

정답 및 해설

1. 정답 ④

[출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계와 곱셈공식을 이용하여 식의 값을 구할 수 있다.

이차방정식 $x^2 + 8x - 6 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에서

$$\alpha + \beta = -8, \alpha\beta = -6$$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= (-8)^2 - 2 \times (-6) = 76 \end{aligned}$$

2. 정답 ④

[출제의도] 이차방정식의 근을 이용하여 상수의 값을 구할 수 있다.

이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 b 이므로

$$b^2 + ab + b = 0$$

$$b(b + a + 1) = 0$$

이때 $b \neq 0$ 이므로

$$a + b + 1 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

이차방정식 $x^2 + bx + a = 0$ 의 한 근이 6 이므로

$$6^2 + 6b + a = 0$$

$$\therefore a + 6b + 36 = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 6, b = -7$$

$$\therefore a - b = 6 - (-7) = 13$$

3. 정답 ②

[출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 미정계수를 구할 수 있다.

이차방정식 $x^2 - kx + k + 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 근과 계수의 관계에서

$$\alpha + \beta = k, \alpha\beta = k + 2$$

이때 두 근의 제곱의 합이 20 이므로

$$\alpha^2 + \beta^2 = 20 \text{에서}$$

$$(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 20, k^2 - 2(k + 2) = 20$$

$$k^2 - 2k - 24 = 0, (k + 4)(k - 6) = 0$$

$$\therefore k = -4 \text{ 또는 } k = 6$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은

$$-4 + 6 = 2$$

4. 정답 4

[출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 미정계수를 구할 수 있다.

a, b 가 실수이고 허수 α 가 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이므로 $\bar{\alpha}$ 도 이 이차방정식의 한 근이다.

$$\text{근과 계수의 관계에서 } \alpha + \bar{\alpha} = -a, \alpha\bar{\alpha} = b \quad \dots \textcircled{1}$$

또한, $\alpha + 2$ 가 이차방정식 $x^2 - bx + a = 0$ 의 한 근이므로 $\bar{\alpha} + 2$ 도 이 이차방정식의 한 근이다.

근과 계수의 관계에서

$$(\text{두근의합}) = (\alpha + 2) + (\bar{\alpha} + 2) = b$$

$$(\alpha + \bar{\alpha}) + 4 = b$$

$$\therefore -a + 4 = b (\because \textcircled{1}) \quad \dots \textcircled{2}$$

$$(\text{두근의곱}) = (\alpha + 2)(\bar{\alpha} + 2) = a$$

$$\alpha\bar{\alpha} + 2(\alpha + \bar{\alpha}) + 4 = a$$

$$\therefore 3a - 4 = b (\because \textcircled{1}) \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{을 연립하여 풀면 } a = 2, b = 2$$

$$\therefore ab = 2 \times 2 = 4$$

5. 정답 ②

이차함수 $y = x^2 + 10x + a$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2 + 10x + a = 0$ 의 판별식 D 가

$$D > 0 \text{이어야 하므로 } \frac{D}{4} = 5^2 - a > 0 \text{에서}$$

$$a < 25$$

따라서 자연수 a 의 최댓값은 24 이다.

6. 정답 ④

$x = 1 - 2i$ 가 주어진 방정식의 근이므로 $x - 1 = -2i$ 를 방정식

$$(x - 1)^2 + a(x - 1) + b = 0 \text{에 대입하면}$$

$$(-2i)^2 - 2ai + b = 0$$

$$-2ai + b - 4 = 0$$

a, b 는 실수이므로

$$a = 0, b - 4 = 0$$

$$\text{따라서 } a = 0, b = 4 \text{이므로}$$

$$a + b = 0 + 4 = 4$$

7. 정답 ②

이차방정식 $x^2 - 7x + k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-7)^2 - 4k = 49 - 4k$$

주어진 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$$D > 0 \text{이어야 하므로 } 49 - 4k > 0$$

$$\text{즉, } k < \frac{49}{4} = 12.25$$

따라서 구하는 자연수 k 의 최댓값은 12 이다.

8. 정답 20

[출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계 이해하기
근과 계수의 관계에 의해 $\alpha + \beta = k, \alpha\beta = 4$ 이다.

$$\text{따라서 } \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{k}{4} = 5 \text{이므로 } k = 20 \text{이다.}$$

9. 정답 ⑤

[출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계 이해하기
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -6, \alpha\beta = 7$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-6)^2 - 2 \times 7 = 22$$

10. **정답** ④

[출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계 이해하기

이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 2, 8이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$2 + 8 = -a, \quad 2 \times 8 = b$$

$$a = -10, \quad b = 16$$

$$\text{따라서 } a + b = 6$$

11. **정답** ③

[출제의도] 이차방정식의 판별식을 이용하여 근을 판별할 수 있다.

이차방정식 $x^2 - 2ax + a(a+b) = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때, 모든 실수 a 에 대하여 이 이차방정식이 중근을 가지려면 $D=0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \frac{D}{4} = a^2 - a(a+b) = 0 \text{에서}$$

$$-ab = 0 \quad \therefore ab = 0$$

이때 모든 실수 a 에 대하여 $ab=0$ 이 성립하려면 $b=0$ 이어야 한다.

12. **정답** 480

수학 내적 문제 해결 능력-방정식과 부등식

조건 (가)에서 $x(x+3) = x^2 + 3x = X$ 라 하면

$$(x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2 = X + 2 \text{이므로}$$

$$4x(x+1)(x+2)(x+3) - 96$$

$$= 4\{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\} - 96$$

$$= 4(x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) - 96$$

$$= 4X(X+2) - 96 = 4(X^2 + 2X - 24)$$

$$= 4(X+6)(X-4)$$

$$= 4(x^2 + 3x + 6)(x^2 + 3x - 4)$$

$$= 4(x^2 + 3x + 6)(x+4)(x-1)$$

이때 이차방정식 $x^2 + 3x + 6 = 0$ 의 해는

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 6}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{15}i}{2}$$

이므로 이차식 $x^2 + 3x + 6$ 을 복소수의 범위에서 인수분해하면

$$\left(x - \frac{-3 + \sqrt{15}i}{2}\right) \left(x - \frac{-3 - \sqrt{15}i}{2}\right)$$

$$= \left(x + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{15}i}{2}\right) \left(x + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{15}i}{2}\right)$$

따라서 사차식 $4x(x+1)(x+2)(x+3) - 96$ 은

$$4(x+4)(x-1) \left(x + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{15}i}{2}\right) \left(x + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{15}i}{2}\right)$$

로 인수분해된다.

따라서 모든 실수 x 에 대하여

$$4(x+4)(x-1) \left(x + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{15}i}{2}\right) \left(x + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{15}i}{2}\right)$$

$$= A(x)B(x)C(x)D(x)$$

가 성립한다.

이때 조건(나)에서 $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$ 의 일차항의 계수는 모두 a 로 같고, $a < 0$ 이므로 $a^4 = 4$ 이고 $a < 0$ 이어야 한다.

따라서 a 는 음의 실수이므로 $a^2 = 2$ 에서

$$a = -\sqrt{2}$$

이때

$$\begin{aligned} & 4(x+4)(x-1) \left(x + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{15}i}{2}\right) \left(x + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{15}i}{2}\right) \\ &= (-\sqrt{2}x - 4\sqrt{2})(-\sqrt{2}x + \sqrt{2}) \left(-\sqrt{2}x - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{30}}{2}i\right) \\ & \quad \times \left(-\sqrt{2}x - \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{30}}{2}i\right) \end{aligned}$$

이므로 조건 (다)에서

$$A(x) = -\sqrt{2}x - 4\sqrt{2},$$

$$B(x) = -\sqrt{2}x - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{30}}{2}i$$

$$\therefore b = -4\sqrt{2}, \quad c = \frac{\sqrt{30}}{2}$$

$$\text{따라서 } abc = (-\sqrt{2}) \times (-4\sqrt{2}) \times \frac{\sqrt{30}}{2} = 4\sqrt{30}$$

이므로

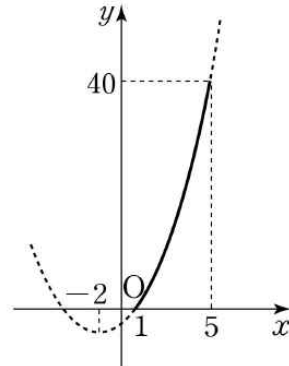
$$(abc)^2 = 16 \times 30 = 480$$

1. **정답** ①

[출제의도] 제한된 범위에서 이차함수의 최댓값을 구할 수 있다.

축의 방정식이 $x = -2$ 이므로 $1 \leq x \leq 5$ 에서 함수 $y = f(x)$ 의

그래프는 그림과 같다.



$1 \leq x \leq 5$ 에서 함수 $f(x) = (x+2)^2 + k$ 의

최댓값은 $f(5) = (5+2)^2 + k = 49 + k$ 이다.

이때 $1 \leq x \leq 5$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 40이므로

$$49 + k = 40$$

$$\therefore k = -9$$

2. **정답** 2

이차함수 $f(x) = 2x^2 + 7x + a$ 의 그래프가 점 $(-5, 0)$ 을 지나므로

$$\begin{aligned} f(-5) &= 2 \times (-5)^2 + 7 \times (-5) + a \\ &= 50 - 35 + a = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore a = -15$$

따라서 $f(x) = 2x^2 + 7x - 15 = (x+5)(2x-3)$ 이므로 이차부등식

$$f(x) = (x+5)(2x-3) > 0$$

의 해는

$$x < -5 \text{ 또는 } x > \frac{3}{2}$$

따라서 자연수 x 의 최솟값은 2이다.

3. **정답** 56

$$f(x) = x^2 - 8x + 36 = (x-4)^2 + 20 \text{ 이므로}$$

$0 \leq x \leq 6$ 에서 함수 $f(x)$ 는

$x=4$ 일 때 최솟값 $m=20$ 을 갖고,

$x=0$ 일 때 최댓값 $M=36$ 을 갖는다.

$$\therefore m + M = 20 + 36 = 56$$

4. **정답** ⑤

$$f(x) = x^2 - 4x + k = (x-2)^2 - 4 + k$$

따라서 $1 \leq x \leq 5$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 일 때

최솟값 $-4+k$ 를 가지므로 $-4+k=3$

따라서 $k=7$

$1 \leq x \leq 5$ 에서 함수 $f(x) = (x-2)^2 + 3$ 은 $x=5$ 일 때, 최댓값을

$$\text{가지므로 } M = (5-2)^2 + 3 = 12$$

따라서 $k + M = 7 + 12 = 19$

5. **정답** ⑤

$$y = -2x^2 + 8x + 10$$

$$= -2(x^2 - 4x + 4) + 18$$

$$= -2(x-2)^2 + 18$$

이므로 $x=2$ 일 때 최댓값 18을 갖고, $x=8$ 일 때 최솟값 -54 를 갖는다. 따라서 최댓값과 최솟값의 차는

$$18 - (-54) = 72$$

6. **정답** ③

[출제의도] 이차방정식과 이차함수의 관계 이해하기

이차함수 $y = x^2 + 5x + 2$ 의 그래프와 직선 $y = -x + k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2 + 5x + 2 = -x + k$ 는 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2 + 6x + 2 - k = 0$ 의 판별식 $D > 0$ 이어야 하므로

$$\text{판별식 } D = 6^2 - 4(2-k) = 28 + 4k > 0 \text{ 에서 } k > -7 \text{ 이다.}$$

따라서 정수 k 의 최솟값은 -6 이다.

7. **정답** ①

[출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 이해하기

기울기가 5인 직선의 y 절편을 k 라 하면

이차함수 $f(x) = x^2 - 3x + 17$ 의 그래프와

직선 $y = 5x + k$ 가 한 점에서 만난다.

이차방정식 $x^2 - 8x + 17 - k = 0$ 의 판별식을

$$D \text{라 하면 } D = 64 - 4(17-k) = 0$$

따라서 직선의 y 절편은 1

8. **정답** ②

[출제의도] 이차함수의 그래프 이해하기

$$f(x) = x^2 + 4x + 3 = (x+2)^2 - 1$$

직선 $y = 2x + k$ 가 점 $P(-2, -1)$ 을 지나므로

$$-1 = 2 \times (-2) + k, \quad k = 3$$

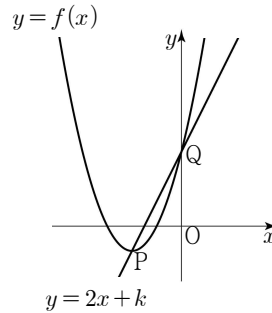
$$x^2 + 4x + 3 = 2x + 3$$

$$x^2 + 2x = x(x+2) = 0$$

그러므로 점 Q 의 좌표는 $Q(0, 3)$

따라서 선분 PQ 의 길이는

$$\sqrt{\{0 - (-2)\}^2 + \{3 - (-1)\}^2} = 2\sqrt{5}$$



9. **정답** 8

[출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 이해하기

이차함수 $f(x) = x^2 - 2x + k$ 의 그래프와

직선 $y = 3x + 1$ 이 만나지 않으므로 이차방정식

$$x^2 - 5x + k - 1 = 0 \text{의 판별식을 } D \text{라 하면}$$

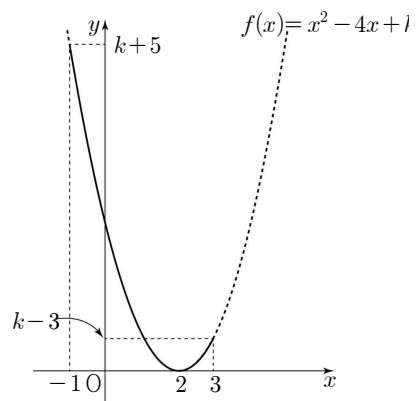
$$D = 25 - 4k + 4 < 0$$

$$k > \frac{29}{4}$$

따라서 자연수 k 의 최솟값은 8

10. **정답** ④

[출제의도] 이차함수의 최대와 최소 이해하기



$$f(x) = x^2 - 4x + k = (x-2)^2 + k - 4$$

$-1 \leq x \leq 3$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서

최댓값 9를 갖는다.

$$f(-1) = k + 5 = 9$$

따라서 $k=4$

11. **정답** ⑤

[출제의도] 이차방정식과 이차함수의 관계를 이해한다.

이차함수 $y = 2x^2 + ax - 1$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점의 x 좌표는 이차방정식 $2x^2 + ax - 1 = 0$ 의 두 실근과 같다.

이때 이차방정식 $2x^2 + ax - 1 = 0$ 의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 $-\frac{a}{2}$ 이다.

따라서 $-\frac{a}{2} = -1$ 에서

$$a = 2$$

12. 정답 ⑤

[출제의도] 이차함수의 그래프와 직선이 접할 조건을 이용하여 직선의 기울기를 구할 수 있다.

이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = g(x)$ 가 점 $(0, 1)$ 에서 접하므로

$$f(x) = x^2 + ax + 1, \quad g(x) = bx + 1$$

이라 하면 방정식 $f(x) - g(x) = 0$ 은 중근 $x = 0$ 을 갖는다.

$$\text{즉, } x^2 + (a-b)x = 0 \text{에서}$$

$$a-b=0 \quad \therefore a=b$$

한편, $f(x) = x^2 + ax + 1 = 0$ 의 두 근을 각각

α, β 라 하면 근과 계수의 관계에서

$$\alpha + \beta = -a, \quad \alpha\beta = 1$$

이때 두 근의 차가 2이므로

$$|\alpha - \beta| = 2$$

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \text{에서}$$

$$4 = (-a)^2 - 4, \quad a^2 = 8$$

$$\therefore a = \pm 2\sqrt{2}$$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 제3사분면을 지나므로

$a > 0, \quad b > 0$ 이다.

$$\therefore a = 2\sqrt{2}$$

따라서 구하는 직선 $y = g(x)$ 의 기울기는 $2\sqrt{2}$ 이다.

13. 정답 13

[출제의도] 이차함수의 그래프와 직선이 서로 다른 두 점에서 만날 조건을 이해하고 함숫값을 구할 수 있다.

조건 (가)에서 함수 $f(x)$ 가 $x = 3$ 에서 최댓값을 가지므로

$$f(x) = -(x-3)^2 + b \quad (b \text{는 상수})$$

조건 (나)에서 방정식 $f(x) = ax$, 즉 $-(x-3)^2 + b = ax$ 의 두 근이 -1 과 5 이므로 $x^2 - (6-a)x + 9-b = 0$ 의 근과 계수의 관계에서

$$(\text{두근의합}) = 4 = 6-a \quad \therefore a = 2$$

$$(\text{두근의곱}) = -5 = 9-b \quad \therefore b = 14$$

따라서 $f(x) = -(x-3)^2 + 14$ 이므로 $f(a) = f(2) = -1^2 + 14 = 13$

14. 정답 ②

최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$ 가 $x = -3$ 에서 최솟값 -8 을 가지므로

$$f(x) = 2(x+3)^2 - 8$$

$$\therefore f(x) = 2x^2 + 12x + 10$$

이때 이차방정식 $f(x) = 2x^2 + 12x + 10 = 0$, 즉

$$x^2 + 6x + 5 = (x+1)(x+5) = 0 \text{의 두 실근은}$$

$$x = -5 \text{ 또는 } x = -1$$

이므로 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 x 축과 두 점

$(-5, 0), (-1, 0)$ 에서 만난다.

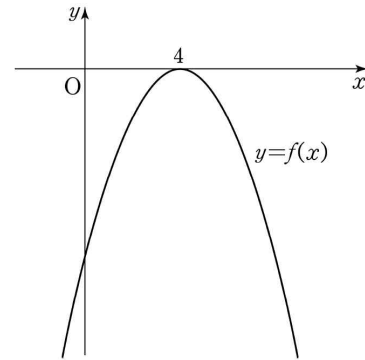
따라서 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 x 축이 만나는 두 점

$$\text{사이의 거리는 } |-1 - (-5)| = 4$$

15. 정답 ③

조건 (나)에서 이차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수는 음수이고

곡선 $y = f(x)$ 는 x 축과 점 $(4, 0)$ 에서 접한다.



따라서

$$f(x) = a(x-4)^2 \quad (a \text{는 } a < 0 \text{인 상수})$$

로 놓을 수 있다.

조건 (가)에서

$$|f(0)| = |a(0-4)^2| = |16a| = 8$$

이고 $a < 0$ 이므로

$$a = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x) = -\frac{1}{2}(x-4)^2$$

이때 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = 2x + k$ 가 접하려면 이차방정식

$$-\frac{1}{2}(x-4)^2 = 2x + k$$

즉, 방정식 $x^2 - 4x + 16 + 2k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$D = 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - (16 + 2k) = -12 - 2k = 0$$

$$\therefore k = -6$$

16. 정답 ⑤

$f(x) = (x-2a-1)^2 - 1 \quad (a \leq x \leq 9)$ 이므로 함수 $f(x)$ 의

최솟값이 -1 이 되려면 함수 $f(x)$ 는 $x = 2a+1$ 에서 최솟값을 가져야 한다. 따라서 $a \leq 2a+1 \leq 9$, 즉 $-1 \leq a \leq 4$ 이어야

하므로 모든 정수 a 의 값의 합은 $-1+0+1+2+3+4 = 9$

$$f(x) = x^2 - 2ax - a - 40 \text{이라 하자.}$$

이차방정식 $x^2 - 2ax - a - 40 = 0$ 의 한 근이 -2 보다 작고 다른

한 근이 1 보다 크려면 $f(-2) < 0, \quad f(1) < 0$ 이어야 한다.

$$f(-2) = 4 + 4a - a - 40 < 0 \text{에서}$$

$$3a - 36 < 0$$

$$\therefore a < 12 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f(1) = 1 - 2a - a - 40 < 0 \text{에서}$$

$$-3a - 39 < 0$$

$$\therefore a > -13 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②에서 $-13 < a < 12$ 이므로 주어진 조건을 만족시키는 정수 a 는 $-12, -11, \dots, 10, 11$ 의 24개다.

17. **정답** 21

곡선 $f(x) = x^2 + 2(a-k)x + bk^2 + ck + 4$ 가 x 축에 접하려면
이차방정식 $x^2 + 2(a-k)x + bk^2 + ck + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 할
때 $D=0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = (a-k)^2 - bk^2 - ck - 4 = 0$$

$$\therefore (1-b)k^2 + (-2a-c)k + a^2 - 4 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 등식 ①은 모든 실수 k 에 대하여 성립해야 하므로 k 에 대한
항등식이다.

$$\text{따라서 } 1-b=0, \quad -2a-c=0, \quad a^2-4=0 \text{이므로}$$

$$a^2=4, \quad b=1, \quad c=-2a$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 4 + 1^2 + 4a^2 \\ = 5 + 4 \times 4 = 21$$

18. **정답** ③

조건 (가)에서

$$f(x) = a(x+1)(x-3) + 2 \quad (a \text{는 상수})$$

$$= a(x^2 - 2x - 3) + 2$$

$$= a(x-1)^2 - 4a + 2$$

조건 (나)에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 -6 이므로

$$-4a + 2 = -6, \quad a = 2$$

따라서 방정식 $f(x) = 0$, 즉 $2x^2 - 4x - 4 = 0$ 의 두근이

α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의해

$$\alpha + \beta = 2, \quad \alpha\beta = -2$$

따라서

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 2^2 - 2 \times (-2) = 8$$

19. **정답** ①

이차함수 $y = -x^2 + 8x - 11 = -(x-4)^2 + 5$ 의 그래프의 꼭짓점의
좌표는 $(4, 5)$

점 $(4, 5)$ 를 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$$y - 5 = m(x - 4), \quad y = mx - 4m + 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

직선 ①이 이차함수 $y = x^2 - 3x + 2$ 의 그래프에

$$\text{접하므로 } x^2 - 3x + 2 = mx - 4m + 5$$

$$x^2 - (m+3)x + 4m - 3 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

에서 ②의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이다.

$$D = (m+3)^2 - 4(4m-3) = 0$$

$$m^2 - 10m + 21 = 0, \quad (m-3)(m-7) = 0$$

$$\text{따라서 } m = 3 \text{ 또는 } m = 7$$

$$\text{이므로 } m_1 = 3, \quad m_2 = 7 \text{ 또는 } m_1 = 7, \quad m_2 = 3$$

$$\text{따라서 } |m_1 - m_2| = 4$$

20. **정답** ②

#이차방정식과_이차함수의_관계 #판별식

[출제의도] 이차방정식과 이차함수의 관계를 이용하여 미지수의
값을 구할 수 있다.

이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나므로 이차방정식

$$x^2 + 2x + 1 - a = 0 \text{의 판별식을 } D_1 \text{이라 하면}$$

$$\frac{D_1}{4} = 1 - (1-a) \geq 0, \quad \therefore a \geq 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

또한, 이차함수 $y = g(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나므로 이차방정식

$$x^2 + (a-2)x + a^2 - a - 2 = 0 \text{의 판별식을 } D_2 \text{라 하면}$$

$$D_2 = (a-2)^2 - 4(a^2 - a - 2) = -3a^2 + 12 \geq 0,$$

$$a^2 - 4 \leq 0, \quad (a+2)(a-2) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq a \leq 2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ②에서 $0 \leq a \leq 2$ 이므로 구하는 모든 정수 a 의 값의 합은
 $0 + 1 + 2 = 3$

21. **정답** ⑤

[이해력-방정식과 부등식]

조건 (가)에서 $f(x) = x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)로 놓을 수 있다.

이차방정식 $x^2 - x - 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의

관계에서 $\alpha + \beta = 1, \quad \alpha\beta = -1$

$$\text{따라서 } \frac{1}{\beta} = -\alpha, \quad \frac{1}{\alpha} = -\beta \text{이므로 조건 (나)에서 } f(\alpha) = -\alpha \text{이고}$$

$$f(\beta) = -\beta$$

따라서 이차방정식 $f(x) = -x$, 즉

$$f(x) + x = x^2 + (a+1)x + b = 0 \text{의 두 근은 } \alpha, \beta \text{이다.}$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에서 $\alpha + \beta = -a - 1 = 1$

$$\therefore a = -2$$

따라서 이차방정식 $f(x) = x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근의 합은 $-a = 2$

22. **정답** 17

이해력-방정식과 부등식

$$f(x) = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1 \text{이므로 함수 } f(x) \text{는 } x=1 \text{에서}$$

최솟값 -1 을 갖는다.

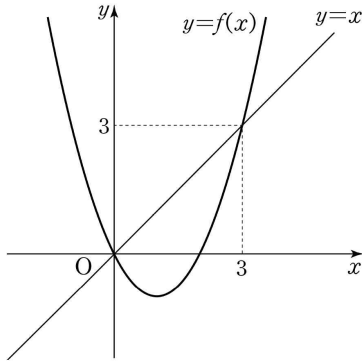
또한, $x^2 - 2x = x$ 에서

$$x^2 - 3x = x(x-3) = 0 \text{이므로 } x=0 \text{ 또는 } x=3$$

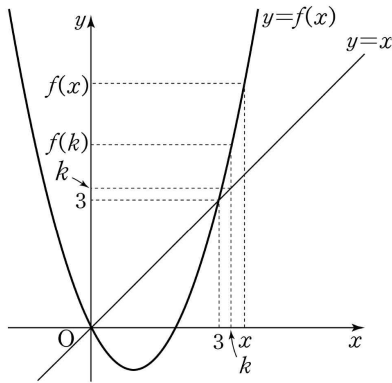
따라서 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = x$ 의 교점의 좌표는

$$(0, 0), (3, 3)$$

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 는 다음 그림과 같다.

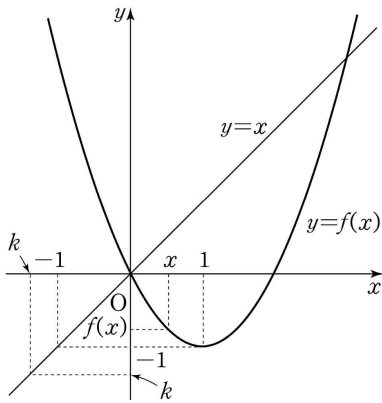


(i) $k \geq 3$ 일 때



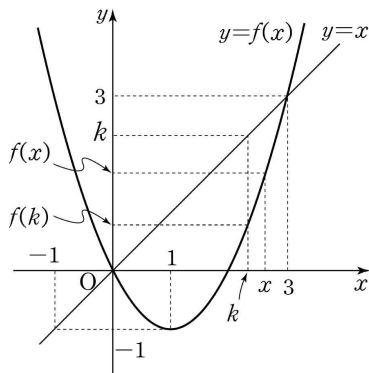
$x > k$ 인 모든 실수 x 에 대하여
 $f(x) > f(k) > k$ 가 성립하므로 조건 (나)가 성립한다.

(ii) $k < -1$ 일 때



$x > k$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최솟값 -1 을 가진다.
 따라서 $x < k$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq -1 > k$ 가
 성립하므로 조건 (나)가 성립한다.

(iii) $-1 \leq k < 3$ 일 때



$k < x < 3$ 인 어떤 실수 x 에 대하여 $x > k$ 이지만

$f(x) < k$ 가 성립하므로 조건 (나)가 성립하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 주어진 조건을 만족시키는 실수 k 의 값의
 범위는

$k < -1$ 또는 $k \geq 3$ ㉠

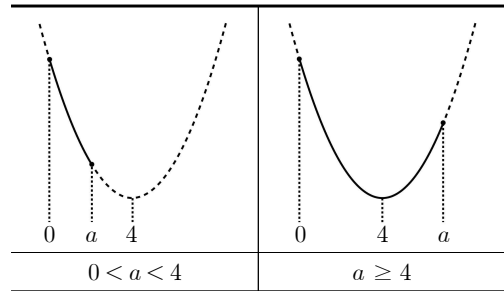
따라서 $|k| \leq 10$ 과 ㉠을 동시에 만족시키는 정수 k 의 개수는
 $9 + 8 = 17$

23. **정답** ①

[출제의도] 이차함수의 최솟값 추론하기

$$f(x) = x^2 - 8x + a + 6 = (x-4)^2 + a - 10$$

a 의 값에 따른 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(i) $0 < a < 4$ 일 때, 최솟값은

$$f(a) = a^2 - 7a + 6 = (a-1)(a-6) = 0$$

$$a = 1 \text{ 또는 } a = 6$$

$$0 < a < 4 \text{ 이므로 } a = 1$$

(ii) $a \geq 4$ 일 때,

$$\text{최솟값은 } f(4) = a - 10 = 0$$

$$a = 10$$

(i), (ii)에서 $f(x)$ 의 최솟값이 0이 되도록

하는 모든 a 의 값의 합은 $1 + 10 = 11$

24. **정답** 7

이해능력-방정식과 부등식

삼차방정식 $x^3 + ax^2 + 3x + b = 0$ 의 한 실근이 1이므로

$$a + b + 4 = 0 \text{ ㉠}$$

조립제법을 이용하면

1	1	a	3	b
		1	a+1	a+4
	1	a+1	a+4	a+b+4

$$(x-1)\{x^2 + (a+1)x + a+4\} = 0$$

따라서 방정식 $x^2 + (a+1)x + a+4 = 0$ 은 두 허근을 가져야
 하므로 판별식을 D 라 하면 $D = (a+1)^2 - 4(a+4) < 0$ 이어야
 한다.

$$a^2 - 2a - 15 < 0, (a+3)(a-5) < 0$$

$$\text{따라서 } -3 < a < 5$$

..... ㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는

$(-2, -2), (-1, -3), (0, -4), (1, -5), (2, -6),$

$(3, -7), (4, -8)$ 이므로 구하는 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수는

7 이다.

25. **정답** ②

[출제의도] 삼차방정식의 근을 구할 수 있다.

삼차방정식 $x^3 - 2x^2 + ax + 6 = 0$ 의 한 근이 -2 이므로

$$(-2)^3 - 2 \times (-2)^2 + a \times (-2) + 6 = 0$$

$$\therefore a = -5$$

삼차식 $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ 이 $x+2$ 를 인수로 가지므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & -2 & 8 & -6 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore x^3 - 2x^2 - 5x + 6 &= (x+2)(x^2 - 4x + 3) \\ &= (x+2)(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

따라서 나머지 두 근의 차는

$$3 - 1 = 2$$

26. **정답** ②

$f(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 10$ 이라 하면

$$f(1) = 0$$

이므로 인수정리에 의해 $f(x)$ 는 $x-1$ 을 인수로 갖는다.

따라서 조립제법을 이용하여 인수분해 하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -4 & -7 & 10 \\ & & 1 & -3 & -10 \\ \hline & 1 & -3 & -10 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore x^3 - 4x^2 - 7x + 10 &= (x-1)(x^2 - 3x - 10) \\ &= (x-1)(x-5)(x+2) \end{aligned}$$

따라서 주어진 방정식의 해는

$$x = -2 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = 5$$

이므로 자연수인 해의 합은

$$1 + 5 = 6$$

27. **정답** ④

[이해력-방정식과 부등식]

$x=1$ 은 방정식 $x^3 - 1 = a(x-1)$ 의 실근이다.

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1) \text{ 이므로 주어진 방정식은}$$

$$(x-1)(x^2 + x + 1 - a) = 0$$

이 방정식이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우는 다음과 같다.

(i) 이차방정식 $x^2 + x + 1 - a = 0$ 이 1, α ($\alpha \neq 1$)을 두 실근으로 갖는 경우

$$1^2 + 1 + 1 - a = 0 \text{에서 } a = 3$$

이때 이차방정식 $x^2 + x + 1 - a = x^2 + x - 2 = 0$ 의 두

실근은 1과 -2 이므로 방정식 $x^3 - 1 = a(x-1)$ 은 서로 다른 두 실근 1과 -2 를 갖는다.

(ii) 이차방정식 $x^2 + x + 1 - a = 0$ 이 1이 아닌 중근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2 + x + 1 - a = 0$ 의 판별식 D 가

$$D = 1^2 - 4(1-a) = 4a - 3 = 0 \text{ 이어야 하므로 } a = \frac{3}{4}$$

이때 이차방정식

$$x^2 + x + 1 - a = x^2 + x + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \text{ 은 } x = -\frac{1}{2} \text{ 을}$$

중근으로 갖는다.

따라서 방정식 $x^3 - 1 = a(x-1)$ 은 서로 다른 두 실근

$$-\frac{1}{2} \text{ 과 } 1 \text{ 을 갖는다.}$$

(i), (ii)에서 주어진 삼차방정식이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 모든 실수 a 의 값의 합은

$$3 + \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$$

28. **정답** 10

[출제의도] 삼차방정식의 근 이해하기

$$f(x) = x^3 - x^2 + kx - k \text{ 라 하면}$$

$$f(1) = 1 - 1 + k - k = 0 \text{ 이므로}$$

$x-1$ 은 $f(x)$ 의 인수이다.

조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -1 & k & -k \\ & & 1 & 0 & k \\ \hline & 1 & 0 & k & 0 \end{array}$$

$$f(x) = (x-1)(x^2 + k) \text{ 이다.}$$

$(x-1)(x^2 + k) = 0$ 에서 실근 $\alpha = 1$ 이고 허근 $3i$ 는 $x^2 + k = 0$ 의 근이다.

$$(3i)^2 + k = 0 \text{ 이므로 } k = 9 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } k + \alpha = 9 + 1 = 10 \text{ 이다.}$$

[다른 풀이]

$$x^3 - x^2 + kx - k = 0 \text{의 허근이 } 3i \text{ 이므로}$$

$$(3i)^3 - (3i)^2 + 3ki - k = 0,$$

$$(9-k) + (3k-27)i = 0 \text{ 이다.}$$

$$9-k=0, \quad 3k-27=0 \text{ 이므로 } k=9 \text{ 이다.}$$

방정식 $x^3 - x^2 + 9x - 9 = 0$ 을 인수분해하면

$$x^2(x-1) + 9(x-1) = 0, \quad (x^2+9)(x-1) = 0$$

이므로 방정식의 실근은 1이다.

$$\text{따라서 } \alpha = 1 \text{ 이므로 } k + \alpha = 9 + 1 = 10 \text{ 이다.}$$

29. **정답** ②

[출제의도] 삼차방정식의 허근과 관련된 문제를 해결한다.

조건 (가)에서 다항식 $x^3 - 3x^2 + 9x + 13$ 을 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -3 & 9 & 13 \\ & & -1 & 4 & -13 \\ \hline & 1 & -4 & 13 & 0 \end{array}$$

$$x^3 - 3x^2 + 9x + 13 = (x+1)(x^2 - 4x + 13)$$

이차방정식 $x^2 - 4x + 13 = 0$ 에서

$$x = 2 + 3i \text{ 또는 } x = 2 - 3i$$

따라서 방정식 $x^3 - 3x^2 + 9x + 13 = 0$ 의 세 근은

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 2 + 3i \text{ 또는 } x = 2 - 3i$$

조건 (나)에서

$$\frac{z - \bar{z}}{i} = \frac{(a+bi) - (a-bi)}{i} = \frac{2bi}{i} = 2b$$

$$\frac{z - \bar{z}}{i} \text{가 음의 실수이므로 } b \text{는 음수이다.}$$

$$\text{따라서 } z = 2 - 3i$$

$$a = 2, b = -3$$

$$a + b = -1$$

30. **정답** ③

[출제의도] 연립이차방정식의 해를 구한다.

$$x^2 - 2xy - 3y^2 = 0$$

$$(x - 3y)(x + y) = 0 \text{에서}$$

$$x = 3y \text{ 또는 } x = -y$$

$$x > 0, y > 0 \text{이므로}$$

$$x = 3y$$

$$x^2 + y^2 = 20 \text{에서}$$

$$(3y)^2 + y^2 = 20$$

$$y^2 = 2$$

$$a > 0, b > 0 \text{이므로 } a = 3\sqrt{2}, b = \sqrt{2}$$

$$\text{따라서 } a + b = 4\sqrt{2}$$

31. **정답** ④

[출제의도] 연립방정식을 이해하여 해를 구한다.

$$x - 2y = 1 \text{에서}$$

$$x = 2y + 1 \dots\dots \text{㉠}$$

$$\text{㉠을 } x^2 - 4y^2 = 5 \text{에 대입하면}$$

$$(2y + 1)^2 - 4y^2 = 5$$

$$(4y^2 + 4y + 1) - 4y^2 = 5$$

$$4y + 1 = 5$$

$$y = 1 \dots\dots \text{㉡}$$

$$\text{㉡을 ㉠에 대입하면}$$

$$x = 2 \times 1 + 1 = 3$$

$$\text{따라서 } a = 3, b = 1 \text{이므로}$$

$$a + b = 4$$

[다른 풀이]

$$x - 2y = 1 \dots\dots \text{㉢}$$

$$x^2 - 4y^2 = 5 \dots\dots \text{㉣}$$

$$\text{㉣의 좌변을 인수분해하면}$$

$$(x - 2y)(x + 2y) = 5 \dots\dots \text{㉤}$$

$$\text{㉢을 ㉤에 대입하면}$$

$$x + 2y = 5 \dots\dots \text{㉥}$$

$$\text{㉢, ㉥을 연립하면}$$

$$x = 3, y = 1$$

$$\text{따라서 } a = 3, b = 1 \text{이므로}$$

$$a + b = 4$$

32. **정답** ⑤

$$3x - y = 1 \text{에서 } y = 3x - 1 \text{을 } x^2 + y^2 = 17 \text{에 대입하면}$$

$$x^2 + (3x - 1)^2 = 17$$

$$x^2 + 9x^2 - 6x + 1 = 17$$

$$10x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$5x^2 - 3x - 8 = (x + 1)(5x - 8) = 0$$

$$\therefore x = \frac{8}{5} (\because x > 0)$$

$$\text{이때, } y = 3 \times \frac{8}{5} - 1 = \frac{19}{5} \text{이므로}$$

$$\alpha = \frac{8}{5}, \beta = \frac{19}{5}$$

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{27}{5}$$

33. **정답** ①

$$2x - y = 2 \text{에서 } y = 2x - 2 \text{를 } 4x^2 + y^2 = 2 \text{에 대입하면}$$

$$4x^2 + (2x - 2)^2 = 8x^2 - 8x + 4 = 2$$

$$4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2 = 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{2}, y = -1$$

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

34. **정답** ③

[출제의도] 연립방정식 이해하기

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 & \dots \text{㉠} \\ x^2 - xy + 2y = 4 & \dots \text{㉡} \end{cases}$$

$$\text{㉠에서 } y = x - 1 \text{을 ㉡에 대입하면}$$

$$x^2 - x(x - 1) + 2(x - 1) = 4$$

$$x + 2x - 2 = 4$$

$$\alpha = 2, \beta = 1$$

$$\text{따라서 } \alpha + \beta = 2 + 1 = 3$$

35. **정답** 15

이해능력-방정식과 부등식

$$|x - 3| \leq k \text{에서 } -k \leq x - 3 \leq k$$

$$-k + 3 \leq x \leq k + 3$$

이때, 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x 의 개수가 31이므로

$$k + 3 - (-k + 3) + 1 = 31$$

$$\text{따라서 } 2k = 30 \text{이므로 } k = 15$$

36. **정답** ③

[출제의도] 절댓값을 포함한 일차부등식 계산하기

$$\text{부등식 } |x - 3| \leq 2 \text{를 풀면}$$

$$-2 \leq x - 3 \leq 2, 1 \leq x \leq 5 \text{이다.}$$

부등식을 만족시키는 정수 x 의 값은 1, 2, 3, 4, 5이다.

따라서 모든 정수 x 의 값의 합은

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 \text{이다.}$$

37. **정답** ⑤

[출제의도] 절댓값을 포함한 부등식 이해하기

부등식 $x > |3x+1|-7$ 에서

(i) $x \geq -\frac{1}{3}$ 일 때

$$x > 3x+1-7 \text{에서 } x < 3$$

$$-\frac{1}{3} \leq x < 3$$

(ii) $x < -\frac{1}{3}$ 일 때

$$x > -3x-1-7 \text{에서 } x > -2$$

$$-2 < x < -\frac{1}{3}$$

(i), (ii)에 의하여 $-2 < x < 3$

따라서 모든 정수 x 는 $-1, 0, 1, 2$ 이므로 합은 2

38. **정답** ③

[출제의도] 절댓값을 포함하는 일차부등식의 해를 추론한다.

a 는 자연수이므로 $|x-3| \leq a$ 에서

$$-a \leq x-3 \leq a$$

$$3-a \leq x \leq 3+a \dots\dots ㉠$$

부등식 ㉠을 만족시키는 정수 x 의 개수는

$$(3+a)-(3-a)+1=2a+1$$

$$2a+1=15 \text{에서}$$

$$a=7$$

39. **정답** 14

부등식 $\left| \frac{x}{n} + 3 \right| < 7$ 의 해는 연립부등식

$$-7 < \frac{x}{n} + 3 < 7 \text{의 해와 같다.}$$

$$-7 < \frac{x}{n} + 3 < 7 \text{에서 } n \text{은 자연수이므로}$$

$$-10n < x < 4n \dots\dots\dots ㉠$$

이때 ㉠을 만족시키는 정수 x 의 최댓값은 $4n-1$ 이고 최솟값은 $-10n+1$ 이므로 정수 x 의 최댓값과 최솟값의 차가 200 이하가 되려면

$$(4n-1)-(-10n+1)=14n-2 \leq 200$$

$$\therefore n \leq \frac{202}{14} = \frac{101}{7} = 14. \dots$$

따라서 자연수 n 의 최댓값은 14이다.

40. **정답** ⑤

[출제의도] 연립일차부등식을 이용하여 문제 해결하기

부등식을 각각 풀면 $x > 1$ 이고 $x < \frac{a+1}{3}$ 이다.

연립부등식의 해가 존재해야 하므로

연립부등식의 해는 $1 < x < \frac{a+1}{3}$ 이어야 한다.

연립부등식을 만족시키는 모든 정수 x 의 값의 합이 9가 되어야 하므로 정수 x 의 값은 2, 3, 4이다.

$$4 < \frac{a+1}{3} \leq 5 \text{가 되어야 하므로 } 11 < a \leq 14 \text{이다.}$$

따라서 자연수 a 의 최댓값은 14이다.

41. **정답** 22

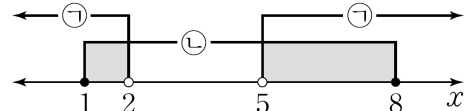
이해능력-방정식과 부등식

$$x^2-7x+10 > 0 \text{에서 } (x-2)(x-5) > 0 \text{이므로}$$

$$x < 2 \text{ 또는 } x > 5 \dots\dots ㉠$$

$$x^2-9x+8 \leq 0 \text{에서 } (x-1)(x-8) \leq 0 \text{이므로}$$

$$1 \leq x \leq 8 \dots\dots ㉡$$



두 이차부등식 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$1 \leq x < 2 \text{ 또는 } 5 < x \leq 8$$

따라서 주어진 연립부등식을 만족시키는 모든 정수 x 의 값의 합은 $1+6+7+8=22$

42. **정답** ②

$$x^2-3x-10=(x+2)(x-5) \leq 0 \text{의 해는}$$

$$-2 \leq x \leq 5$$

이므로 모든 정수 x 의 값의 합은

$$-2-1+0+1+2+3+4+5=12$$

43. **정답** ③

주어진 부등식을 정리하면

$$(a-3)x^2+(a-6)x+(a-3) > 0 \dots\dots\dots ㉠$$

위의 부등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립할 조건은 다음과 같다.

(i) $a-3=0$, 즉 $a=3$ 일 때,

주어진 부등식 ㉠은

$$-3x > 0$$

이므로 $x < 0$ 일 때만 성립한다.

(ii) $a-3 \neq 0$ 일 때,

$$a-3 > 0 \dots\dots\dots ㉡$$

이고 이차방정식

$(a-3)x^2+(a-6)x+(a-3)=0$ 의 판별식 D 가 $D < 0$ 이어야 한다

$$D=(a-6)^2-4(a-3)^2$$

$$=-3a^2+12a=-3a(a-4) < 0$$

에서

$$a(a-4) > 0$$

$$\therefore a < 0 \text{ 또는 } a > 4 \dots\dots\dots ㉢$$

㉡, ㉢을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는

$$a > 4$$

따라서 자연수 a 의 최솟값은 5이다.

44. **정답** ①

[출제의도] 이차부등식 이해하기

주어진 해가 $2 \leq x \leq 3$ 이고 x^2 의 계수가 1 이므로
 이차부등식은 $(x-2)(x-3) \leq 0$ 이다.
 따라서 $x^2 - 5x + 6 \leq 0$ 이므로 $a = -5$ 이다.

45. **정답** ①

[출제의도] 이차부등식의 해를 구한다.

이차부등식 $x^2 - 8x + a \leq 0$ 의 해가 $b \leq x \leq 6$ 이므로
 $x^2 - 8x + a = (x-b)(x-6)$
 $= x^2 - (b+6)x + 6b$

$$8 = b+6, a = 6b$$

$$b = 2, a = 12$$

$$\text{따라서 } a+b = 12+2 = 14$$

[다른 풀이]

$x = 6$ 일 때, $x^2 - 8x + a = 0$ 이므로

$$36 - 48 + a = 0$$

$$a = 12$$

$$x^2 - 8x + 12 \leq 0$$

$$(x-2)(x-6) \leq 0$$

$$2 \leq x \leq 6$$

$$b = 2$$

$$\text{따라서 } a+b = 12+2 = 14$$

46. **정답** ②

[출제의도] 판별식을 이용하여 절대부등식이 성립하도록 하는 정수 k 의 개수를 구한다.

이차방정식 $x^2 - 2kx + 2k + 15 = 0$ 의 판별식을 D 라 하자.

모든 실수 x 에 대하여 부등식 $x^2 - 2kx + 2k + 15 \geq 0$ 이 성립하려면 $D \leq 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = (-k)^2 - 1 \times (2k+15) \leq 0$$

$$k^2 - 2k - 15 \leq 0$$

$$(k-5)(k+3) \leq 0$$

$$-3 \leq k \leq 5$$

따라서 정수 k 는 $-3, -2, -1, \dots, 5$ 이므로 그 개수는 9이다.

47. **정답** 6

[출제의도] 이차부등식을 이용하여 문제 해결하기
 $\beta - \alpha$ 가 자연수가 되기 위해서는 α, β 가 모두 정수이거나 α, β 가 각각 정수가 아닌 실수이어야 한다.

$\alpha \leq x \leq \beta$ 인 정수 x 의 개수가 3이 되기 위해서

α, β 가 모두 정수인 경우에는 $\beta - \alpha = 2$,

α, β 가 각각 정수가 아닌 실수인 경우에는

$\beta - \alpha = 3$ 이어야 한다.

$$(1) \frac{1}{2}a^2 - a > \frac{3}{2}a \text{인 경우}$$

$$a^2 - 5a > 0 \text{이므로 } a < 0 \text{ 또는 } a > 5 \text{이다.}$$

이차부등식 $(2x - a^2 + 2a)(2x - 3a) \leq 0$ 의 해는

$$\frac{3}{2}a \leq x \leq \frac{1}{2}a^2 - a \text{이다.}$$

(i) α, β 가 모두 정수인 경우

$$\beta - \alpha = \left(\frac{1}{2}a^2 - a\right) - \frac{3}{2}a = \frac{1}{2}a^2 - \frac{5}{2}a = 2 \text{이므로}$$

$$a^2 - 5a - 4 = 0 \text{에서 } a = \frac{5 \pm \sqrt{41}}{2} \text{이다.}$$

$$a = \frac{5 \pm \sqrt{41}}{2} \text{이면 } \beta \text{와 } \alpha \text{가 각각 정수가}$$

아니므로 구하고자 하는 a 는 없다.

(ii) α, β 가 각각 정수가 아닌 실수인 경우

$$\beta - \alpha = \left(\frac{1}{2}a^2 - a\right) - \frac{3}{2}a = \frac{1}{2}a^2 - \frac{5}{2}a = 3 \text{이므로}$$

$$a^2 - 5a - 6 = 0 \text{에서 } a = -1 \text{ 또는 } a = 6 \text{이다.}$$

$a = -1$ 이면 β 와 α 가 각각 정수가 아닌 실수이다.

$a = 6$ 이면 β 와 α 가 모두 정수이므로 조건을

만족하지 않는다.

따라서 $a = -1$ 이다.

$$(2) \frac{1}{2}a^2 - a < \frac{3}{2}a \text{인 경우}$$

$$a^2 - 5a < 0 \text{이므로 } 0 < a < 5 \text{이다.}$$

이차부등식 $(2x - a^2 + 2a)(2x - 3a) \leq 0$ 의 해는

$$\frac{1}{2}a^2 - a \leq x \leq \frac{3}{2}a \text{이다.}$$

(i) α, β 가 모두 정수인 경우

$$\beta - \alpha = \frac{3}{2}a - \left(\frac{1}{2}a^2 - a\right) = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{5}{2}a = 2$$

이므로

$$a^2 - 5a + 4 = 0 \text{에서 } a = 1 \text{ 또는 } a = 4 \text{이다.}$$

$a = 1$ 이면 β 와 α 가 각각 정수가 아니므로

조건을 만족하지 않는다.

$a = 4$ 이면 β 와 α 가 모두 정수이다.

따라서 $a = 4$ 이다.

(ii) α, β 가 각각 정수가 아닌 실수인 경우

$$\beta - \alpha = \frac{3}{2}a - \left(\frac{1}{2}a^2 - a\right) = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{5}{2}a = 3$$

이므로

$$a^2 - 5a + 6 = 0 \text{에서 } a = 2 \text{ 또는 } a = 3 \text{이다.}$$

$a = 2$ 이면 β 와 α 가 모두 정수이므로 조건을

만족하지 않는다.

$a = 3$ 이면 β 와 α 가 각각 정수가 아닌 실수이다.

따라서 $a = 3$ 이다.

그러므로 (1), (2)에 의해 조건을 만족시키는

모든 실수 a 의 값의 합은 $-1 + 4 + 3 = 6$ 이다.

48. **정답** ③

[출제의도] 이차부등식을 활용하여 문제 해결하기

$$x^2 - (n+5)x + 5n \leq 0$$

$$(x-n)(x-5) \leq 0$$

(i) $n < 5$ 일 때,

부등식의 해는 $n \leq x \leq 5$

정수 x 의 개수는 $6-n$ 이므로 $6-n=3$

$$n=3$$

(ii) $n=5$ 일 때,

$$(x-5)^2 \leq 0 \text{ 의 해는 } x=5$$

정수 x 의 개수는 1이므로 성립하지 않는다.

(iii) $n>5$ 일 때,

$$\text{부등식의 해는 } 5 \leq x \leq n$$

정수 x 의 개수는 $n-4$ 이므로 $n-4=3$

$$n=7$$

(i), (ii), (iii)에서

모든 자연수 n 의 값의 합은 $3+7=10$