 양의 실수 a의 값은 $\dfrac{8}{3}$

17. 답 ①

[해설] 이해력 – 도형의 방정식

두 직선 $ax+y+1=0,\ (a+2)x-3y+2=0$이 서로 수직이므로

$a(a+2)-3=0$에서 $a^2+2a-3=0,\ (a+3)(a-1)=0$

$\therefore\ a=-3$ 또는 $a=1$

따라서 모든 상수 a의 값의 합은 $(-3)+1=-2$

18. 답 ①

[해설] 이해력 – 도형의 방정식
평행한 두 직선 $3x+4y+1=0$, $3x+4y+a=0$ 사이의 거리가 2이므로 직선 $3x+4y+1=0$ 위의 점 $(1,-1)$과 직선 $3x+4y+a=0$ 사이의 거리도 2이다.

즉 $\dfrac{|3-4+a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$에서 $\dfrac{|a-1|}{5}=2, |a-1|=10$

$a-1=10$ 또는 $a-1=-10$

$\therefore\ a=11$ 또는 $a=-9$

따라서 양수 a의 값은 11이다.

19. 답 ③

[해설] 이해력 - 도형의 방정식
원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$(A, B, C는 상수)라 하면 이 원이 세 점$(0,\ 0)$, $(6,\ 0)$, $(-1,\ 1)$을 지나므로

$x=0$, $y=0$을 대입하면 $C=0$

$x=6$, $y=0$을 대입하면 $36+6A=0$

$\therefore A=-6$

$x=-1$, $y=1$을 대입하면 $8+B=0$

$\therefore B=-8$

따라서 원의 방정식은

$x^2+y^2-6x-8y=0$

이를 표준형으로 변형하면

$(x-3)^2+(y-4)^2=25$

이므로 원의 중심의 좌표는$(3,\ 4)$이다.

$\therefore a=3,\ b=4$

$\therefore a+b=7$

20. 답 ②

[해설]
직선 l의 기울기를 m이라 하자. 직선 l은 점$(3,\ 4)$를 지나므로 직선 l의 방정식은

$y-4=m(x-3)$ ······ ㉠

㉠과 두 직선 $x=2$, $x=5$가 만나는 점의 y좌표는 각각 $\alpha=-m+4$, $\beta=2m+4$이므로

$\alpha\beta=-2m^2+4m+16$

$\quad=-2(m-1)^2+18$

따라서 $m=1$일 때 $\alpha\beta$의 값이 최대이므로 직선 l의 방정식은

$x-y+1=0$

원점과 직선 $x-y+1=0$사이의 거리는

$$\frac{1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

21. 답 ⑤

[해설]
꼭짓점 A, B의 좌표를 각각 $\mathrm{A}(a,\ -2a+1)$, $\mathrm{B}(b,\ b-2)$로 놓으면

삼각형 OAB의 무게중심 G의 좌표는 $\mathrm{G}\left(\dfrac{a+b}{3},\ \dfrac{-2a+b-1}{3}\right)$이다.

한편, 두 직선 $2x+y-1=0$, $x-y-2=0$의 교점의 좌표는 $(1,\ -1)$이므로 $\mathrm{G}(1,\ -1)$이다.

따라서

$\dfrac{a+b}{3}=1,\ a+b=3$ ······㉠

$\dfrac{-2a+b-1}{3}=-1,\ 2a-b=2$ ······㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a=\dfrac{5}{3},\ b=\dfrac{4}{3}$

따라서 $\mathrm{A}\left(\dfrac{5}{3},\ -\dfrac{7}{3}\right)$, $\mathrm{B}\left(\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{2}{3}\right)$이므로

직선 AB의 기울기는

$$\frac{-\frac{7}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)}{\frac{5}{3}-\frac{4}{3}}=\frac{-\frac{5}{3}}{\frac{1}{3}}=-5$$

22. 답 9

[해설] l_1 : $x-y+1=0$, 즉 $y=x+1$

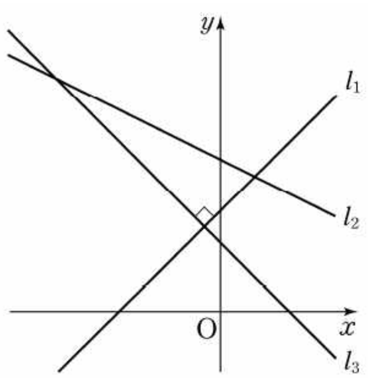
l_2 : $x+2y-3=0$, 즉 $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$

l_3 : $ax-3y+2=0$, 즉 $y=\dfrac{a}{3}x+\dfrac{2}{3}$

라 하면 두 직선 l_1, l_2는 서로 수직이 아니므로 세 직선으로 둘러싸인 도형이 직각삼각형이 되려면 다음과 같은 경우로 나누어 생각해야 한다.

(ⅰ) 두 직선 l_1, l_3이 수직인 경우

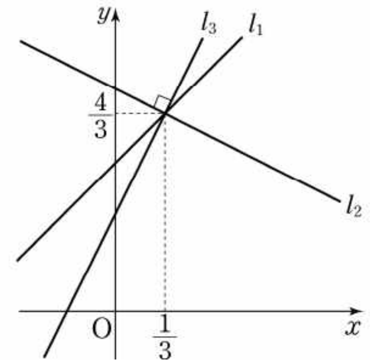
$1\times\dfrac{a}{3}=-1$에서 $a=-3$



(ⅱ) 두 직선 l_2, l_3이 수직인 경우

$-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{a}{3}=-1$에서 $a=6$

그런데 $a=6$일 때, 직선 l_3은 두 직선 l_1, l_2의 교점 $\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)$를 지나므로 세 직선은 한 점에서 만난다. 따라서 세 직선 l_1, l_2, l_3으로 둘러싸인 도형은 존재하지 않는다.

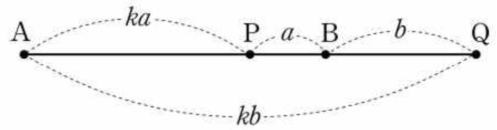


(i), (ii)에 의하여 세 직선으로 둘러싸인 도형이 직각삼각형이 되도록 하는 상수 a의 값은 -3이다.

$\therefore a^2=9$

23. 답 12

[해설]



선분 AB를 k : 1로 내분하는 점이 P이므로

$\overline{AP}=ka$, $\overline{BP}=a$ $(a>0)$이라 하고,

선분 AB를 k : 1로 외분하는 점이 Q이므로

$\overline{AQ}=kb$, $\overline{BQ}=b$ $(b>0)$이라 하자.

이때 두 점 P, Q 사이의 거리가 9이므로

$\overline{PQ}=a+b=9$ ⋯ ㉠

$\overline{AP}$: $\overline{BQ}=3$: 2이므로 ka : $b=3$: 2

$\therefore 3b=2ka$ ⋯ ㉡

$\overline{AQ}=\overline{AP}+\overline{PB}+\overline{BQ}$이므로 $kb=ka+a+b$ ⋯ ㉢

㉠, ㉢에서 $kb=ka+9$ ⋯ ㉣

㉡에서 $k=\dfrac{3b}{2a}$

이것을 ㉣에 대입하면 $\dfrac{3b^2}{2a}=\dfrac{3ab}{2a}+9$, $3b^2=3ab+18a$

㉠에서 $a=9-b$이므로 $3b^2=3\times(9-b)\times b+18\times(9-b)$

$3b^2=27b-3b^2+162-18b$

$6b^2-9b-162=0$, $2b^2-3b-54=0$

$(b-6)(2b+9)=0$

$b>0$이므로 $b=6$

$\therefore a=3$, $k=3$

따라서 선분 AB의 길이는 $ka+a=3\times3+3=12$

24. 정답 4

[출제의도] 원의 방정식 계산하기

$x^2+y^2-2x+4y-11$

$=(x-1)^2+(y+2)^2-5-11=0$

원의 방정식은 $(x-1)^2+(y+2)^2=16$

따라서 원의 반지름의 길이는 4

25. 정답 ①

[출제의도] 원의 성질을 이용하여 선분의 길이의 최솟값을 추론한다.

점 A의 좌표가 (4, 3)이므로

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

점 P는 원 $x^2+y^2=16$ 위의 점이므로

$\overline{\mathrm{OP}}=4$

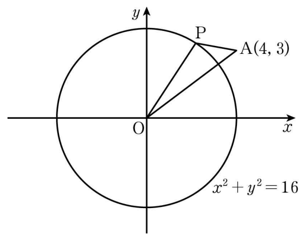
이때 그림과 같이 임의의 점 P에 대하여

$\overline{\mathrm{OA}}\le\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{PA}}$

가 성립하므로

$\overline{\mathrm{AP}}\ge\overline{\mathrm{OA}}-\overline{\mathrm{OP}}=5-4=1$

따라서 선분 AP의 길이의 최솟값은 1이다.



26. 정답 ①

#원의_방정식 #원과_직선의_위치_관계

#점과_직선_사이의_거리

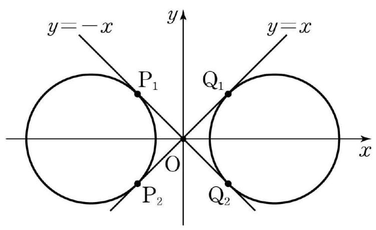
[출제의도] 원의 방정식을 이용하여 조건을 만족시키는 값을 구할 수 있다.

$t>1$이므로 $ac\neq0$이다.

$ac+bd=0$에서 $bd=-ac$이고, 두직선 OP, OQ의 기울기는 각각 $\dfrac{b}{a}$, $\dfrac{d}{c}$이므로

$\dfrac{b}{a}\times\dfrac{d}{c}=\dfrac{bd}{ac}=\dfrac{-ac}{ac}=-1$

따라서 두 직선 OP, OQ는 서로 수직이어야 한다. 이때 주어진 두 원은 합동이고 서로 y축에 대하여 대칭이므로 두 점 P, Q의 순서쌍 (P, Q)의 개수가 2인 경우는 다음 그림과 같이 두 원이 서로 수직인 두 직선 $y=x$, $y=-x$에 모두 접할 때이다.



원 $(x-t)^2+y^2=1$의 중심 $(t,\ 0)$과 직선 $y=x$ 사이의 거리가 1이어야 하므로

$\dfrac{|t-0|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=1$, $|t|=\sqrt{2}$

$\therefore\ t=\sqrt{2}$ $(\because\ t>1)$

27. 정답 ⑤

[이해력-도형의 방정식]

$x^2+y^2+3x+ay+a+b$

$=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{9}{4}-\frac{a^2}{4}+a+b=0$ 에서

$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}-a-b+\frac{9}{4}$

이 원이 x축과 y축에 동시에 접하려면 중심 $\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{a}{2}\right)$가 직선 $y=x$ 또는 $y=-x$ 위에 있어야 하므로 $a=3$ 또는 $a=-3$

또한 반지름의 길이는 $\frac{3}{2}$ 이어야 하므로

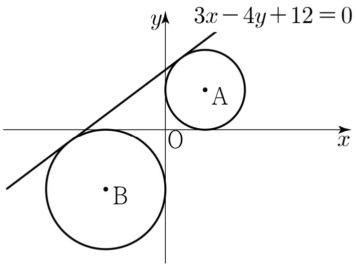
$\frac{a^2}{4}-a-b+\frac{9}{4}=\left(\frac{3}{2}\right)^2$, 즉 $b=\frac{a^2}{4}-a$

$a=3$ 이면 $b=\frac{9}{4}-3=-\frac{3}{4}$, $a=-3$ 이면 $b=\frac{9}{4}+3=\frac{21}{4}$

따라서 양수 b의 값은 $\frac{21}{4}$ 이다.

28. 정답 50

[출제의도] 원과 직선의 위치 관계를 활용하여 문제 해결하기



원의 중심을 $(a,\ a)$ 라 하면

점 $(a,\ a)$ 와 직선 $3x-4y+12=0$ 사이의 거리는 반지름의 길이 $|a|$ 와 같으므로

$\frac{|3a-4a+12|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=|a|$

$|-a+12|=5|a|$

양변을 제곱하여 정리하면

$a^2+a-6=0$

$a=-3$ 또는 $a=2$

제1사분면 위의 점을 A, 제3사분면 위의 점을 B라 하면 $\mathrm{A}(2,\ 2)$, $\mathrm{B}(-3,\ -3)$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}^2=\{2-(-3)\}^2+\{2-(-3)\}^2=50$

29. 정답 ③

[출제의도] 원과 직선의 위치관계 이해하기

점 $(2,\ -4)$에서 원 $x^2+y^2=2$에 그은 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은 $y+4=m(x-2)$이다.

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y+4=m(x-2)$ 사이의 거리는 반지름의 길이와 같으므로

$\frac{|-2m-4|}{\sqrt{1+m^2}}=\sqrt{2}$ 에서 $m^2+8m+7=0$

$m=-1$ 또는 $m=-7$

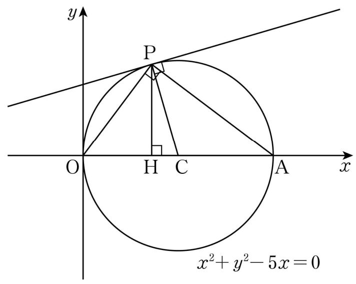
$y=mx-2m-4$가 y축과 만나는 점의 좌표는

$(0,\ -2)$, $(0,\ 10)$

따라서 $a+b=8$

30. 정답 31

[출제의도] 원의 성질을 이용하여 접선의 기울기를 구하는 문제를 해결한다.



원 $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$ 의 중심을 C라 하면 좌표는 $\mathrm{C}\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$이다.

원이 x축과 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 A라 하고 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

점 P가 원 C 위의 점이고 선분 OA가 원 C의 지름이므로 $\angle\mathrm{OPA}=90°$

삼각형 OAP에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OP}}^2}$

$=\sqrt{5^2-3^2}$

$=4$

삼각형 OAP와 삼각형 OPH에서

$\angle\mathrm{OPA}=\angle\mathrm{OHP}=90°$

$\angle\mathrm{AOP}=\angle\mathrm{POH}$

$\triangle\mathrm{OAP}\backsim\triangle\mathrm{OPH}$ ($\because$ AA닮음)

$\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OP}}:\overline{\mathrm{OH}}$ 이고

조건 (가)에서 $\overline{\mathrm{OP}}=3$이고 $\overline{\mathrm{OA}}=5$이므로

$5:3=3:\overline{\mathrm{OH}}$

$\overline{\mathrm{OH}}=\frac{9}{5}$

$\overline{\mathrm{OH}}:\overline{\mathrm{HP}}=\overline{\mathrm{OP}}:\overline{\mathrm{PA}}$

$\frac{9}{5}:\overline{\mathrm{HP}}=3:4$

$\overline{\mathrm{HP}}=\frac{12}{5}$

따라서 점 $\mathrm{P}\left(\frac{9}{5},\ \frac{12}{5}\right)$이다.

$\mathrm{C}\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$이므로 직선 CP의 기울기는

$\frac{-\frac{12}{5}}{\frac{5}{2}-\frac{9}{5}}=\frac{-\frac{24}{10}}{\frac{7}{10}}$

$=-\frac{24}{7}$

점 P에서의 접선과 직선 CP는 서로 수직이고

두 직선의 기울기의 곱이 -1이므로

점 P에서의 접선의 기울기는 $\frac{7}{24}$

따라서 $p=24,\ q=7$이므로

$p+q=31$

[다른 풀이 1]

원 $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$의 중심을 C라 하면 좌표는 $\mathrm{C}\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$이다.

원이 x축과 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 A라 하고 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

점 P가 원 C 위의 점이고 선분 OA가 원 C의 지름이므로

$\angle \mathrm{OPA}=90°$

삼각형 OAP에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OP}}^2}$

$=\sqrt{5^2-3^2}$

$=4$

삼각형 OAP와 삼각형 OPH에서

$\angle \mathrm{OPA}=\angle \mathrm{OHP}=90°$

$\angle \mathrm{AOP}=\angle \mathrm{POH}$

$\triangle \mathrm{OAP} \backsim \triangle \mathrm{OPH}$ ($\because$ AA닮음)

$\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OP}}:\overline{\mathrm{OH}}$이고

조건 (가)에서 $\overline{\mathrm{OP}}=3$이고 $\overline{\mathrm{OA}}=5$이므로

$5:3=3:\overline{\mathrm{OH}}$

$\overline{\mathrm{OH}}=\frac{9}{5}$

$\overline{\mathrm{OH}}:\overline{\mathrm{HP}}=\overline{\mathrm{OP}}:\overline{\mathrm{PA}}$

$\frac{9}{5}:\overline{\mathrm{HP}}=3:4$

$\overline{\mathrm{HP}}=\frac{12}{5}$

따라서 점 $\mathrm{P}\left(\frac{9}{5},\ \frac{12}{5}\right)$이다.

원 $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$과 점 $\mathrm{P}\left(\frac{9}{5},\ \frac{12}{5}\right)$를 x축의 방향으로 $-\frac{5}{2}$ 만큼 평행이동한 원과 점을 각각 C_1, P_1이라 하면

$C_1: x^2+y^2=\frac{25}{4}$, $\mathrm{P}_1\left(-\frac{7}{10},\ \frac{12}{5}\right)$

원 C_1 위의 점 P_1에서의 접선의 방정식은

$-\frac{7}{10}x+\frac{12}{5}y=\frac{25}{4}$

위의 직선의 기울기는

$$\frac{\frac{7}{10}}{\frac{12}{5}}=\frac{7}{24}$$

이고 이 직선은 원 C 위의 점 P에서의 접선과 서로 평행하므로

원 C 위의 점 P에서의 접선의 기울기는 $\frac{7}{24}$이다.

따라서 $p=24,\ q=7$이므로

$p+q=31$

[다른 풀이 2]

원 $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$의 중심을 C라 하면 좌표는 $\mathrm{C}\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$이다.

원이 x축과 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 A라 하고 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

점 P가 원 C 위의 점이고 선분 OA가 원 C의 지름이므로

$\angle \mathrm{OPA}=90°$

삼각형 OAP에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OP}}^2}$

$=\sqrt{5^2-3^2}$

$=4$

삼각형 OAP와 삼각형 OPH에서

$\angle \mathrm{OPA}=\angle \mathrm{OHP}=90°$

$\angle \mathrm{AOP}=\angle \mathrm{POH}$

$\triangle \mathrm{OAP} \backsim \triangle \mathrm{OPH}$ ($\because$ AA닮음)

$\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OP}}:\overline{\mathrm{OH}}$이고

조건 (가)에서 $\overline{\mathrm{OP}}=3$이고 $\overline{\mathrm{OA}}=5$이므로

$5:3=3:\overline{\mathrm{OH}}$

$\overline{\mathrm{OH}}=\frac{9}{5}$

$\overline{\mathrm{OH}}:\overline{\mathrm{HP}}=\overline{\mathrm{OP}}:\overline{\mathrm{PA}}$

$\frac{9}{5}:\overline{\mathrm{HP}}=3:4$

$\overline{\mathrm{HP}}=\frac{12}{5}$

따라서 점 $\mathrm{P}\left(\frac{9}{5},\ \frac{12}{5}\right)$이다.

점 P를 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y=m\left(x-\frac{9}{5}\right)+\frac{12}{5}$

$5mx-5y-9m+12=0$

위의 직선이 원 $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$에 접하므로 원의 중심 $\mathrm{C}\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$과 직선 $5mx-5y-9m+12=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 $\frac{5}{2}$와 같다.

$$\frac{\left|\frac{25}{2}m-9m+12\right|}{\sqrt{(5m)^2+(-5)^2}}=\frac{5}{2}$$

$$\frac{\left|\frac{7}{2}m+12\right|}{5\sqrt{m^2+1}}=\frac{5}{2}$$

$25\sqrt{m^2+1}=|7m+24|$

위 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$625m^2+625=49m^2+336m+576$

$576m^2-336m+49=0$

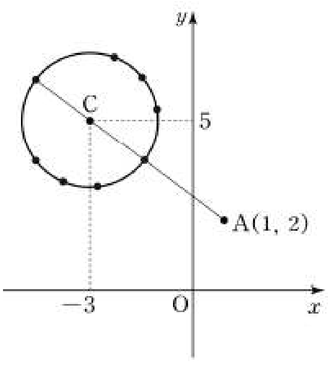
$(24m-7)^2=0$

$m=\frac{7}{24}$

따라서 $p=24$, $q=7$이므로
$p+q=31$

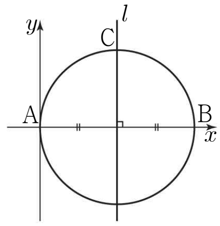
31. 답 25
[해설] $x^2+y^2-4x-10y+k=0$에서
$(x-2)^2+(y-5)^2=29-k$
즉, 원 C는 중심의 좌표가 $(2,\ 5)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{29-k}$ 인 원이다.
조건 (가)에서 원 C가 x축과 만나지 않으므로 원 C의 중심과 x축 사이이 거리가 반지름의 길이보다 커야 한다.
즉, $\sqrt{29-k}<5$에서 $29-k<25$
$\therefore k>4$ ⋯ ㉠
조건 (나)에서 원 C가 직선 $3x-4y-1=0$과 만나므로 원 C의 중심과 직선 $3x-4y-1=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이보다 작거나 같아야 한다.
즉, $\dfrac{|6-20-1|}{\sqrt{3^2+4^2}} \le \sqrt{29-k}$에서 $3 \le \sqrt{29-k}$
$9 \le 29-k$ $\quad \therefore k \le 20$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $4<k\le 20$
따라서 자연수 k의 최댓값은 20이고 최솟값은 5이므로 자연수 k의 최댓값과 최솟값의 합은 $20+5=25$

32. 답 ⑤
[해설] 이해력 - 도형의 방정식
원$(x+3)^2+(y-5)^2=2^2$의 중심의 좌표가 $\mathrm{C}(-3,\ 5)$이고 반지름의 길이가 2이므로 $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(-3-1)^2+(5-2)^2}=5$
$5-2 \le \overline{\mathrm{AP}} \le 5+2$
$\therefore 3 \le \overline{\mathrm{AP}} \le 7$

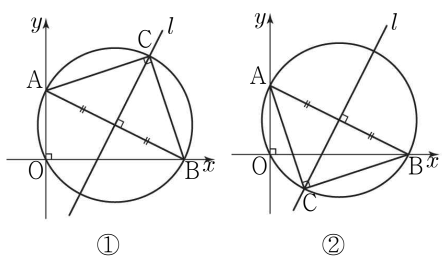


선분AP의 길이가 정수가 되므로 하는 점P의 개수는 $\overline{\mathrm{AP}}=3$, $\overline{\mathrm{AP}}=7$을 만족하는 점P가 각각 1개씩 있고, $\overline{\mathrm{AP}}=4$, $\overline{\mathrm{AP}}=5$, $\overline{\mathrm{AP}}=6$을 만족하는 점P가 직선AC를 기준으로 각각 양쪽에 1개씩 총 2개씩 있으므로 $1+1+2+2+2=8$

33. 답 ②
[해설] **[출제의도] 원의 성질을 이용하여 추론하기**
i) $a=0$일 때, 직선 l의 방정식은 $x=\dfrac{3}{2}$



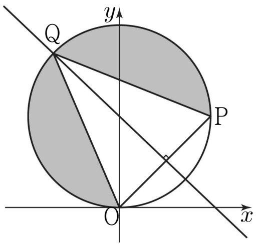
$\overline{\mathrm{OC}}=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$
ii) $a\neq 0$일 때,
$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{ACB}=90^\circ$ 이므로
네 점 A, O, B, C가 한 원 위에 있고,
선분 AB는 이 원의 지름이다.
이 원의 방정식은
$\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{a}{2}\right)^2=\dfrac{a^2+9}{4}$ ⋯ ㉠
$\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$ 이므로 점 C는 선분 AB의 수직이등분선 l과 원이 만나는 점이다.
직선 l의 방정식은 $y-\dfrac{a}{2}=\dfrac{3}{a}\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡에 의해
$\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{9}{a^2}\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{a^2+9}{4}$
$\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{a^2}{4}$
$x=\dfrac{3+a}{2}$ 또는 $x=\dfrac{3-a}{2}$
㉡에 대입하면 점 C의 좌표는
$\mathrm{C}\left(\dfrac{3+a}{2},\ \dfrac{3+a}{2}\right)$ 또는 $\mathrm{C}\left(\dfrac{3-a}{2},\ -\dfrac{3-a}{2}\right)$



① $\mathrm{C}\left(\dfrac{3+a}{2},\ \dfrac{3+a}{2}\right)$일 경우
$\overline{\mathrm{OC}}=\sqrt{\left(\dfrac{3+a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3+a}{2}\right)^2}=\sqrt{2}\left|\dfrac{3+a}{2}\right|$
$-1\le a\le 2\,(a\neq 0)$이므로
$\sqrt{2}\le\overline{\mathrm{OC}}<\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ 또는 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}<\overline{\mathrm{OC}}\le\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$
② $\mathrm{C}\left(\dfrac{3-a}{2},\ -\dfrac{3-a}{2}\right)$일 경우
$\overline{\mathrm{OC}}=\sqrt{\left(\dfrac{3-a}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{3-a}{2}\right)^2}=\sqrt{2}\left|\dfrac{3-a}{2}\right|$
$-1\le a\le 2\,(a\neq 0)$이므로
$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\le\overline{\mathrm{OC}}<\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ 또는 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}<\overline{\mathrm{OC}}\le 2\sqrt{2}$
i), ii)에 의해 $M=\dfrac{5}{2}\sqrt{2}$, $m=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
따라서 $\dfrac{M}{m}=5$

34. 답 2

[해설] [출제의도] 원과 직선의 위치 관계를 이용하여 추론하기



직선 $y=mx-m+1=m(x-1)+1$은
m의 값에 관계없이 점 $(1,\ 1)$을 지난다.
점 P의 x좌표는 점 Q의 x좌표보다 크므로
$\mathrm{P}(1,\ 1)$
$S_1=S_2$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{OQ}}$
삼각형 PQO가 이등변삼각형이므로
선분 OP의 수직이등분선은 점 Q를 지난다.
선분 OP를 수직이등분하는 직선의 방정식은

$y-\frac{1}{2}=-\left(x-\frac{1}{2}\right)$

즉, $y=-x+1$ ⋯ ㉠

㉠을 $x^2+(y-1)^2=1$에 대입하여 정리하면

$x^2+(-x+1-1)^2=1$

즉, $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 또는 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

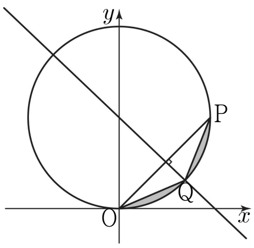
$\mathrm{Q}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ 1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 또는 $\mathrm{Q}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

m은 직선 PQ의 기울기이므로

$m=1-\sqrt{2}$ 또는 $m=1+\sqrt{2}$

따라서 모든 실수 m의 값의 합은 2

참고로 $m=1+\sqrt{2}$일 때의 그림은 아래와 같다.



35. 답 ①

[해설] $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=2:3$이므로 $3\overline{\mathrm{AP}}=2\overline{\mathrm{BP}}$

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

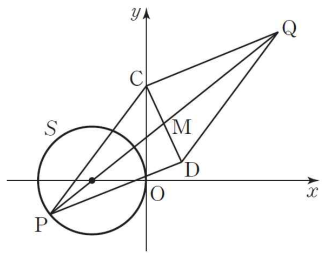
$3\sqrt{(x+2)^2+y^2}=2\sqrt{(x-3)^2+y^2}$

$9\{(x+2)^2+y^2\}=4\{(x-3)^2+y^2\}$

$5x^2+60x+5y^2=0,\ x^2+12x+y^2=0$

$(x+6)^2+y^2=36$

즉, 점 P는 원 $S:(x+6)^2+y^2=36$ 위의 점이다.



두 점 $\mathrm{C}(0,\ 10)$, $\mathrm{D}(4,\ 2)$의 중점을 M이라 하면 M의 좌표는

$\left(\frac{0+4}{2},\ \frac{10+2}{2}\right)$에서 $(2,\ 6)$

원 S의 중심의 좌표는 $\mathrm{S}(-6,\ 0)$이므로

$\overline{\mathrm{SM}}=\sqrt{(-6-2)^2+(0-6)^2}=10$

원 S의 반지름의 길이가 6이므로 선분 PM의 최댓값은

$10+6=16$

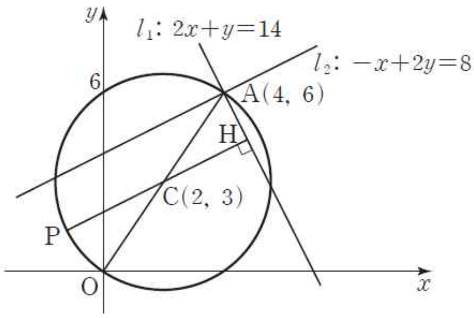
$\overline{\mathrm{PQ}}=2\overline{\mathrm{PM}}$이므로 선분 PQ의 길이의 최댓값은

$16\times2=32$

36. 답 12

[해설] 두 직선의 방정식 $2x+y=14$, $-x+2y=8$을 연립하여 풀면 $x=4$, $y=6$이므로 두 직선의 교점 A의 좌표는 $(4,\ 6)$이다. 점 $A(4,\ 6)$과 원점 O를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 중심을 C라 하면 점 C의 좌표는 $(2,\ 3)$이고 원의 반지름의 길이는

$\overline{OC}=\sqrt{(2-0)^2+(3-0)^2}=\sqrt{13}$



원의 중심 C에서 직선 l_1에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{CH}=\frac{|2\times2+3-14|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{7}{\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{5}}{5}$

점 P와 직선 l_1 사이의 거리의 최댓값은 $\frac{7\sqrt{5}}{5}+\sqrt{13}$

$\therefore a=\frac{7}{5},\ b=1$

$\therefore 5(a+b)=5\left(\frac{7}{5}+1\right)=12$

37. 답 ③

[해설] [출제의도] 원과 직선의 위치 관계를 활용하여 문제해결하기

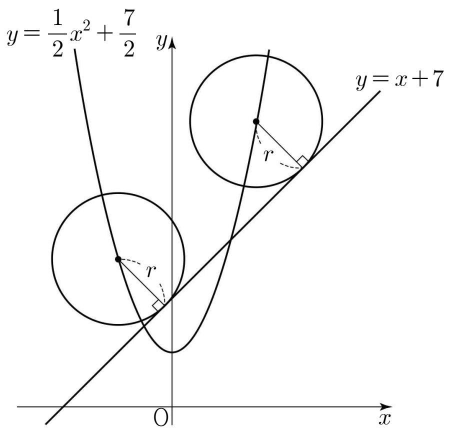
반지름의 길이가 r이고 중심이 이차함수

$y=\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{2}$의 그래프 위에 있는 원 중에서

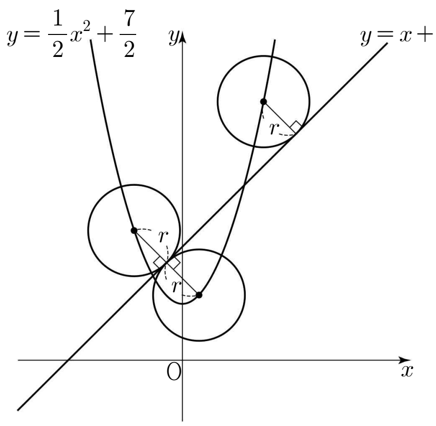
직선 $y=x+7$에 접하는 원의 개수 m은 반지름

r의 길이에 따라 다음과 같은 세 가지 경우가 있다.

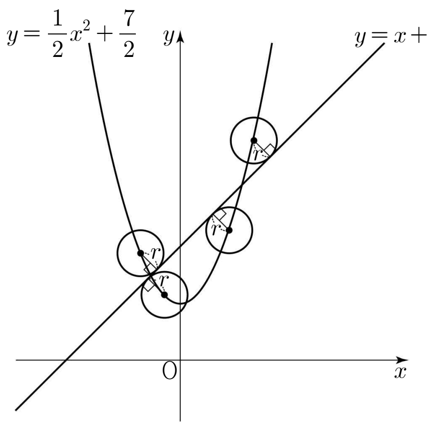
(ⅰ) $m=2$일 때,



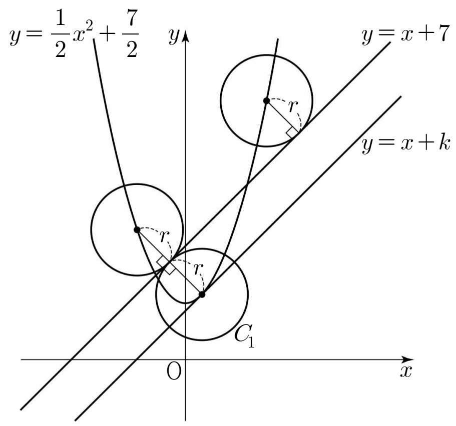
(ⅱ) $m=3$일 때,



(ⅲ) $m=4$일 때,



이 중 m이 홀수인 경우는 $m=3$일 때이므로 직선 $y=x+7$에 접하는 원 중 직선 $y=x+7$의 아래쪽에 위치한 원이 한 개일 때이다.



이 원을 C_1이라 하면 원 C_1의 반지름의 길이 r는 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{2}$의 그래프에 접하고 기울기가 1인 직선과 직선 $y=x+7$ 사이의 거리와 같다.

이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{2}$의 그래프에 접하고 기울기가 1인 직선을 $y=x+k$라 하면

이차방정식 $\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{2}=x+k$가 중근을 가져야하므로

$x^2-2x+7-2k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=2^2-4\times1\times(7-2k)=0$에서 $k=3$

두 직선 $y=x+7$과 $y=x+3$ 사이의 거리는

직선 $y=x+3$ 위의 점 $(0,3)$과 직선 $y=x+7$

사이의 거리와 같으므로

$\frac{|-3+7|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$

$\therefore\ r=2\sqrt{2}$

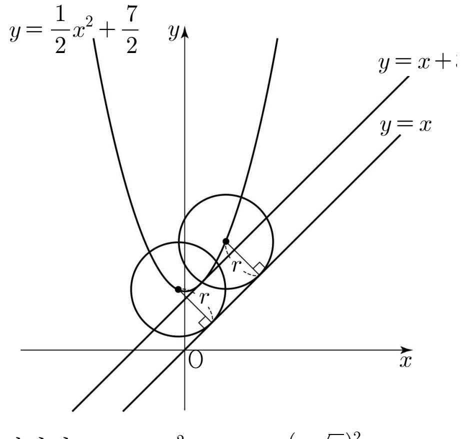
직선 $y=x$와 직선 $y=x+3$ 사이의 거리는

직선 $y=x$ 위의 점 $(0,0)$과 직선 $y=x+3$

사이의 거리와 같으므로

$\frac{|3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$r=2\sqrt{2}>\frac{3\sqrt{2}}{2}$이므로 $n=2$



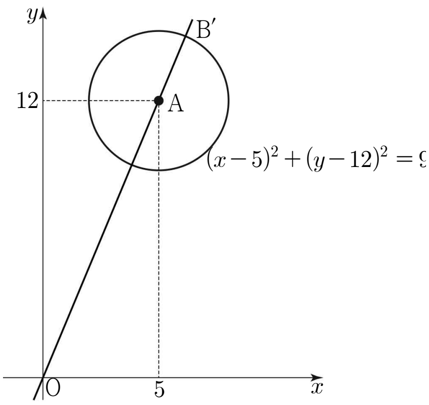
따라서 $m+n+r^2=3+2+(2\sqrt{2})^2=13$

38. 답 256

[해설] [출제의도] 원의 성질을 활용하여 문제해결하기
두 점 A(5, 12), B(a, b)에 대하여 선분 AB의 길이가 3이므로

$\sqrt{(a-5)^2+(b-12)^2}=3$

$(a-5)^2+(b-12)^2=9$



점 B는 원 $(x-5)^2+(y-12)^2=9$ 위의 점이다.
원점 O에 대하여 $a^2+b^2=\overline{\text{OB}}^2$이므로
$\overline{\text{OB}}$의 길이가 최대일 때 a^2+b^2이 최댓값을 갖는다.
직선 OA가 원과 만나는 두 점 중 원점에서 더 멀리 있는 점을 B′라 하면 선분 OB의 길이의 최댓값은 선분 OB′의 길이와 같다.

$\overline{\text{OB}'}=\overline{\text{OA}}+\overline{\text{AB}'}$
$=\sqrt{5^2+12^2}+3$
$=\sqrt{169}+3$
$=13+3$
$=16$

선분 OB의 길이의 최댓값은 16
따라서 a^2+b^2의 최댓값은 $16^2=256$

39. **정답** ③
[출제의도] 직선의 대칭이동을 할 수 있다.
직선 $y=\frac{2}{3}x-2$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$x=\frac{2}{3}y-2$ 즉, $y=\frac{3}{2}x+3$
이므로 y절편은 3이다.

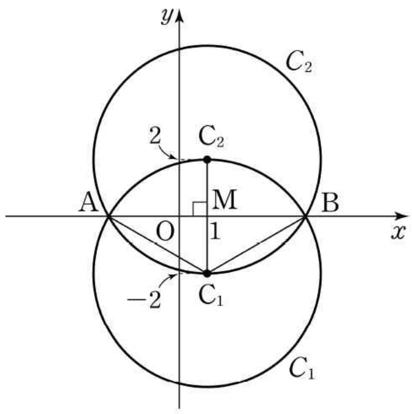
40. **정답** 16
#평행이동 #넓이
좌표평면에서 직선 $2x-y+15=0$을 x 축의 방향으로 2만큼 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$2(x-2)-(y+3)+15=0$, 즉 $2x-y+8=0$
이 직선과 x축, y축이 만나는 점의 좌표는 각각 $(-4,\ 0)$, $(0,\ 8)$이므로 구하는 부분의 넓이는
$\frac{1}{2}\times4\times8=16$

41. **정답** 11
이해력-도형의 방정식
점 A$(2,\ -1)$을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점은
B$(2+5,\ -1-3)$, 즉 B$(7,\ -4)$이고
점 B$(7,\ -4)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은
C$(-4,\ 7)$이다.
$\therefore b-a=7-(-4)=11$

42. **정답** ②
[출제의도] 도형의 평행이동 이해하기
직선 $2x+y+5=0$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의 방정식은 $2(x-2)+(y+1)+5=0$
$2x+y+2=0$
따라서 $a=2$

43. **정답** ⑤
[출제의도] 도형의 평행이동 이해하기
점 P$(a,\ a^2)$을 x축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한
점 $\left(a-\frac{1}{2},\ a^2+2\right)$가 직선 $y=4x$ 위에 있으므로
$a^2+2=4a-2$
$(a-2)^2=0$
따라서 $a=2$

44. **정답** ①
[수학 내적 문제 해결 능력-도형의 방정식]
두 원 C_1, C_2의 중심을 각각 C_1, C_2라 하자.
$x^2+y^2-2x+4y=k$에서 $(x-1)^2+(y+2)^2=k+5$이므로 중심 C_1의 좌표는 $\text{C}_1(1,\ -2)$, 반지름의 길이는 $\sqrt{k+5}$이다.
한편, 원 C_1이 원 C_2의 중심 C_2를 지나려면 원 C_1의 반지름의 길이는 선분 C_1C_2의 길이와 같아야 한다.
원 C_1을 x축에 대하여 대칭이동한 원 C_2의 중심은 $\text{C}_2(1,\ 2)$이므로 $\overline{\text{C}_1\text{C}_2}=2-(-2)=4$
따라서 $\sqrt{k+5}=4$이므로 $k+5=4^2$
$\therefore k=16-5=11$



한편, 두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이는 4로 같으므로 두 원의 교점을 A, B라 하고, 선분 AB의 중점을 M이라 하면

$\overline{C_1M} \perp \overline{AB}$이고 $\overline{AC_1}=4$, $\overline{MC_1}=2$이다.

즉, $\overline{AM}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$이므로

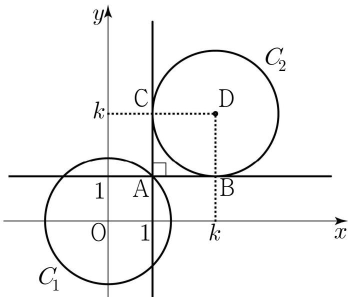
$\angle AC_1B=120^\circ$이고, $\overline{AB}=2\overline{AM}=4\sqrt{3}$

따라서 그림에서 두 원 C_1, C_2의 내부의 공통부분의 넓이는

$$S=2\left(16\pi\times\frac{120^\circ}{360^\circ}-\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times2\right)=\frac{32}{3}\pi-8\sqrt{3}$$

45. 정답 ①

[출제의도] 도형의 평행이동을 활용하여 문제 해결하기



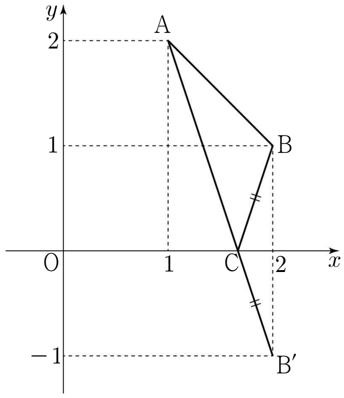
점 A(1, 1)에서 원 C_2에 그은 두 접선이 원 C_2와 만나는 점을 각각 B, C라 하고, 원 C_2의 중심을 D(k, k)라 하자.

사각형 ABDC는 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정사각형이다.

$k>2$이므로 $k=1+\sqrt{2}$

46. 정답 12

[출제의도] 대칭이동을 활용하여 문제해결하기



삼각형 ABC의 둘레의 길이는 $\overline{AC}+\overline{CB}+\overline{BA}$

점 B(2, 1)을 x축에 대하여 대칭이동한 점을

B′이라 하면 점 B′의 좌표는 (2, −1)이다.

$\overline{AC}+\overline{CB}=\overline{AC}+\overline{CB'}\geq\overline{AB'}$이고

$\overline{BA}=\sqrt{2}$, $\overline{AB'}=\sqrt{10}$이므로

삼각형 ABC의 둘레의 길이의 최솟값은 $\sqrt{2}+\sqrt{10}$

따라서 $a+b=12$

47. 답 56

[해설] [출제의도] 도형의 대칭이동을 이해하여 원의 중심의 좌표를 구한다.

원 $x^2+y^2+10x-12y+45=0$은

$(x+5)^2+(y-6)^2=16$이므로

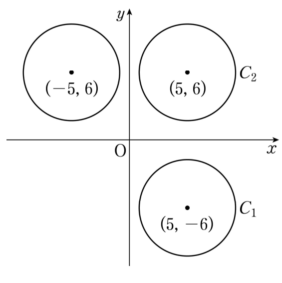
중심의 좌표는 $(-5,\ 6)$이다.

원 C_1의 중심의 좌표는 점 $(-5,\ 6)$을 원점에 대하여 대칭이동한 점이므로 $(5,\ -6)$이다.

원 C_2의 중심의 좌표는 점 $(5,\ -6)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점이므로 $(5,\ 6)$이다.

$a=5$, $b=6$이므로

$10a+b=50+6=56$



48. 답 ①

[해설] **[출제의도] 도형의 대칭이동 이해하기**

직선 $y=ax-6$을 x축에 대하여 대칭이동한
직선은 $y=-ax+6$이고, 이 직선이
점 (2, 4)를 지나므로 $4=-2a+6$
따라서 $a=1$

49. 답 ①

[해설] **[출제의도] 점의 대칭이동 이해하기**

A(2, 3), B(−2, −3)이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-2-2)^2+(-3-3)^2}=2\sqrt{13}$

50. 답 3

[해설] 점 $(4,\ -3)$을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동하면 $(4+(-3),\ -3+5)$에서 $(1,\ 2)$

$\therefore\ a=1,\ b=2$

$\therefore\ a+b=1+2=3$

51. 답 ⑤

[해설] 이해력 - 도형의 방정식

직선 $l: y=3x+k$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 직선의 방정식은 $y+4=3(x-2)+k$

$\therefore y=3x+k-10$

직선 $y=3x+k-10$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-y=-3x+k-10$

$\therefore y=3x-k+10$

직선 l과 직선 $y=3x-k+10$이 일치해야 하므로

$3x+k=3x-k+10,\ 2k=10\ \ \therefore k=5$

52. 답 ⑤

[해설] **[출제의도] 선분의 내분을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기**

직선 $3x+4y-12=0$이 x축, y축과 만나는 점은 각각 $\mathrm{A}(4,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 3)$이므로

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점은 $\mathrm{P}\left(\frac{4}{3},\ 2\right)$

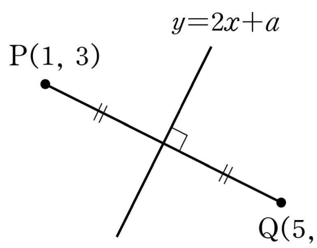
점 P를 x축, y축에 대하여 대칭이동한 점은 각각 $\mathrm{Q}\left(\frac{4}{3},\ -2\right)$, $\mathrm{R}\left(-\frac{4}{3},\ 2\right)$이므로

삼각형 RQP의 무게중심의 좌표 $(a,\ b)$는 $\left(\frac{4}{9},\ \frac{2}{3}\right)$

따라서 $a+b=\frac{10}{9}$

53. 답 ③

[해설]



두 점 P, Q가 직선 $y=2x+a$에 대하여 서로 대칭이므로 직선 $y=2x+a$는 선분 PQ의 수직이등분선이다.

선분 PQ의 중점의 좌표는 $\left(\frac{1+5}{2},\ \frac{3+b}{2}\right)$, 즉 $\left(3,\ \frac{3+b}{2}\right)$이고, 중점이 직선 $y=2x+a$ 위의 점이므로

$\frac{3+b}{2}=6+a$

$\therefore\ 2a-b=9$ ……㉠

또한 두 점 P, Q를 지나는 직선과 직선 $y=2x+a$가 서로 수직이므로

$2\times\frac{b-3}{5-1}=-1$

$\therefore\ b=1$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$2a-1=-9$이므로 $a=-4$

$\therefore\ a+b=(-4)+1=-3$

54. 답 ④

[해설] [출제의도] 도형의 평행이동 이해하기

직선 $3x+4y+17=0$을 x축의 방향으로 n만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$3(x-n)+4y+17=0$

직선 $3x+4y-3n+17=0$이 원 $x^2+y^2=1$에 접하므로 원의 중심 $(0,\ 0)$과

직선 $3x+4y-3n+17=0$ 사이의 거리가 1이다.

$\frac{|-3n+17|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$에서

$-3n+17=5$ 또는 $-3n+17=-5$

$\therefore\ n=4$ 또는 $n=\frac{22}{3}$

n은 자연수이므로 $n=4$

55. 정답 ②

[출제의도] 집합 이해하기

$A=B$이므로 $a=4,\ b=2$

따라서 $a\times b=8$

56. 정답 ②

계산 능력 - 집합과 명제

[해설]

$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$, $B=\{1,\ 5,\ 9\}$에서 $A\cap B=\{1,\ 5\}$이므로 모든 원소의 합은 $1+5=6$

57. 정답 ③

$A-B=\{2,\ 4\}$이므로 모든 원소의 합은 6이다.

58. 정답 ⑤

[출제의도] 차집합의 원소의 합을 구할 수 있다.

$A\cap B=\{4\}$이므로 $B-A=\{5,\ 6\}$

따라서 집합 $B-A$의 모든 원소의 합은 $5+6=11$

59. 정답 ③

$A\cap B=\{3\}$이므로 $a^2-6=3$

$\therefore\ a=-3$ 또는 $a=3$

(i) $a=3$이면 $B=\{4,\ 5,\ 15\}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=-3$이면 $B=\{-1,\ 3,\ 4\}$이므로 $B-A=\{-1,\ 4\}$
(i), (ii)에서 집합 $B-A$의 모든 원소의 합은 $-1+4=3$

60. 정답 ⑤
계산 능력 - 집합과 명제
$A-B=\{1,\ 4\}$이므로
$a=4,\ b=3$
$\therefore\ a+b=7$

61. 정답 ②
[출제의도] 교집합의 원소의 합을 구할 수 있다.
$A\cap B=\{1,\ 3\}$이므로 집합 $A\cap B$의 모든 원소의 합은
$1+3=4$이다.

62. 정답 ⑤
이해 능력-집합과 명제
$B^c=\{2,\ 8\}$이므로 $A\cup B^c=\{2,\ 3,\ 7,\ 8\}$이다.
따라서 집합 $A\cup B^c$의 모든 원소의 합은
$2+3+7+8=20$

63. 정답 5
[출제의도] 집합 사이의 포함관계를 이용하여
추론하기
$A\subset B$이고 a는 양수이므로 $a=5$

64. 정답 48
[출제의도] 집합의 포함관계를 이용하여 조건에 맞는 집합을 추론한다.
$\sqrt{25}=5$이므로
$A_{25}=\{1,\ 3,\ 5\}$
$1\le\sqrt{n}<7$이면
$A_n\subset A_{25}$이므로
$1\le n<49$
따라서 자연수 n의 최댓값은 48이다.

65. 정답 20
[출제의도] 집합의 연산을 이용하여 부분집합의 개수를 구할 수 있다.
$\{1,\ 2\}-A=\{1\}$이므로 집합 A는 1은 포함하지 않고, 2는
반드시 포함해야 한다.
한편, $n(A)=3$이므로 집합 A는 집합 $\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$의 부분집합
중 원소의 개수가 2인 집합에 2를 포함시킨 집합이다.
따라서 구하는 모든 집합 A의 개수는 서로 다른 4개에서 2개를
택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_4C_2=6$

66. 정답 ⑤
$B-A=B$에서 $A\cap B=\varnothing$
$A\cap B=\varnothing$이려면 $a\neq a^2,\ a^2+1\neq a+3$
a는 자연수이므로 $a\neq a^2$에서 $a\neq 1$
$a^2+1\neq a+3$에서 $a\neq 2$
따라서 조건을 만족시키는 a의 값은 3부터 10까지의
자연수이므로
구하는 a의 값의 합은 $3+4+\cdots+10=52$

67. 정답 16
이해력 - 집합과 명제
$A\cup B=U$이므로 $\{5,\ 6\}\subset B$이어야 한다.
따라서 집합 B의 개수는 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$의 부분집합의 개수와
같으므로
$2^4=16$

68. 정답 24
#부분집합의 개수
[출제의도]부분집합의 개수를 구할 수 있다.
집합 B의 모든 부분집합의 개수는
$2^5=32$
이 중에서 $X\cap A=\varnothing$인 집합 X의 개수는 집합 $\{4,\ 5,\ 6\}$의
부분집합의 개수와 같으므로
$2^3=8$
따라서 $X\cap A\neq\varnothing$인 집합 X의 개수는
$32-8=24$

69. 정답 68
[출제의도] 부분집합의 개수를 구할 수 있다.
(i) 집합 X의 원소 중 가장 큰 수가 9이고 가장 작은 수가 2일
때
집합 X의 개수는 집합 $\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$의 부분집합의
개수와 같으므로
$2^6=64$
(ii) 집합 X의 원소 중 가장 큰 수가 6이고 가장 작은 수가 3일
때
집합 X의 개수는 집합 $\{4,\ 5\}$의 부분집합의 개수와 같으므로
$2^2=4$
(i), (ii)에서 구하는 집합 X의 개수는
$64+4=68$

70. 정답 32
이해력 - 집합과 명제
$x=2$일 때, $\dfrac{(2-1)!}{2}=\dfrac{1}{2}$이므로 집합 A의 원소가 아니다.
$x=3$일 때, $\dfrac{(3-1)!}{3}=\dfrac{2}{3}$이므로 집합 A의 원소가 아니다.
$x=4$일 때, $\dfrac{(4-1)!}{4}=\dfrac{3\times2\times1}{4}=\dfrac{23}{2}$이므로 집합 A의 원소가
아니다.

$x=5$일 때, $\dfrac{(5-1)!}{5}=\dfrac{4\times3\times2\times1}{5}=\dfrac{24}{5}$이므로 집합 A의 원소가 아니다.

$x=6$일 때, $\dfrac{(6-1)!}{6}=\dfrac{5\times4\times3\times2\times1}{6}=20$이므로 집합 A의 원소이다.

$x=7$일 때, $\dfrac{(7-1)!}{7}=\dfrac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{7}=\dfrac{720}{7}$이므로 집합 A의 원소가 아니다.

$x=8$일 때, $\dfrac{(8-1)!}{8}=\dfrac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{8}=630$이므로 집합 A의 원소이다.

$x=9$일 때, $\dfrac{(9-1)!}{9}=\dfrac{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{9}=4480$이므로 집합 A의 원소이다.

따라서 $A=\{6,\ 8,\ 9\}$이므로 $A\subset X\subset U$를 만족시키는 모든 집합 X의 개수는 $2^{8-3}=32$이다.

[다른 풀이]

(i) x가 소수일 때

$(x-1)!$은 x를 인수로 가질 수 없으므로 $\dfrac{(x-1)!}{x}$은 자연수일 수 없다.

(ii) $x=a\times b$ $(1<a<b,\ a,\ b$는 자연수$)$일 때,

$1<a<b\le x-1$이므로 $(x-1)!$은 a와 b를 인수로 가진다.

따라서 $\dfrac{(x-1)!}{x}$은 자연수이다.

이를 만족시키는 $1<x<10$인 자연수는

$a=2$인 경우 $x=6,\ 8$

$a=3$인 경우 x는 집합 U의 원소가 아니다.

따라서 $A\supset\{6,\ 8\}$

(iii) $x=c^2$ $(c$는 소수$)$일 때,

$c=2$일 때, $\dfrac{3!}{4}=\dfrac{3}{2}$이므로 자연수가 아니다.

$c=3$일 때, $\dfrac{8!}{9}$은 자연수이다.

$c\ge5$일 때, $c^2\ge25$이므로 x는 집합 U의 원소가 아니다.

따라서 $A\supset\{9\}$

(i), (ii), (iii)에 의하여

$A=\{6,\ 8,\ 9\}$

따라서 $A\subset X\subset U$를 만족시키는 모든 집합 X의 개수는 $2^{8-3}=32$이다.

71. 정답 ⑤

$A\cap B=B$ 이므로 $B\subset A$이고, 집합 B에서

$(m^2-3m)x=4$

(i) $m^2-3m=0$, 즉 $m=0$또는 $m=3$이면

집합 $B=\varnothing$ 이므로 $B\subset A$를 만족시킨다.

(ii) $m^2-3m\ne0$이면 집합 B의 원소는 $x=\dfrac{4}{m^2-3m}$ 한 개뿐이다.

$B\subset A$이므로 $\dfrac{4}{m^2-3m}=-2$ 또는 $\dfrac{4}{m^2-3m}=1$이어야 한다.

$\dfrac{4}{m^2-3m}=-2$이면 $m^2-3m+2=0$이므로

$m=1$또는 $m=2$

$\dfrac{4}{m^2-3m}=1$이면 $m^2-3m-4=0$이므로

$m=-1$ 또는 $m=4$

(i),(ii)에서 모든 실수 m의 값의 합은

$0+3+1+2-1+4=9$

72. 정답 96

(i) $2\in B,\ 4\in B$인 경우

$5\notin B,\ 7\notin B$이고, 집합 B의 모든 원소의 합은 짝수이어야 하므로 세 수 1, 3, 9가 모두 집합 B의 원소가 아니거나 세 수 1, 3, 9 중 두 수만 집합 B의 원소이다. 한편, 6, 8은 집합 B의 원소이거나 원소가 아니어도 되므로 주어진 조건을 만족시키는 집합 B의 개수는 $({}_3C_0+{}_3C_2)\times2^2=(1+3)\times2^2=16$

(ii) $5\in B,\ 7\in B$인 경우

$2\notin B,\ 4\notin B$이고, 세 수 1, 3, 9가 모두 집합 B의 원소가 아니거나 세 수 1, 3, 9 중 두 수만 집합 B의 원소이다. 한편, 6, 8은 집합 B의 원소이거나 원소가 아니어도 되므로 주어진 조건을 만족시키는 집합 B의 개수는

$({}_3C_0+{}_3C_2)\times2^2=(1+3)\times2^2=16$

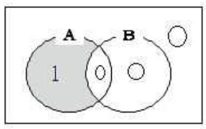
(iii) 두 수 2, 4 중 한 수만 집합 B의 원소이고, 두 수 5, 7 중 한 수만 집합 B의 원소인 경우

세 수 1, 3, 9 중 한 수만 집합 B의 원소이거나 세 수 1, 3, 9가 모두 집합 B의 원소이다. 한편, 6, 8은 집합 B의 원소이거나 원소가 아니어도 되므로 주어진 조건을 만족시키는 집합 B의 개수는 ${}_2C_1\times{}_2C_1\times({}_3C_1+{}_3C_3)\times2^2=64$

(i)~(iii)에서 구하는 집합 B의 개수는

$16+16+64=96$

73. 정답 ①



그림에서

2, 3, 4, 5가 들어갈 수 있는 자리는 각각 3곳이므로 $3^4=81$

74. 정답 47

수학 외적 문제 해결 능력−집합과 명제

50명의 학생들의 집합을 U, 문제를 풀 수 있다고 대답한 학생의 집합을 A, 실제로 답을 맞춘 학생의 집합을 B라고 하면 주어진 조건에서

$n(A)=36,\ \ n(B)=30,\ \ n(A\cap B^c)=9$

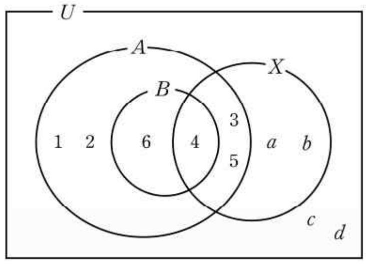
이때 $n(U)=50$이므로

$n(B^c) = 50 - 30 = 20$
이때 문제를 풀 수 있다고 대답했거나 실제로 답을 맞추지 못한 학생의 집합은 $A \cup B^c$이므로 구하는 학생의 수는
$n(A \cap B^c) = n(A) + n(B^c) - n(A \cap B^c)$
$= 36 + 20 - 9 = 47$

75. 정답 ②
[출제의도] 집합의 연산을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.
은행 A와 은행 B를 이용하는 고객의 집합을 각각 A, B라 하면
조건 (가)에서
$n(A) + n(B) = 82$
$n(A \cup B) = 65$
$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$
$= 82 - 65$
$= 17$
따라서 한 은행만 이용하는 고객의 수는 $65 - 17 = 48$이고 조건 (나)에서 두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 남자 고객의 수와 두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 여자 고객의 수는 각각 24명이다.
따라서 은행 A와 은행 B를 모두 이용하는 여자 고객의 수는 $30 - 24 = 6$이다.
[다른 풀이]
조건 (나)에서 두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 남자 고객의 수와 두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 여자 고객의 수가 같으므로 이를 x라 하면 은행 A와 은행 B를 모두 이용하는 남자 고객의 수는 $35 - x$이고, 은행 A와 은행 B를 모두 이용하는 여자 고객의 수는 $30 - x$이다.
조건 (가)에서
$\{x + 2(35 - x)\} + \{x + 2(30 - x)\} = 82$
$2x + (70 - 2x) + (60 - 2x) = 82$
$2x = 48$
$x = 24$
따라서 은행 A와 은행 B를 모두 이용하는 여자 고객의 수는 $30 - 24 = 6$이다.

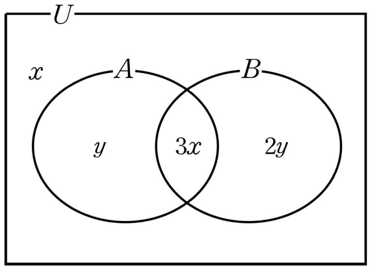
76. 정답 36
[출제의도] 집합의 연산 법칙을 이해한다.
$A = \{x \mid x$는 4의 배수 $\}$
$= \{4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20\}$
$B = \{x \mid x$는 20의 약수 $\}$
$= \{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 20\}$
드모르간의 법칙에 의하여
$(A^C \cup B)^C = (A^C)^C \cap B^C$
$= A \cap B^C$
$= A - B$
$A - B = \{8,\ 12,\ 16\}$이므로 집합 $A - B$의 모든 원소의 합은 $8 + 12 + 16 = 36$이다.

77. 정답 ④
추론 능력(추측) - 집합과 명제
[해설]
$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $A \cap X = \{3,\ 4,\ 5\}$이므로
$1 \not\in X,\ 2 \not\in X,\ 6 \not\in X$이고 $3 \in X,\ 4 \in X,\ 5 \in X$이다.
$B = \{4,\ 6\}$이고
$n(B \cup X) = n(B) + n(X) - n(B \cap X)$이므로
$6 = 2 + n(X) - 1$
$\therefore\ n(X) = 5$
$X = \{3,\ 4,\ 5,\ a,\ b\}$ $(5 < a < b)$라 하면
$a \in \{7,\ 8,\ 9,\ 10\}$, $b \in \{7,\ 8,\ 9,\ 10\}$
이므로 $a = 9$, $b = 10$일 때, 집합 X의 모든 원소의 합은 최댓값을 갖는다.
따라서 구하는 합은 $3 + 4 + 5 + 9 + 10 = 31$
[다른 풀이]
주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



$\{a,\ b,\ c,\ d\} = \{7,\ 8,\ 9,\ 10\}$이므로 $\{a,\ b\} = \{9,\ 10\}$일 때, 부분집합 X의 모든 원소의 합은
최댓값 $3 + 4 + 5 + 9 + 10 = 31$을 갖는다.

78. 정답. 9
수학 외적 문제 해결 능력 - 집합과 명제
[해설]
반 학생 전체의 집합을 U라 하고 두 편의 연극 A, B를 본 학생을 원소로 하는 집합을 각각 A, B라 하자. 세 집합 U, A, B의 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



$n((A \cup B)^C) = x$, $n(A - B) = y$라 하면 문제의 조건에 의하여 $4x + 3y = 24$, $3x + y = 13$이므로 $x = 3$이다.
따라서 두 편의 연극을 모두 본 학생 수는 9이다.

79. 정답 ④
[출제의도] 집합을 이용하여 문제를 해결한다.
조건 (가)에 의해 집합 A의 모든 원소 a에 대하여 $2a \not\in A$이므로 a와 $2a$가 집합 A에 동시에 속할 수 없다.
a, $2a$가 모두 속하는 집합들로 집합 U를 나누어 보면 다음과 같다.

$\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}$, $\{3,\ 6,\ 12\}$, $\{5,\ 10\}$, $\{7,\ 14\}$, $\{9,\ 18\}$, $\{11\}$, $\{13\}$, $\{15\}$, $\{17\}$, $\{19\}$
각 집합에 속하는 모든 원소들을 크기 순서대로 나열 할 때, 이웃한 두 원소는 동시에 A에 속할 수 없다.
$\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}$에서 조건 (가)를 만족시키는 집합 A의 부분집합은
$\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{8\}$, $\{16\}$, $\{1,\ 4\}$, $\{1,\ 8\}$, $\{1,\ 16\}$, $\{2,\ 8\}$, $\{2,\ 16\}$, $\{4,\ 16\}$, $\{1,\ 4,\ 16\}$
이다.
이 중 집합 A의 원소의 개수가 최대일 때는
$\{1,\ 4,\ 16\} \subset A$인 경우이다.
마찬가지 방법으로 $\{3,\ 6,\ 12\}$에서 $\{3,\ 12\} \subset A$이고 세 집합 $\{5,\ 10\}$, $\{7,\ 14\}$, $\{9,\ 18\}$에서는 각 집합의 두 원소 중 하나의 원소가 A에 속한다.
또한 집합 A의 원소의 개수가 최대가 되기 위해서는 11, 13, 15, 17, 19는 항상 A에 속해야 한다.
즉, $\{11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19\} \subset A$이다.
이상에서 반드시 포함되어야 하는 원소의 합은
$1+3+4+11+12+13+15+16+17+19=111$이다.
조건 (나)에 의해 각 집합 $\{5,\ 10\}$, $\{7,\ 14\}$, $\{9,\ 18\}$에서 한 개씩 선택한 원소의 합이 최대인 홀수가 되도록 5, 14, 18을 선택한다.
따라서 집합 A의 모든 원소의 합의 최댓값은
$111+5+14+18=148$이다.

80. **정답** 10
[출제의도] 조건으로 제시된 집합을 이용하여 문제를 해결한다.
집합 A의 모든 원소의 합이 100이므로 집합 A에 25 이상인 원소가 적어도 2개 포함되어 있어야 한다. 전체집합 U에서 25 이상인 원소는 25, 26, 28, 29뿐이다.
(i) 집합 A에 25 이상의 원소가 3개만 속한 경우
  26, 28, 29가 속한 경우: $A=\{17,\ 26,\ 28,\ 29\}$
  25, 26, 29가 속한 경우: $A=\{20,\ 25,\ 26,\ 29\}$
  25, 28, 29 또는 25, 26, 28이 속한 경우:
  원소의 합이 100이기 위해서는 나머지 한 원소가 3의 배수가 되어야 한다. 그런데 3의 배수는 전체집합 U의 원소가 아니므로 조건을 만족시키는 집합 A가 존재하지 않는다.
(ii) 집합 A에 25 이상의 원소가 2개만 속한 경우
  25보다 작은 전체집합 U의 원소 중 가장 큰 두 원소의 합은 $22+23=45$이다. 그러므로 네 원소의 합이 100이 되기 위해서는 25 이상인 두 원소의 합이 55 이상이어야 한다.
  28, 29가 속한 경우: $A=\{20,\ 23,\ 28,\ 29\}$
  26, 29가 속한 경우: $A=\{22,\ 23,\ 26,\ 29\}$
따라서 위의 네 집합에 대하여 $x_4-x_3+x_2-x_1$의 값은 각각 10, 8, 4, 4이고 이 중 최댓값은 10이다.
[다른 풀이]
$x_1+x_2+x_3+x_4=100$에서 $x_1+x_3=100-(x_2+x_4)$
$x_4-x_3+x_2-x_1=x_4+x_2-(x_3+x_1)$
$\qquad =x_4+x_2-\{100-(x_2+x_4)\}=2(x_2+x_4)-100$
이 값이 최대가 되기 위해서는 x_2+x_4의 값이 최대가 되어야 하므로 $x_4=29$이다.
그런데 $x_4>x_3>x_2$에서 x_2는 28이 될 수 없으므로 $x_3=28$, $x_2=26$이다.
따라서 최댓값은 $2\times(29+26)-100=10$이다.