

I -2 나머지정리와 인수분해

01 ③	02 ⑤	03 ①	04 ②	05 ⑤
06 ②	07 ①	08 ①	09 ①	10 ③
11 ③	12 14	13 ①	14 ③	15 11
16 ④	17 46	18 ⑤	19 45	20 ③
21 11	22 25	22 26	24 ①	

06 $11^4 - 6^4 = (11^2 - 6^2)(11^2 + 6^2)$
 $= (11 - 6)(11 + 6) \times 157$
 $= 5 \times 17 \times 157$
 따라서 $a = 5, b = 17$ 이므로 $a + b = 22$

07 $x^4 + 7x^2 + 16 = (x^4 + 8x^2 + 16) - x^2$
 $= (x^2 + 4)^2 - x^2$
 $= (x^2 + x + 4)(x^2 - x + 4)$
 따라서 $a = 1, b = 4$ 이므로 $a + b = 5$

08 $a + 5 = 2a + 8$ 이므로 $a = -3$

09 218 을 n 이라 하면
 $\frac{218^3 + 1}{217^3 - 1} = \frac{n^3 + 1}{(n-1)^3 - 1}$
 $= \frac{(n+1)(n^2 - n + 1)}{\{(n-1) - 1\}\{(n-1)^2 + (n-1) + 1\}}$
 $= \frac{(n+1)(n^2 - n + 1)}{(n-2)(n^2 - n + 1)}$
 $= \frac{n+1}{n-2} = \frac{218+1}{218-2} = \frac{73}{72}$

10 $2x + y = t$ 라 하면
 $(2x + y)^2 - 2(2x + y) - 3$
 $= t^2 - 2t - 3 = (t+1)(t-3)$
 $= (2x + y + 1)(2x + y - 3)$
 따라서 $a = 2, b = 1, c = -3$ 이므로
 $a + b + c = 0$

11 주어진 등식의 양변에 $x = 2$ 를 대입하면
 $b = 12$
 $x^2 + 3x + 2 = (x-2)^2 + a(x-2) + 12$ 의 양변
 에 $x = 0$ 을 대입하면

$2 = 4 - 2a + 12$, 즉 $a = 7$

따라서 $a + b = 19$

12 $f(-1) = 1 - a + b = 2, f(1) = 1 + a + b = 8$
 이므로 $\begin{cases} -a + b = 1 \\ a + b = 7 \end{cases}$

연립방정식을 풀면 $a = 3, b = 4$

따라서 $f(x) = x^2 + 3x + 4$ 이므로

$f(2) = 4 + 6 + 4 = 14$

13 등식을 정리하면
 $x^2 + (a-1)x - a = bx^2 - 3x + 2$
 항등식의 성질에 의해 $a = -2, b = 1$
 따라서 $a + b = -1$

14 $2x^3 - 3x^2 - 12x - 7 = (x+1)^2(2x-7)$
 따라서 $a = 1, b = 2, c = -7$ 이므로
 $a + b + c = -4$

15 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 - 7x$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$ 라
 하면 나머지가 $x + 4$ 이므로
 $f(x) = (x^2 - 7x)Q(x) + x + 4$
 $= x(x-7)Q(x) + x + 4$
 따라서 $f(x)$ 를 $x - 7$ 로 나눈 나머지는
 $f(7) = 11$

16 $2x^3 + ax^2 + bx + 6 = (x^2 - 1)Q(x) \dots \dots \textcircled{A}$
 (단, $Q(x)$ 는 다항식)

로 놓자.

\textcircled{A} 의 양변에 $x = -1$ 을 대입하면 $a - b = -4$

\textcircled{A} 의 양변에 $x = 1$ 을 대입하면 $a + b = -8$

따라서 $a = -6, b = -2$ 이므로 $ab = 12$

17 $P(x+1) = (x^2 - 4)Q(x) - 3$
 $= (x-2)(x+2)Q(x) - 3$
 $x = 2$ 를 대입하면 $P(3) = -3$
 $x = -2$ 를 대입하면 $P(-1) = -3$
 $P(x) = (x^2 - x - 1)(ax + b) + 2$ 에 $x = 3$,
 $x = -1$ 을 대입하여 정리하면
 $3a + b = -1, -a + b = -5$
 따라서 $a = 1, b = -4$ 이므로
 $50a + b = 46$

$$\begin{aligned}
 18 \quad & \{f(x)\}^3 + \{g(x)\}^3 \\
 &= \{f(x) + g(x)\} [\{f(x)\}^2 - f(x)g(x) + \{g(x)\}^2] \\
 &= (2x^2 - x - 1)h(x) \\
 &f(x) + g(x) = (x^2 + x) + (x^2 - 2x - 1) \\
 &= 2x^2 - x - 1 \\
 &\text{이므로 } h(x) = \{f(x)\}^2 - f(x)g(x) + \{g(x)\}^2 \\
 &f(1) = 2, \quad g(1) = -2 \text{이므로 } h(x) \text{를 } x-1 \text{로 나} \\
 &\text{누었을 때의 나머지는} \\
 &h(1) = 2^2 - 2 \times (-2) + (-2)^2 = 12
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 19 \quad \begin{array}{r} x+1 \\ x^3 - 2x^2 + ax + b \\ \hline x^3 - 2x^2 - 2x \\ \hline x^2 + (a+2)x + b \\ \hline x^2 - 2x - 2 \\ \hline (a+4)x + (b+2) \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 &Q(x) = x+1, \quad R(x) = (a+4)x + b+2 \\
 &R(2) = 9 \text{이므로 } 2a+b = -1 \quad \text{㉠} \\
 &f(x) \text{가 } x+1 \text{로 나누어떨어지므로} \\
 &f(-1) = -1-1-a+b = 0 \\
 &a-b = -2 \quad \text{㉡} \\
 &\text{㉠, ㉡에 의해 } a = -1, \quad b = 1 \\
 &f(x) = x^3 - x^2 - x + 1 \\
 &\text{따라서 } f(4) = 4^3 - 4^2 - 4 + 1 = 45
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 20 \quad & x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x - 6 \\
 &= (x+1)(x-2)(x^2 - x + 3) \\
 &\text{따라서 } a = -2, \quad b = -1, \quad c = 3 \text{이므로} \\
 &a+b+c = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 21 \quad & ax^3 + b = (ax+b)Q_1(x) + R_1 \quad \text{㉠} \\
 & ax^4 + b = (ax+b)Q_2(x) + R_2 \quad \text{㉡} \\
 & \text{㉠, ㉡에 } x = -\frac{b}{a} \text{를 각각 대입하면} \\
 & R_1 = -\frac{b^3}{a^2} + b, \quad R_2 = \frac{b^4}{a^3} + b \\
 & R_1 = R_2 \text{이므로 } -\frac{b^3}{a^2} + b = \frac{b^4}{a^3} + b \\
 & ab \neq 0 \text{이므로 } b = -a \\
 & \text{따라서 } R_1 = R_2 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & ax^3 - a = a(x-1)(x^2 + x + 1) \text{이므로} \\
 & a(x-1)(x^2 + x + 1) = a(x-1)Q_1(x) \\
 & \text{따라서 } Q_1(x) = x^2 + x + 1 \\
 & ax^4 - a = a(x-1)(x+1)(x^2 + 1) \text{이므로} \\
 & a(x-1)(x+1)(x^2 + 1) = a(x-1)Q_2(x) \\
 & \text{따라서 } Q_2(x) = (x+1)(x^2 + 1) \\
 & \text{그러므로 } Q_1(2) + Q_2(1) = 7 + 4 = 11
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 22 \quad & f(x) = (x-1)Q(x) + 5 \\
 & Q(x) = (x-2)Q'(x) + 10 \\
 & f(x) = (x-1)\{(x-2)Q'(x) + 10\} + 5 \\
 & = (x-1)(x-2)Q'(x) + 10(x-1) + 5 \\
 & = (x-1)(x-2)Q'(x) + 10x - 5 \\
 & \text{이므로 } f(x) \text{를 } (x-1)(x-2) \text{로 나눈 나머지는} \\
 & 10x - 5 \text{이다. 따라서 } a = 10, \quad b = -5 \text{이므로} \\
 & 3a + b = 25
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 23 \quad & \text{조건 ㉠에 의해} \\
 & f(x) = (x-1)^2(ax+b) + (ax+b) \\
 & f(1) = 2 \text{이므로 } ax+b = a(x-1)+2 \\
 & f(x) = (x-1)^2\{a(x-1)+2\} + a(x-1)+2 \\
 & = a(x-1)^3 + 2(x-1)^2 + a(x-1)+2 \\
 & \text{따라서 } f(x) \text{를 } (x-1)^3 \text{으로 나눈 나머지는} \\
 & R(x) = 2(x-1)^2 + a(x-1)+2 \\
 & R(0) = R(3) \text{이므로 } 2-a+2 = 8+2a+2 \\
 & a = -2 \\
 & \text{따라서 } R(x) = 2(x-1)^2 - 2(x-1)+2 \text{이므로} \\
 & R(5) = 26
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 24 \quad & \text{조건 ㉠에서 } x=1 \text{을 대입하면 } P(1) = 0 \\
 & x=7 \text{을 대입하면 } P(5) = 0 \\
 & P(x) \text{는 삼차다항식이므로 조건 ㉠에 의해} \\
 & P(x) = (x^2 - 4x + 2)(ax+b) + 2x - 10 \\
 & \quad \quad \quad (\text{단, } a, b \text{는 상수}) \\
 & P(1) = 0 \text{이므로 } -a-b-8 = 0 \\
 & P(5) = 0 \text{이므로 } 35a+7b = 0 \\
 & \text{따라서 } a = 2, \quad b = -10 \text{이므로} \\
 & P(x) = (x^2 - 4x + 2)(2x - 10) + 2x - 10 \\
 & P(4) = -6
 \end{aligned}$$