

1. 좌표평면 위의 두 점 $A(1, -3)$, $B(2, 1)$ 사이의 거리는?
[2점]

- ① $\sqrt{17}$ ② $3\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{19}$
④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{21}$

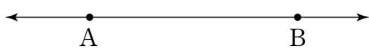
2. 좌표평면 위의 두 점 $A(a, -4)$, $B(3, b)$ 에 대하여 선분 AB 를 3:2로 외분하는 점의 좌표가 $(-3, 2)$ 일 때, $a+b$ 의 값은?
[3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

3. 좌표평면 위의 세 점 $A(3, 2)$, $B(-1, 4)$, $P(a, 0)$ 에 대하여 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$ 의 최솟값은? [3점]

- ① 22 ② 24 ③ 26
④ 28 ⑤ 30

4. 수직선 위에 길이가 8인 선분 AB 가 있다. 선분 AB 의 중점을 M , 선분 AB 를 3:1로 내분하는 점을 N 이라 하자. 선분 MN 을 3:1로 외분하는 점을 P 라 할 때, 선분 AP 의 길이는? [3점]



- ① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

5. 좌표평면 위의 두 점 $A(-2, 0)$, $B(a, b)$ 에 대하여 선분 AB 를 2:1로 외분하는 점의 좌표는 $(10, 0)$ 이다. $a+b$ 의 값은?
[3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

6. 좌표평면 위의 두 점 $A(-1, 3)$, $B(4, 1)$ 에 대하여 선분 AB 를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 구하시오. [3점]

7. 좌표평면에서 직선 $12x - 2y + 5 = 0$ 의 기울기는? [2점]

- ① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

8. 좌표평면에서 직선 $3x + y - 1 = 0$ 과 평행하고 점 $(1, -5)$ 를 지나는 직선의 y 절편은? [3점]

- ① -2 ② -1 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

9. 좌표평면에서 직선 $(2k+1)x + (k-3)y - 6k + 4 = 0$ 이 실수 k 의 값에 관계없이 항상 점 (a, b) 를 지날 때, $a+b$ 의 값은? [3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

호남제일고 1학년 7월 20일 논술형 평가 자료

10.^{10.}좌표평면 위의 원점 O에서 직선 $ax+by-50=0$ 에 내린 수선의 발을 H라 하자. 점 H의 좌표가 (4, 3)일 때, $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [3점]

- ① 7 ② 14 ③ 21
④ 28 ⑤ 35

11.^{11.}좌표평면에서 이차함수 $f(x)=-x^2+4x+5$ 의 그래프와 직선 $y=2x$ 가 만나는 두 점을 각각 $A(a, f(a)), B(b, f(b))$ ($a < b$)라 하자. $a < t < b$ 인 점 $P(t, f(t))$ 에 대하여 점 P와 진선 AB 사이의 거리의 최댓값은? [4점]

- ① $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\frac{6\sqrt{5}}{5}$
④ $\frac{7\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

12.^{12.}좌표평면 위에 두 점 $A(2, 4), B(6, 6)$ 이 있다. 점 A를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하자. 점 $C(0, k)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, k 의 값은? [4점]

- (가) $0 < k < 3$
(나) 삼각형 A'BC의 넓이는 삼각형 ACB의 넓이의 2배이다.

- ① $\frac{4}{5}$ ② 1 ③ $\frac{6}{5}$
④ $\frac{7}{5}$ ⑤ $\frac{8}{5}$

13.^{13.}좌표평면에서 원 $x^2+y^2-6x+4y=0$ 의 넓이는? [2점]

- ① 13π ② 17π ③ 21π
④ 25π ⑤ 29π

14. 두 직선 $x+y+2=0, (a+2)x-3y+1=0$ 이 서로 수직일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

15. 직선 $3x-4y+5=0$ 과 평행하고 거리가 2인 직선 중 제 2사분면을 지나는 직선의 방정식이 $3x+ay+b=0$ 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [3점]

- ① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

16. 좌표평면에서 직선 $4x+3y-2=0$ 과 평행하고 점(0, 1)로부터의 거리가 1인 직선은 점(0, a)를 지난다. 양의 실수 a 의 값은? [3점]

- ① $\frac{5}{3}$ ② 2 ③ $\frac{7}{3}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ 3

17. 좌표평면에서 두 직선

$ax+y+1=0, (a+2)x-3y+2=0$ 이 서로 수직일 때, 모든 상수 a 의 값의 합은? [3점]

- ① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

18. 좌표평면에서 평행한 두 직선

$3x+4y+1=0, 3x+4y+a=0$ 사이의 거리가 2일 때, 양수 a 의 값은? [3점]

- ① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

19. 좌표평면에서 세 점(0, 0), (6, 0), (-1, 1)을 지나는 원의 중심의 좌표를 (a, b)라 할 때, $a+b$ 의 값은? [3점]

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

20. 점(3, 4)를 지나는 직선 l 이 두 직선 $x=2$, $x=5$ 와 만나는 점의 y 좌표를 각각 α , β 라 하자. $\alpha\beta$ 의 값이 최대일 때, 원점과 직선 l 사이의 거리는? [4점]

- ① $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{2}}{4}$

21. 좌표평면에서 삼각형 OAB 의 무게중심을 G 라 하자. 두 직선 AG , BG 의 방정식이 각각 $2x+y-1=0$, $x-y-2=0$ 일 때, 직선 AB 의 기울기는? (단, O 는 원점이다.) [4점]

- ① -9 ② -8 ③ -7
④ -6 ⑤ -5

22. 좌표평면에서 세 직선 $x-y+1=0$, $x+2y-3=0$, $ax-3y+2=0$ 으로 둘러싸인 도형이 직각삼각형일 때, a^2 의 값을 구하시오. (단, a 는 상수이다.) [4점]

23. 좌표평면 위의 두 점 A , B 와 2이상의 자연수 k 에 대하여 선분 AB 를 $k : 1$ 로 내분하는 점을 P , $k : 1$ 로 외분하는 점을 Q 라 하자. 두 점 P , Q 사이의 거리가 9이고 $\overline{AP} : \overline{BQ} = 3 : 2$ 일 때, 선분 AB 의 길이를 구하시오. [4점]

24. 원 $x^2+y^2-2x+4y-11=0$ 의 반지름의 길이를 구하시오. [3점]

25. 좌표평면에서 점 $A(4, 3)$ 과 원 $x^2+y^2=16$ 위의 점 P 에 대하여 선분 AP 의 길이의 최솟값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

26. t 가 1보다 큰 실수일 때, 원 $(x+t)^2+y^2=1$ 위의 점 $P(a, b)$ 와 원 $(x-t)^2+y^2=1$ 위의 점 $Q(c, d)$ 가 있다. $ac+bd=0$ 을 만족시키는 두 점 P , Q 의 순서쌍 (P, Q) 의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t 의 값은? [4점]

- ① $\sqrt{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\sqrt{3}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

27. 원 $x^2+y^2+3x+ay+a+b=0$ 이 x 축과 y 축에 동시에 접할 때, 양수 b 의 값은? (단, a , b 는 상수이다.) [4점]

- ① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ 3
④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{21}{4}$

28. 직선 $y=x$ 위의 점을 중심으로 하고, x 축과 y 축에 동시에 접하는 원 중에서 직선 $3x-4y+12=0$ 과 접하는 원의 개수는 2이다. 두 원의 중심을 각각 A , B 라 할 때, \overline{AB}^2 의 값을 구하시오. [4점]

29. 좌표평면 위의 점 $(2, -4)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 2$ 에 그은 두 접선이 각각 y 축과 만나는 점의 좌표를 $(0, a)$, $(0, b)$ 라 할 때, $a+b$ 의 값은? [4점]

- ① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

30. 원 $C: x^2 + y^2 - 5x = 0$ 위의 점 P 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $\overline{OP} = 3$
(나) 점 P 는 제1사분면 위의 점이다.

원 C 위의 점 P 에서의 접선의 기울기가 $\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, O 는 원점이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

31. 좌표평면에서 원 $C: x^2 + y^2 - 4x - 10y + k = 0$ 이 다음 조건을 만족시킬 때, 자연수 k 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. [4점]

- (가) 원 C 는 x 축과 만나지 않는다.
(나) 원 C 는 직선 $3x - 4y - 1 = 0$ 과 만난다.

32. 좌표평면에서 점 $A(1, 2)$ 와 원 $(x+3)^2 + (y-5)^2 = 4$ 위를 움직이는 점 P 에 대하여 선분 AP 의 길이가 정수가 되도록 하는 점 P 의 개수는? [4점]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

33. 좌표평면 위의 세 점 A, B, C 에 대하여 두 점 A, B 의 좌표는 각각 $(0, a)$, $(3, 0)$ 이고, 삼각형 ABC 는 $\overline{AC} = \overline{BC}$ 인 직각이등변삼각형이다. $-1 \leq a \leq 2$ 일 때, 선분 OC 의 길이의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하자. $\frac{M}{m}$ 의 값은? (단, O 는 원점이다.) [4점]

- ① $\frac{14}{3}$ ② 5 ③ $\frac{16}{3}$
④ $\frac{17}{3}$ ⑤ 6

34. 좌표평면에서 원 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 과 직선 $y = mx - m + 1$ 이 서로 다른 두 점 P, Q 에서 만난다. 선분 PQ 와 호 PQ 로 둘러싸인 도형 중 넓이가 작은 도형의 넓이를 S_1 , 선분 OQ 와 호 OQ 로 둘러싸인 도형 중 넓이가 작은 도형의 넓이를 S_2 라 하자. $S_1 = S_2$ 를 만족시키는 모든 실수 m 의 값의 합을 구하시오. (단, O 는 원점이고, 점 P 의 x 좌표는 점 Q 의 x 좌표보다 크다.) [4점]

35. 좌표평면 위의 두 점 $A(-2, 0)$, $B(3, 0)$ 에 대하여 $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 3$ 을 만족시키는 점 P 가 나타내는 도형을 S 라 하자. 도형 S 위를 움직이는 점 P 와 두 점 $C(0, 10)$, $D(4, 2)$ 에 대하여 사각형 $CPDQ$ 가 선분 PC , 선분 PD 를 두 변으로 갖는 평행사변형이 되도록 점 Q 를 정할 때, 평행사변형 $CPDQ$ 의 대각선 PQ 의 길이의 최댓값은? [4점]

- ① 32 ② 34 ③ 36
④ 38 ⑤ 40

36. 좌표평면에서 두 직선 $l_1 : 2x + y = 14$,
 $l_2 : -x + 2y = 8$ 의 교점을 A 라 하자. 점 A 와 원점 O 를
 지름의 양 끝점으로 하는 원 위의 점 P 와 직선 l_1 사이의
 거리의 최댓값은 $a\sqrt{5} + b\sqrt{13}$ 이다. $5(a+b)$ 의 값을
 구하시오. (단, a, b 는 유리수이다.) [4점]

37. 좌표평면에서 반지름의 길이가 r 이고 중심이 이차함
 수 $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}$ 의 그래프 위에 있는 원 중에서, 직선
 $y = x + 7$ 에 접하는 원의 개수를 m 이라 하고 직선 $y = x$ 에
 접하는 원의 개수를 n 이라 하자. m 이 홀수일 때, $m+n+r^2$
 의 값은? (단, r 는 상수이다.) [4점]

- ① 11 ② 12 ③ 13
 ④ 14 ⑤ 15

38. 좌표평면 위의 두 점 $A(5, 12)$, $B(a, b)$ 에 대하여 선분
 AB 의 길이가 3일 때, $a^2 + b^2$ 의 최댓값을 구하시오. [4점]

39.^{39.} 직선 $y = \frac{2}{3}x - 2$ 를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한
 직선의 y 절편은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

40.^{40.} 좌표평면에서 직선 $2x - y + 15 = 0$ 을 x 축의 방향으로
 2만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 직선과 x 축,
 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [3점]

41.^{41.} 좌표평면에서 점 $A(2, -1)$ 을 x 축의 방향으로 5만큼,
 y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 점을 B 라 하고, 점 B 를 직선
 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 C 라 하자. 점 C 의 좌표가
 (a, b) 일 때, $b - a$ 의 값을 구하시오. [3점]

42.^{42.} 직선 $2x + y + 5 = 0$ 을 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의
 방향으로 -1 만큼 평행이동한 직선의 방정식이 $2x + y + a = 0$ 일
 때, 상수 a 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

43.^{43.} 좌표평면 위의 점 $P(a, a^2)$ 을 x 축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$ 만큼,
 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점이 직선 $y = 4x$ 위에 있을
 때, 상수 a 의 값은? [3점]

- ① -2 ② -1 ③ 0
 ④ 1 ⑤ 2

44.^{44.} 좌표평면에서 원 $C_1 : x^2 + y^2 - 2x + 4y = k$ 를 x 축에
 대하여 대칭이동한 원을 C_2 라 하자. 원 C_1 이 원 C_2 의 중심을
 지날 때, 두 원 C_1, C_2 의 내부의 공통부분의 넓이는? (단, k 는
 상수이다.) [4점]

- ① $\frac{32}{3}\pi - 8\sqrt{3}$ ② $\frac{32}{3}\pi + 8\sqrt{3}$ ③ $8\pi - 4\sqrt{3}$
 ④ $8\pi + 4\sqrt{3}$ ⑤ $8\pi + 8\sqrt{3}$

45. 원 $C_1: x^2 + y^2 = 2$ 를 x 축의 방향으로 k 만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 원을 C_2 라 하자. 점 $A(1, 1)$ 에서 원 C_2 에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 상수 k 의 값은? (단, $k > 2$) [4점]

- ① $1 + \sqrt{2}$ ② $2 + \sqrt{2}$ ③ $1 + 2\sqrt{2}$
 ④ $3 + \sqrt{2}$ ⑤ $2 + 2\sqrt{2}$

46. 좌표평면 위에 두 점 $A(1, 2)$, $B(2, 1)$ 이 있다. x 축 위의 점 C 에 대하여 삼각형 ABC 의 둘레의 길이의 최솟값이 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 일 때, 두 자연수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값을 구하시오. (단, 점 C 는 직선 AB 위에 있지 않다.) [4점]

47. 좌표평면에서 원 $x^2 + y^2 + 10x - 12y + 45 = 0$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 원을 C_1 이라 하고, 원 C_1 을 x 축에 대하여 대칭이동한 원을 C_2 라 하자. 원 C_2 의 중심의 좌표를 (a, b) 라 할 때, $10a+b$ 의 값을 구하시오. [3점]

48. 직선 $y = ax - 6$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 직선이 점 $(2, 4)$ 를 지날 때, 상수 a 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

49. 좌표평면 위의 점 $(3, 2)$ 를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A , 점 A 를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 B 라 할 때, 선분 AB 의 길이는? [3점]

- ① $2\sqrt{13}$ ② $3\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{14}$
 ④ $\sqrt{58}$ ⑤ $2\sqrt{15}$

50. 점 $(4, -3)$ 을 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 5 만큼 평행이동한 점의 좌표가 (a, b) 일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오. [3점]

51. 좌표평면에서 직선 $l: y = 3x + k$ 를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 후 원점에 대하여 대칭이동하였더니 원래의 직선 l 과 일치하였을 때, 상수 k 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

52. 직선 $3x + 4y - 12 = 0$ 이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B 라 하자. 선분 AB 를 $2:1$ 로 내분하는 점을 P 라 할 때, 점 P 를 x 축, y 축에 대하여 대칭이동한 점을 각각 Q, R 라 하자. 삼각형 RQP 의 무게중심의 좌표를 (a, b) 라 할 때, $a+b$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{2}{3}$
 ④ $\frac{8}{9}$ ⑤ $\frac{10}{9}$

53. 좌표평면에서 점 $P(1, 3)$ 을 직선 $y = 2x + a$ 에 대하여 대칭이동시킨 점이 $Q(5, b)$ 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, a 는 상수이다.) [4점]

- ① -5 ② -4 ③ -3
 ④ -2 ⑤ -1

54. 좌표평면에서 직선 $3x + 4y + 17 = 0$ 을 x 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 직선이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접할 때, 자연수 n 의 값은? [4점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

55.^{55.}두 집합 $A = \{1, 2, a\}$, $B = \{1, 4, b\}$ 에 대하여 $A = B$ 일 때, $a \times b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [2점]

- ① 7 ② 8 ③ 9
 ④ 10 ⑤ 11

56.^{56.}두 집합

$$A = \{1, 3, 5, 7\}, B = \{1, 5, 9\}$$

에 대하여 집합 $A \cap B$ 의 모든 원소의 합은? [3점]

- ① 4 ② 6 ③ 8
 ④ 10 ⑤ 12

57.^{57.}두 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$ 에 대하여 집합 $A - B$ 의 모든 원소의 합은? [2점]

- ① 2 ② 4 ③ 6
 ④ 8 ⑤ 10

58.^{58.}두 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ 에 대하여 집합 $B - A$ 의 모든 원소의 합은? [2점]

- ① 7 ② 8 ③ 9
 ④ 10 ⑤ 11

59.^{59.}두 집합 $A = \{1, 2, a^2 - 6\}$, $B = \{a + 2, 4, 2a + 9\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{3\}$ 일 때, 집합 $B - A$ 의 모든 원소의 합은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

60.^{60.}두 집합 $A = \{1, 3, a\}$, $B = \{2, b\}$ 에 대하여

$A - B = \{1, 4\}$ 일 때, $a + b$ 의 값은? (단, a, b 는 실수이다.) [2점]

- ① 3 ② 4 ③ 5
 ④ 6 ⑤ 7

61.^{61.}두 집합 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ 에 대하여 집합 $A \cap B$ 의 모든 원소의 합은? [2점]

- ① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

62.^{62.}전체집합 $U = \{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$ 의 두 부분집합 $A = \{2, 3, 7\}$, $B = \{1, 3, 7, 9\}$

에 대하여 집합 $A \cup B^c$ 의 모든 원소의 합은? [2점]

- ① 16 ② 17 ③ 18
④ 19 ⑤ 20

63.^{63.}두 집합

$$A = \{x | (x-5)(x-a)=0\}, \quad B = \{-3, 5\}$$

에 대하여 $A \subset B$ 를 만족시키는 양수 a 의 값을 구하시오. [3점]

64.^{64.}자연수 n 에 대하여 자연수 전체 집합의 부분집합 A_n 을 다음과 같이 정의하자.

$$A_n = \{x | x \text{는 } \sqrt{n} \text{ 이하의 홀수}\}$$

$A_n \subset A_{25}$ 를 만족시키는 n 의 최댓값을 구하시오. [3점]

65.^{65.}전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 부분집합 A 에 대하여

$$\{1, 2\} - A = \{1\}, \quad n(A) = 3$$

을 만족시키는 집합 A 의 개수를 구하시오. [3점]

66.^{66.}두 집합 $A = \{a, a^2 + 1\}$, $B = \{a + 3, a^2\}$ 에 대하여

$B - A = B$ 를 만족시키도록 하는 10 이하의 모든 자연수 a 의 값의 합은? [3점]

- ① 44 ② 46 ③ 48
④ 50 ⑤ 52

67.^{67.}전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 두 부분집합 A , B 에 대하여

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad A \cup B = U$$

를 만족시키는 모든 집합 B 의 개수를 구하시오. [3점]

68.^{68.}두 집합 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여

$$X \subset B, \quad X \cap A \neq \emptyset$$

를 만족시키는 집합 X 의 개수를 구하시오. [3점]

69. 전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 U 의 부분집합 X 의 개수를 구하시오. [4점]

- (가) 집합 X 의 원소의 개수는 2 이상이다.
 (나) 집합 X 의 원소 중 가장 큰 수와 가장 작은 수의 곱은 18이다

70. 전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 1 < x < 10 \text{인 자연수}\}$ 의 부분집합 A 를

$$A = \left\{ x \mid \frac{(x-1)!}{x} \text{은 자연수} \right\}$$

라 할 때, $A \subset X \subset U$ 를 만족시키는 모든 집합 X 의 개수를 구하시오. [4점]

71. 두 집합 $A = \{-2, 1\}$, $B = \{x \mid m^2x - 4 = 3mx\}$ 에 대하여 $A \cap B = B$ 가 되도록 하는 모든 실수 m 의 값의 합은? [4점]

- ① 5 ② 6 ③ 7
 ④ 8 ⑤ 9

72. 전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 9 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 A , B 에 대하여 $A = \{2, 4, 5, 7\}$, $n(A \cap B) = 2$ 이고 집합 B 의 모든 원소의 합이 짝수가 되도록 하는 집합 B 의 개수를 구하시오. [4점]

73. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 부분집합 A , B 에 대하여 $A - B = \{1\}$ 을 만족하는 모든 순서쌍 (A, B) 의 개수는? [4점]

- ① 81 ② 87 ③ 93
 ④ 99 ⑤ 105

74. 50명의 학생들을 대상으로 어느 수학 문제를 잠깐 보여주고 풀 수 있을지에 대한 의견을 물은 다음, 실제로 문제를 풀도록 하였더니 다음과 같은 결과가 나왔다고 한다.

- (가) 문제를 풀 수 있다고 대답한 학생은 36명이다.
 (나) 실제로 문제를 풀어 답을 맞춘 학생은 30명이다.
 (다) 문제를 풀 수 있다고 대답한 학생 중에서 실제로는 답을 맞히지 못한 학생은 9명이다.

문제를 풀 수 있다고 대답했거나 실제로 답을 맞히지 못한 학생의 수를 구하시오. [4점]

75. 은행 A 또는 은행 B를 이용하는 고객 중 남자 35명과 여자 30명을 대상으로 두 은행 A, B의 이용 실태를 조사한 결과가 다음과 같다.

- (가) 은행 A를 이용하는 고객의 수와 은행 B를 이용하는 고객의 수의 합은 82이다.
 (나) 두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 남자 고객의 수와 두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 여자 고객의 수는 같다.

이 고객 중 은행 A와 은행 B를 모두 이용하는 여자 고객의 수는? [4점]

- ① 5 ② 6 ③ 7
 ④ 8 ⑤ 9

76. 전체집합 $U = \{x | x \text{는 } 20 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 $A = \{x | x \text{는 } 4 \text{의 배수}\}$, $B = \{x | x \text{는 } 20 \text{의 약수}\}$ 에 대하여 집합 $(A \cup B)^C$ 의 모든 원소의 합을 구하시오. [4점]

77. 전체집합 $U = \{x | x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 6\}$ 에 대하여 $A \cap X = \{3, 4, 5\}$, $n(B \cup X) = 6$ 을 만족시키는 U 의 부분집합 X 의 모든 원소의 합의 최댓값은? [4점]

① 28 ② 29 ③ 30
④ 31 ⑤ 32

78. 어느 반 학생 24명을 대상으로 두 편의 연극 A, B의 관람여부를 조사하였더니 두 편의 연극을 모두 본 학생 수는 두 편의 연극을 모두 보지 않은 학생 수의 3배이고, 연극 B만 본 학생 수는 연극 A만 본 학생 수의 2배이었다. 연극 A를 본 학생이 13명일 때, 두 편의 연극을 모두 본 학생 수를 구하시오. [4점]

79. 전체집합 $U = \{x | x \text{는 } 19 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 부분집합 A 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 집합 A 의 모든 원소 a 에 대하여 $2a \notin A$ 이다.
(나) 집합 A 의 모든 원소의 합은 짝수이다.

집합 A 의 원소의 개수가 최대일 때, 모든 원소의 합의 최댓값은? [4점]

- ① 124 ② 132 ③ 140
④ 148 ⑤ 156

80. 전체집합

$U = \{x | x \text{는 } 3 \text{의 배수가 아닌 } 30 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 부분집합 A 에 대하여 $n(A) = 4$ 이고 집합 A 의 모든 원소의 합은 100이다. 집합 A 의 모든 원소를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 x_1, x_2, x_3, x_4 라 할 때, $x_4 - x_3 + x_2 - x_1$ 의 최댓값을 구하시오. [4점]

정답 및 해설

1. **정답** ①

$$\overline{AB} = \sqrt{(2-1)^2 + \{1-(-3)\}^2} = \sqrt{17}$$

2. **정답** ④

두 점 $A(a, -4)$, $B(3, b)$ 에 대하여 선분 AB 를 3 : 2로 외분하는 점의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$x = \frac{3 \times 3 - 2 \times a}{3 - 2} = 9 - 2a = -3$$

즉, $2a = 12$ 이므로 $a = 6$

$$y = \frac{3 \times b - 2 \times (-4)}{3 - 2} = 3b + 8 = 2$$

즉, $3b = -6$ 이므로 $b = -2$

따라서 $a + b = 4$

3. **정답** ④

$$\begin{aligned} \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 &= (a-3)^2 + 2^2 + (a+1)^2 + 4^2 \\ &= 2a^2 - 4a + 30 = 2(a-1)^2 + 28 \end{aligned}$$

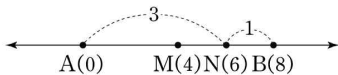
따라서 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$ 은 $a=1$ 일 때, 최솟값 28을 갖는다.

4. **정답** ④

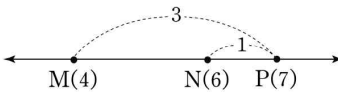
수직선 위의 두 점 A , B 의 좌표를 각각 0, 8이라 하자.

선분 AB 의 중점 M 의 좌표는 $\frac{0+8}{2}$, 즉 4이다.

선분 AB 를 3 : 1로 내분하는 점 N 의 좌표는 $\frac{3 \times 8 + 1 \times 0}{3+1}$, 즉 6이다.



따라서 두 점 $M(4)$, $N(6)$ 을 양 끝점으로 하는 선분 MN 을 3 : 1로 외분하는 점 P 의 좌표는 $\frac{3 \times 6 - 1 \times 4}{3 - 1}$, 즉 7이다.



그러므로 선분 AP 의 길이는 7이다.

5. **정답** ④

[출제의도] 좌표평면에서 외분점의 좌표를 계산한다.

두 점 $A(-2, 0)$, $B(a, b)$ 에 대하여 선분 AB 를 2 : 1로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times a - 1 \times (-2)}{2 - 1}, \frac{2 \times b - 1 \times 0}{2 - 1} \right)$$

즉 $(2a+2, 2b)$

이 점의 좌표가 $(10, 0)$ 이므로

$$2a+2=10, 2b=0$$

$$a=4, b=0$$

따라서 $a+b=4$

[다른 풀이]

$P(10, 0)$ 이라 하자.

점 P 가 선분 AB 를 2 : 1로 외분하는 점이므로 점 B 는 선분 AP 의 중점이다.

$A(-2, 0)$, $B(a, b)$, $P(10, 0)$ 에서 선분 AP 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-2+10}{2}, \frac{0+0}{2} \right)$$

즉 $(4, 0)$

이 점의 좌표와 점 B 의 좌표가 같으므로

$$a=4, b=0$$

따라서 $a+b=4$

6. **정답** 29

[출제의도] 두 점 사이의 거리를 계산한다.

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{(4+1)^2 + (1-3)^2} \\ &= \sqrt{29} \end{aligned}$$

선분 AB 를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는

$$\overline{AB}^2 = 29$$

7. **정답** ①

[출제의도] 직선의 방정식을 이해한다.

직선 $12x - 2y + 5 = 0$ 에서

$$y = 6x + \frac{5}{2}$$

따라서 직선 $12x - 2y + 5 = 0$ 의 기울기는 6이다.

8. **정답** ①

$$3x + y - 1 = 0 \text{에서 } y = -3x + 1$$

이때 직선 $y = -3x + 1$ 과 평행한 직선의 기울기는 -3 이므로

기울기가 -3 이고 점 $(1, -5)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y = -3x - 2 \text{이다.}$$

따라서 구하는 y 절편은 -2 이다.

9. **정답** ②

$$(2k+1)x + (k-3)y - 6k + 4 = 0 \text{에서}$$

$$x - 3y + 4 + k(2x + y - 6) = 0$$

실수 k 의 값에 관계없이 위의 등식이 항상 성립해야 하므로

$$x - 3y + 4 = 0 \quad \text{㉠}$$

$$2x + y - 6 = 0 \quad \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } x=2, y=2$$

따라서 주어진 직선은 k 의 값에 관계없이 항상

점 $(2, 2)$ 를 지나므로 $a+b=4$

10. **정답** ②

점 $H(4, 3)$ 이 직선 $ax + by - 50 = 0$ 위의 점이므로

$$4a + 3b - 50 = 0, 4a + 3b = 50 \quad \text{㉢}$$

$$\text{직선 } OH \text{의 기울기는 } \frac{3-0}{4-0} = \frac{3}{4}$$

직선 $ax+by-50=0$ 의 기울기는 $-\frac{a}{b}$ 이고

두 직선은 서로 수직이므로

$$\frac{3}{4} \times \left(-\frac{a}{b}\right) = -1, \quad 3a-4b=0 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

㉠, ㉡에서 $a=8, b=6$ 이므로 $a+b=14$

11. 정답 ③

점 P 와 직선 AB 사이의 거리가 최대하려면 점 P 에서 이차함수 $y=-x^2+4x+5$ 와 접하는 직선의 기울기가 2이어야 한다.

따라서 이 직선의 방정식을 $y=2x+k$ (k 는 상수)라 놓으면

$$-x^2+4x+5=2x+k$$

$$x^2-2x-5+k=0 \quad \dots\dots \textcircled{D}$$

㉠의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - (-5+k) = 6-k=0$$

$$k=6$$

따라서 이차함수 $y=-x^2+4x+5$ 의 그래프와 점 P 에서 접하는 기울기가 2인 직선의 방정식

$$y=2x+6 \quad \dots\dots \textcircled{E}$$

점 P 와 직선 $y=2x$ 사이의 거리는 원점과 직선

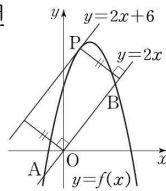
$y=2x+6$ 사이의 거리와 같으므로

점 P 와 직선 $y=2x$ 사이의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|0-0+6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

따라서 점 P 와 직선 AB 사이의 거리의 최댓값은

$$\frac{6\sqrt{5}}{5} \text{ 이다.}$$



12. 정답 ③

[출제의도] 점과 직선 사이의 거리를 활용하여 문제 해결하기

$$\text{직선 } AB \text{의 방정식은 } y = \frac{1}{2}x + 3$$

직선 AB 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한

$$\text{직선 } A'B \text{의 방정식은 } y=2x-6$$

점 C 와 직선 $A'B$ 사이의 거리는

점 C 와 직선 AB 사이의 거리의 2배이다.

$$\frac{|-k-6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|-2k+6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} \times 2$$

$$0 < k < 3 \text{ 이므로 } k+6=2(-2k+6)$$

$$\text{따라서 } k = \frac{6}{5}$$

13. 정답 ①

[출제의도] 원의 넓이를 구할 수 있다.

$$x^2+y^2-6x+4y=0 \text{에서}$$

$$(x-3)^2+(y+2)^2=13$$

따라서 이 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{13}$ 이므로 넓이는

$$(\sqrt{13})^2\pi = 13\pi$$

14. 답 ②

[해설] [출제의도] 두 직선의 수직 조건을 이용하여 상수의 값을 구한다.

직선 $x+y+2=0$ 의 기울기는 -1 이고,

직선 $(a+2)x-3y+1=0$ 의 기울기는 $\frac{a+2}{3}$ 이다.

두 직선 $x+y+2=0, (a+2)x-3y+1=0$ 이 서로 수직이므로 두 직선의 기울기의 곱은 -1 이다.

$$\text{따라서 } (-1) \times \frac{a+2}{3} = -1 \text{ 이므로}$$

$$a=1$$

15. 답 ①

[해설]

직선 $3x-4y+5=0$ 과 평행하고 거리가 2인 직선의 방정식을 $3x-4y+k=0$ (k 는 상수) $\dots\dots \textcircled{1}$

라 하면, 직선 $3x-4y+5=0$ 의 한 점(1, 2)와 직선㉠사이의 거리가 2이므로

$$\frac{|3-8+k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = 2, \quad \frac{|k-5|}{5} = 2$$

$$|k-5|=10$$

$$k-5=10 \text{ 일 때, } k=15$$

$$k-5=-10 \text{ 일 때, } k=-5$$

이때 직선㉠이 제 2사분면을 지나야 하므로 $k=15$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$3x-4y+15=0 \text{ 이므로}$$

$$a=-4, b=15$$

$$\text{따라서 } a+b=11$$

16. 답 ④

[해설] 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 조건을 만족시키는 값을 구할 수 있다.

구하는 직선의 방정식을 $4x+3y+k=0$ 이라 하면 점(0, 1)과 직선 $4x+3y+k=0$ 사이의 거리가 1이므로

$$\frac{|4 \times 0 + 3 \times 1 + k|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 1, \quad |3+k|=5$$

$$\text{즉, } 3+k=5 \text{ 또는 } 3+k=-5 \text{ 이므로 } k=2 \text{ 또는 } k=-8$$

따라서 직선의 방정식은

$$4x+3y+2=0 \text{ 또는 } 4x+3y-8=0$$

$$\text{이므로 양의 실수 } a \text{의 값은 } \frac{8}{3}$$

17. 답 ①

[해설] 이해력 - 도형의 방정식

두 직선 $ax+y+1=0, (a+2)x-3y+2=0$ 이 서로 수직이므로

$$a(a+2)-3=0 \text{에서 } a^2+2a-3=0, (a+3)(a-1)=0$$

$$\therefore a=-3 \text{ 또는 } a=1$$

따라서 모든 상수 a 의 값의 합은 $(-3)+1=-2$

18. 답 ①

[해설] 이해력 - 도형의 방정식

평행한 두 직선 $3x+4y+1=0$, $3x+4y+a=0$ 사이의 거리가 2
이므로 직선 $3x+4y+1=0$ 위의 점 $(1, -1)$ 과 직선
 $3x+4y+a=0$ 사이의 거리도 2이다.

$$\text{즉 } \frac{|3-4+a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2 \text{에서 } \frac{|a-1|}{5}=2, |a-1|=10$$

$$a-1=10 \text{ 또는 } a-1=-10$$

$$\therefore a=11 \text{ 또는 } a=-9$$

따라서 양수 a 의 값은 11이다.

19. 답 ③

[해설] 이해력 - 도형의 방정식

원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ (A, B, C 는 상수)

라 하면 이 원이 세 점 $(0, 0)$, $(6, 0)$, $(-1, 1)$ 을 지나므로

$$x=0, y=0 \text{을 대입하면 } C=0$$

$$x=6, y=0 \text{을 대입하면 } 36+6A=0$$

$$\therefore A=-6$$

$$x=-1, y=1 \text{을 대입하면 } 8+B=0$$

$$\therefore B=-8$$

따라서 원의 방정식은

$$x^2+y^2-6x-8y=0$$

이를 표준형으로 변형하면

$$(x-3)^2+(y-4)^2=25$$

이므로 원의 중심의 좌표는 $(3, 4)$ 이다.

$$\therefore a=3, b=4$$

$$\therefore a+b=7$$

20. 답 ②

[해설]

직선 l 의 기울기를 m 이라 하자. 직선 l 은 점 $(3, 4)$ 를 지나므로
직선 l 의 방정식은

$$y-4=m(x-3) \quad \dots\dots ①$$

①과 두 직선 $x=2$, $x=5$ 가 만나는 점의 y 좌표는 각각

$$\alpha=-m+4, \beta=2m+4 \text{이므로}$$

$$\alpha\beta=-2m^2+4m+16$$

$$=-2(m-1)^2+18$$

따라서 $m=1$ 일 때 $\alpha\beta$ 의 값이 최대이므로 직선 l 의 방정식은

$$x-y+1=0$$

원점과 직선 $x-y+1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

21. 답 ⑤

[해설]

꼭짓점 A, B 의 좌표를 각각 $A(a, -2a+1)$, $B(b, b-2)$ 로 놓으
면

삼각형 OAB 의 무게중심 G 의 좌표는 $G\left(\frac{a+b}{3}, \frac{-2a+b-1}{3}\right)$ 이

다.

한편, 두 직선 $2x+y-1=0$, $x-y-2=0$ 의 교점의 좌표는
 $(1, -1)$ 이므로 $G(1, -1)$ 이다.

따라서

$$\frac{a+b}{3}=1, a+b=3 \quad \dots\dots ⑦$$

$$\frac{-2a+b-1}{3}=-1, 2a-b=2 \quad \dots\dots ⑧$$

$$⑦, ⑧ \text{을 연립하면 } a=\frac{5}{3}, b=\frac{4}{3}$$

따라서 $A\left(\frac{5}{3}, -\frac{7}{3}\right)$, $B\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ 이므로

직선 AB 의 기울기는

$$\frac{-\frac{7}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)}{\frac{5}{3}-\frac{4}{3}}=\frac{-\frac{5}{3}}{\frac{1}{3}}=-5$$

22. 답 9

[해설] $l_1 : x-y+1=0$, 즉 $y=x+1$

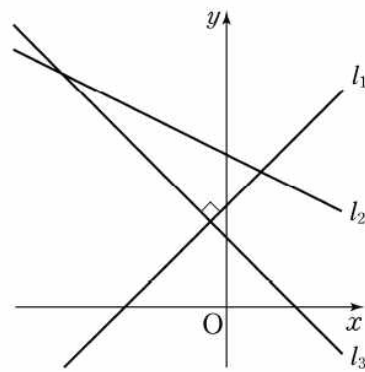
$$l_2 : x+2y-3=0, \text{ 즉 } y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

$$l_3 : ax-3y+2=0, \text{ 즉 } y=\frac{a}{3}x+\frac{2}{3}$$

라 하면 두 직선 l_1, l_2 는 서로 수직이 아니므로 세 직선으로 둘러
싸인 도형이 직각삼각형이 되려면 다음과 같은 경우로 나누어
생각해야 한다.

(i) 두 직선 l_1, l_3 이 수직인 경우

$$1 \times \frac{a}{3} = -1 \text{에서 } a=-3$$



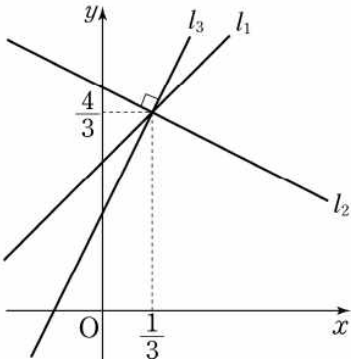
(ii) 두 직선 l_2, l_3 이 수직인 경우

$$-\frac{1}{2} \times \frac{a}{3} = -1 \text{에서 } a=6$$

그런데 $a=6$ 일 때, 직선 l_3 은 두 직선 l_1, l_2 의 교점 $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ 를

지나므로 세 직선은 한 점에서 만난다. 따라서 세 직선 $l_1, l_2,$

l_3 으로 둘러싸인 도형은 존재하지 않는다.

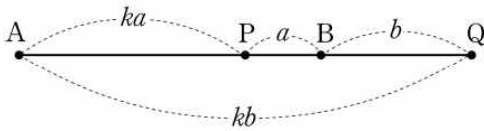


(i), (ii)에 의하여 세 직선으로 둘러싸인 도형이 직각삼각형이 되도록 하는 상수 a 의 값은 -3 이다.

$$\therefore a^2 = 9$$

23. 답 12

[해설]



선분 AB 를 $k : 1$ 로 내분하는 점이 P 이므로

$$\overline{AP} = ka, \overline{BP} = a \quad (a > 0) \text{이라 하고,}$$

선분 AB 를 $k : 1$ 로 외분하는 점이 Q 이므로

$$\overline{AQ} = kb, \overline{BQ} = b \quad (b > 0) \text{이라 하자.}$$

이때 두 점 P, Q 사이의 거리가 9이므로

$$\overline{PQ} = a + b = 9 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\overline{AP} : \overline{BQ} = 3 : 2 \text{이므로 } ka : b = 3 : 2$$

$$\therefore 3b = 2ka \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\overline{AQ} = \overline{AP} + \overline{PB} + \overline{BQ} \text{이므로 } kb = ka + a + b \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{3} \text{에서 } kb = ka + 9 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } k = \frac{3b}{2a}$$

$$\text{이것을 } \textcircled{4} \text{에 대입하면 } \frac{3b^2}{2a} = \frac{3ab}{2a} + 9, \quad 3b^2 = 3ab + 18a$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } a = 9 - b \text{이므로 } 3b^2 = 3 \times (9 - b) \times b + 18 \times (9 - b)$$

$$3b^2 = 27b - 3b^2 + 162 - 18b$$

$$6b^2 - 9b - 162 = 0, \quad 2b^2 - 3b - 54 = 0$$

$$(b - 6)(2b + 9) = 0$$

$$b > 0 \text{이므로 } b = 6$$

$$\therefore a = 3, \quad k = 3$$

$$\text{따라서 선분 } AB \text{의 길이는 } ka + a = 3 \times 3 + 3 = 12$$

24. 정답 4

[출제의도] 원의 방정식 계산하기

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11$$

$$= (x - 1)^2 + (y + 2)^2 - 5 - 11 = 0$$

$$\text{원의 방정식은 } (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$$

따라서 원의 반지름의 길이는 4

25. 정답 ①

[출제의도] 원의 성질을 이용하여 선분의 길이의 최솟값을 추론한다.

점 A 의 좌표가 $(4, 3)$ 이므로

$$\overline{OA} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

점 P 는 원 $x^2 + y^2 = 16$ 위의 점이므로

$$\overline{OP} = 4$$

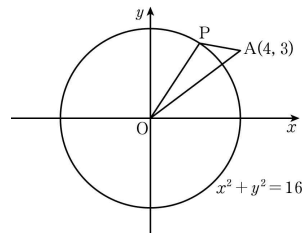
이때 그림과 같이 임의의 점 P 에 대하여

$$\overline{OA} \leq \overline{OP} + \overline{PA}$$

가 성립하므로

$$\overline{AP} \geq \overline{OA} - \overline{OP} = 5 - 4 = 1$$

따라서 선분 AP 의 길이의 최솟값은 1이다.



26. 정답 ①

#원의_방정식 #원과_직선의_위치_관계

#점과_직선_사이의_거리

[출제의도] 원의 방정식을 이용하여 조건을 만족시키는 값을 구할 수 있다.

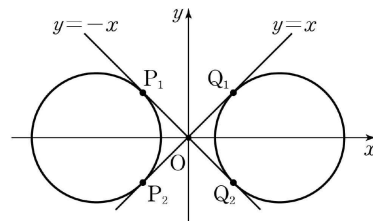
$t > 1$ 이므로 $ac \neq 0$ 이다.

$ac + bd = 0$ 에서 $bd = -ac$ 이고, 두 직선 OP, OQ 의 기울기는 각각

$$\frac{b}{a}, \frac{d}{c} \text{이므로}$$

$$\frac{b}{a} \times \frac{d}{c} = \frac{bd}{ac} = \frac{-ac}{ac} = -1$$

따라서 두 직선 OP, OQ 는 서로 수직이어야 한다. 이때 주어진 두 원은 합동이고 서로 y 축에 대하여 대칭이므로 두 점 P, Q 의 순서쌍 (P, Q) 의 개수가 2인 경우는 다음 그림과 같이 두 원이 서로 수직인 두 직선 $y = x, y = -x$ 에 모두 접할 때이다.



원 $(x - t)^2 + y^2 = 1$ 의 중심 $(t, 0)$ 과 직선 $y = x$ 사이의 거리가 1이어야 하므로

$$\frac{|t - 0|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 1, \quad |t| = \sqrt{2}$$

$$\therefore t = \sqrt{2} \quad (\because t > 1)$$

27. 정답 ⑤

[이해력-도형의 방정식]

$$x^2 + y^2 + 3x + ay + a + b$$

$$= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - \frac{a^2}{4} + a + b = 0 \text{에서}$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - a - b + \frac{9}{4}$$

이 원이 x 축과 y 축에 동시에 접하려면 중심 $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{a}{2}\right)$ 가

직선 $y = x$ 또는 $y = -x$ 위에 있어야 하므로 $a = 3$ 또는 $a = -3$

또한 반지름의 길이는 $\frac{3}{2}$ 이어야 하므로

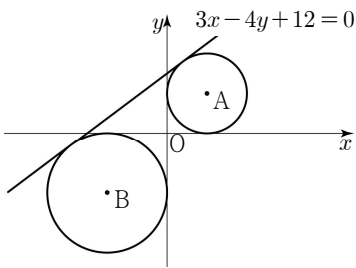
$$\frac{a^2}{4} - a - b + \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2, \text{ 즉 } b = \frac{a^2}{4} - a$$

$$a = 3 \text{ 이면 } b = \frac{9}{4} - 3 = -\frac{3}{4}, \quad a = -3 \text{ 이면 } b = \frac{9}{4} + 3 = \frac{21}{4}$$

따라서 양수 b 의 값은 $\frac{21}{4}$ 이다.

28. **정답** 50

[출제의도] 원과 직선의 위치 관계를 활용하여 문제 해결하기



원의 중심을 (a, a) 라 하면

점 (a, a) 와 직선 $3x - 4y + 12 = 0$ 사이의 거리는 반지름의 길이 $|a|$ 와 같으므로

$$\frac{|3a - 4a + 12|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = |a|$$

$$|-a + 12| = 5|a|$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 + a - 6 = 0$$

$$a = -3 \text{ 또는 } a = 2$$

제1사분면 위의 점을 A, 제3사분면 위의 점을 B라 하면 $A(2, 2)$, $B(-3, -3)$

$$\text{따라서 } \overline{AB}^2 = \{2 - (-3)\}^2 + \{2 - (-3)\}^2 = 50$$

29. **정답** ③

[출제의도] 원과 직선의 위치관계 이해하기

점 $(2, -4)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 2$ 에 그은 접선의 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은

$$y + 4 = m(x - 2) \text{이다.}$$

원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $y + 4 = m(x - 2)$ 사이의 거리는 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|-2m - 4|}{\sqrt{1 + m^2}} = \sqrt{2} \text{에서 } m^2 + 8m + 7 = 0$$

$$m = -1 \text{ 또는 } m = -7$$

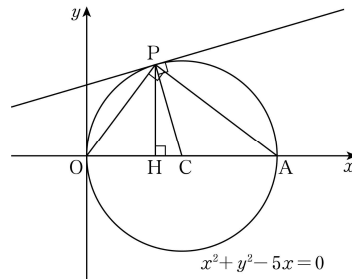
$y = mx - 2m - 4$ 가 y 축과 만나는 점의 좌표는

$$(0, -2), (0, 10)$$

$$\text{따라서 } a + b = 8$$

30. **정답** 31

[출제의도] 원의 성질을 이용하여 접선의 기울기를 구하는 문제를 해결한다.



원 $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$ 의 중심을 C라 하면 좌표는 $C\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ 이다.

원이 x 축과 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 A라 하고 점 P에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

점 P가 원 C 위의 점이고 선분 OA가 원 C의 지름이므로 $\angle OPA = 90^\circ$

삼각형 OAP에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AP} &= \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OP}^2} \\ &= \sqrt{5^2 - 3^2} \\ &= 4 \end{aligned}$$

삼각형 OAP와 삼각형 OPH에서

$$\angle OPA = \angle OHP = 90^\circ$$

$$\angle AOP = \angle POH$$

$$\triangle OAP \sim \triangle OPH \quad (\because \text{AA 닮음})$$

$$\overline{OA} : \overline{OP} = \overline{OP} : \overline{OH} \text{이고}$$

$$\text{조건 (가)에서 } \overline{OP} = 3 \text{이고 } \overline{OA} = 5 \text{이므로}$$

$$5 : 3 = 3 : \overline{OH}$$

$$\overline{OH} = \frac{9}{5}$$

$$\overline{OH} : \overline{HP} = \overline{OP} : \overline{PA}$$

$$\frac{9}{5} : \overline{HP} = 3 : 4$$

$$\overline{HP} = \frac{12}{5}$$

따라서 점 $P\left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$ 이다.

$C\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ 이므로 직선 CP의 기울기는

$$\begin{aligned} \frac{-\frac{12}{5}}{\frac{5}{2} - \frac{9}{5}} &= \frac{-\frac{24}{10}}{\frac{7}{10}} \\ &= -\frac{24}{7} \end{aligned}$$

점 P에서의 접선과 직선 CP는 서로 수직이고 두 직선의 기울기의 곱이 -1 이므로

호남제일고 1학년 7월 20일 논술형 평가 자료

점 P에서의 접선의 기울기는 $\frac{7}{24}$

따라서 $p=24$, $q=7$ 이므로

$p+q=31$

[다른 풀이 1]

원 $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$ 의 중심을 C라 하면 좌표는 $C\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ 이다.

원이 x 축과 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 A라 하고 점 P에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

점 P가 원 C 위의 점이고 선분 OA가 원 C의 지름이므로 $\angle OPA=90^\circ$

삼각형 OAP에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AP} &= \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OP}^2} \\ &= \sqrt{5^2 - 3^2} \\ &= 4\end{aligned}$$

삼각형 OAP와 삼각형 OPH에서

$$\angle OPA = \angle OHP = 90^\circ$$

$$\angle AOP = \angle POH$$

$$\triangle OAP \sim \triangle OPH \quad (\because \text{AA 닮음})$$

$$\overline{OA} : \overline{OP} = \overline{OP} : \overline{OH} \text{이고}$$

조건 (가)에서 $\overline{OP}=3$ 이고 $\overline{OA}=5$ 이므로

$$5:3=3:\overline{OH}$$

$$\overline{OH} = \frac{9}{5}$$

$$\overline{OH} : \overline{HP} = \overline{OP} : \overline{PA}$$

$$\frac{9}{5} : \overline{HP} = 3 : 4$$

$$\overline{HP} = \frac{12}{5}$$

따라서 점 $P\left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$ 이다.

원 $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$ 과 점 $P\left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$ 를 x 축의 방향으로 $-\frac{5}{2}$ 만큼 평행이동한 원과 점을 각각 C_1 , P_1 이라 하면

$$C_1 : x^2+y^2=\frac{25}{4}, P_1\left(-\frac{7}{10}, \frac{12}{5}\right)$$

원 C_1 위의 점 P_1 에서의 접선의 방정식은

$$-\frac{7}{10}x + \frac{12}{5}y = \frac{25}{4}$$

위의 직선의 기울기는

$$\frac{\frac{7}{10}}{\frac{12}{5}} = \frac{7}{24}$$

이고 이 직선은 원 C 위의 점 P에서의 접선과 서로 평행하므로

원 C 위의 점 P에서의 접선의 기울기는 $\frac{7}{24}$ 이다.

따라서 $p=24$, $q=7$ 이므로

$p+q=31$

[다른 풀이 2]

원 $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$ 의 중심을 C라 하면 좌표는 $C\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ 이다.

원이 x 축과 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 A라 하고 점 P에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

점 P가 원 C 위의 점이고 선분 OA가 원 C의 지름이므로 $\angle OPA=90^\circ$

삼각형 OAP에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AP} &= \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OP}^2} \\ &= \sqrt{5^2 - 3^2} \\ &= 4\end{aligned}$$

삼각형 OAP와 삼각형 OPH에서

$$\angle OPA = \angle OHP = 90^\circ$$

$$\angle AOP = \angle POH$$

$$\triangle OAP \sim \triangle OPH \quad (\because \text{AA 닮음})$$

$$\overline{OA} : \overline{OP} = \overline{OP} : \overline{OH} \text{이고}$$

조건 (가)에서 $\overline{OP}=3$ 이고 $\overline{OA}=5$ 이므로

$$5:3=3:\overline{OH}$$

$$\overline{OH} = \frac{9}{5}$$

$$\overline{OH} : \overline{HP} = \overline{OP} : \overline{PA}$$

$$\frac{9}{5} : \overline{HP} = 3 : 4$$

$$\overline{HP} = \frac{12}{5}$$

따라서 점 $P\left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$ 이다.

점 P를 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$$y = m\left(x - \frac{9}{5}\right) + \frac{12}{5}$$

$$5mx - 5y - 9m + 12 = 0$$

위의 직선이 원 $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$ 에 접하므로 원의 중심

$C\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ 과 직선 $5mx - 5y - 9m + 12 = 0$ 사이의 거리는 원의 반

지름의 길이 $\frac{5}{2}$ 와 같다.

$$\frac{\left|\frac{25}{2}m - 9m + 12\right|}{\sqrt{(5m)^2 + (-5)^2}} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{\left|\frac{7}{2}m + 12\right|}{5\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{5}{2}$$

$$25\sqrt{m^2 + 1} = |7m + 24|$$

위 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$625m^2 + 625 = 49m^2 + 336m + 576$$

$$576m^2 - 336m + 49 = 0$$

$$(24m - 7)^2 = 0$$

$$m = \frac{7}{24}$$

따라서 $p = 24$, $q = 7$ 이므로
 $p + q = 31$

31. 답 25

[해설] $x^2 + y^2 - 4x - 10y + k = 0$ 에서

$$(x-2)^2 + (y-5)^2 = 29-k$$

즉, 원 C 는 중심의 좌표가 $(2, 5)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{29-k}$ 인 원이다.

조건 (가)에서 원 C 가 x 축과 만나지 않으므로 원 C 의 중심과 x 축 사이이 거리가 반지름의 길이보다 커야 한다.

$$\text{즉, } \sqrt{29-k} < 5 \text{에서 } 29-k < 25$$

$$\therefore k > 4 \dots \textcircled{1}$$

조건 (나)에서 원 C 가 직선 $3x-4y-1=0$ 과 만나므로 원 C 의 중심과 직선 $3x-4y-1=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이보다 작거나 같아야 한다.

$$\text{즉, } \frac{|6-20-1|}{\sqrt{3^2+4^2}} \leq \sqrt{29-k} \text{에서 } 3 \leq \sqrt{29-k}$$

$$9 \leq 29-k \quad \therefore k \leq 20 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에 의하여 } 4 < k \leq 20$$

따라서 자연수 k 의 최댓값은 20이고 최솟값은 5이므로 자연수 k 의 최댓값과 최솟값의 합은 $20+5=25$

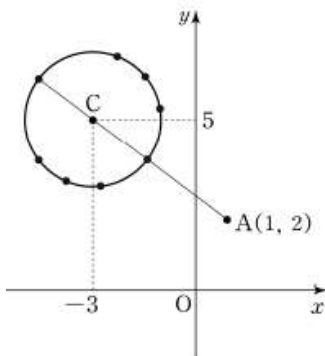
32. 답 ⑤

[해설] 이해력 - 도형의 방정식

원 $(x+3)^2 + (y-5)^2 = 2^2$ 의 중심의 좌표가 $C(-3, 5)$ 이고 반지름의 길이가 2이므로 $\overline{AC} = \sqrt{(-3-1)^2 + (5-2)^2} = 5$

$$5-2 \leq \overline{AP} \leq 5+2$$

$$\therefore 3 \leq \overline{AP} \leq 7$$

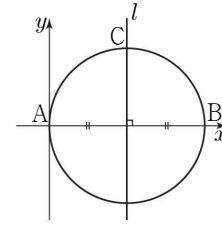


선분 AP 의 길이가 정수가 되므로 하는 점 P 의 개수는 $\overline{AP}=3$, $\overline{AP}=7$ 을 만족하는 점 P 가 각각 1개씩 있고, $\overline{AP}=4$, $\overline{AP}=5$, $\overline{AP}=6$ 을 만족하는 점 P 가 직선 AC 를 기준으로 각각 양쪽에 1개씩 총 2개씩 있으므로 $1+1+2+2+2=8$

33. 답 ②

[해설] [출제의도] 원의 성질을 이용하여 추론하기

i) $a=0$ 일 때, 직선 l 의 방정식은 $x = \frac{3}{2}$



$$\overline{OC} = \frac{3}{2} \sqrt{2}$$

ii) $a \neq 0$ 일 때,

$$\angle AOB = \angle ACB = 90^\circ \text{ 이므로}$$

네 점 A, O, B, C 가 한 원 위에 있고, 선분 AB 는 이 원의 지름이다.

이 원의 방정식은

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2+9}{4} \dots \textcircled{1}$$

$\overline{AC} = \overline{BC}$ 이므로 점 C 는 선분 AB 의 수직이등분선 l 과 원이 만나는 점이다.

$$\text{직선 } l \text{의 방정식은 } y - \frac{a}{2} = \frac{3}{a} \left(x - \frac{3}{2}\right) \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에 의해

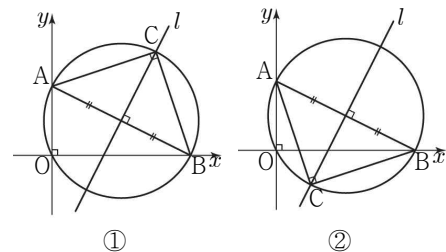
$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{a^2} \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{a^2+9}{4}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$x = \frac{3+a}{2} \text{ 또는 } x = \frac{3-a}{2}$$

$\textcircled{2}$ 에 대입하면 점 C 의 좌표는

$$C\left(\frac{3+a}{2}, \frac{3+a}{2}\right) \text{ 또는 } C\left(\frac{3-a}{2}, -\frac{3-a}{2}\right)$$



$$\textcircled{1} \quad C\left(\frac{3+a}{2}, \frac{3+a}{2}\right) \text{일 경우}$$

$$\overline{OC} = \sqrt{\left(\frac{3+a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3+a}{2}\right)^2} = \sqrt{2} \left| \frac{3+a}{2} \right|$$

$-1 \leq a \leq 2 (a \neq 0)$ 이므로

$$\sqrt{2} \leq \overline{OC} < \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ 또는 } \frac{3\sqrt{2}}{2} < \overline{OC} \leq \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$\textcircled{2} \quad C\left(\frac{3-a}{2}, -\frac{3-a}{2}\right) \text{일 경우}$$

$$\overline{OC} = \sqrt{\left(\frac{3-a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3-a}{2}\right)^2} = \sqrt{2} \left| \frac{3-a}{2} \right|$$

$-1 \leq a \leq 2 (a \neq 0)$ 이므로

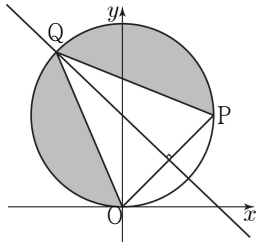
$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \overline{OC} < \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ 또는 } \frac{3\sqrt{2}}{2} < \overline{OC} \leq 2\sqrt{2}$$

$$\text{i), ii)에 의해 } M = \frac{5}{2} \sqrt{2}, m = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{따라서 } \frac{M}{m} = 5$$

34. 답 2

[해설] [출제의도] 원과 직선의 위치 관계를 이용하여 추론하기



직선 $y = mx - m + 1 = m(x - 1) + 1$ 은 m 의 값에 관계없이 점 $(1, 1)$ 을 지난다.
 점 P의 x 좌표는 점 Q의 x 좌표보다 크므로 $P(1, 1)$
 $S_1 = S_2$ 이므로 $\overline{PQ} = \overline{OQ}$
 삼각형 PQO가 이등변삼각형이므로
 선분 OP의 수직이등분선은 점 Q를 지난다.
 선분 OP를 수직이등분하는 직선의 방정식은

$$y - \frac{1}{2} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{즉, } y = -x + 1 \cdots \textcircled{1}$$

①을 $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ 에 대입하여 정리하면
 $x^2 + (-x + 1 - 1)^2 = 1$

$$\text{즉, } x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ 또는 } x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

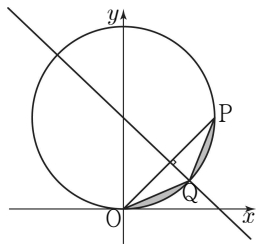
$$Q\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ 또는 } Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

m 은 직선 PQ의 기울기이므로

$$m = 1 - \sqrt{2} \text{ 또는 } m = 1 + \sqrt{2}$$

따라서 모든 실수 m 의 값의 합은 2

참고로 $m = 1 + \sqrt{2}$ 일 때의 그림은 아래와 같다.



35. 답 ①

[해설] $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 3$ 이므로 $3\overline{AP} = 2\overline{BP}$

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

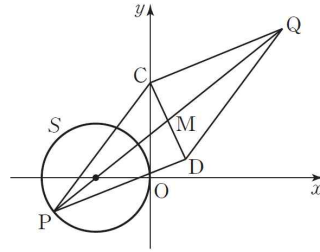
$$3\sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-3)^2 + y^2}$$

$$9\{(x+2)^2 + y^2\} = 4\{(x-3)^2 + y^2\}$$

$$5x^2 + 60x + 5y^2 = 0, \quad x^2 + 12x + y^2 = 0$$

$$(x+6)^2 + y^2 = 36$$

즉, 점 P는 원 $S : (x+6)^2 + y^2 = 36$ 위의 점이다.



두 점 $C(0, 10)$, $D(4, 2)$ 의 중점을 M이라 하면 M의 좌표는 $\left(\frac{0+4}{2}, \frac{10+2}{2}\right)$ 에서 $(2, 6)$

원 S의 중심의 좌표는 $S(-6, 0)$ 이므로

$$\overline{SM} = \sqrt{(-6-2)^2 + (0-6)^2} = 10$$

원 S의 반지름의 길이가 6이므로 선분 PM의 최댓값은 $10 + 6 = 16$

$\overline{PQ} = 2\overline{PM}$ 이므로 선분 PQ의 길이의 최댓값은

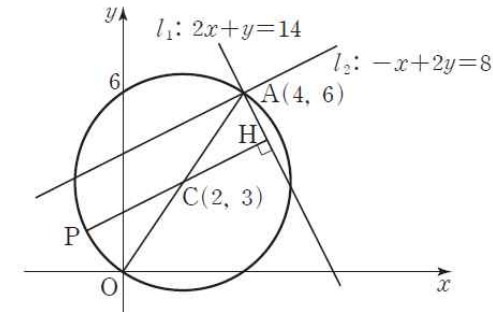
$$16 \times 2 = 32$$

36. 답 12

[해설] 두 직선의 방정식 $2x + y = 14$, $-x + 2y = 8$ 을 연립하여 풀면 $x = 4$, $y = 6$ 이므로 두 직선의 교점 A의 좌표는 $(4, 6)$ 이다.

점 A(4, 6)과 원점 O를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 중심을 C라 하면 점 C의 좌표는 $(2, 3)$ 이고 원의 반지름의 길이는

$$\overline{OC} = \sqrt{(2-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{13}$$



원의 중심 C에서 직선 l_1 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{CH} = \frac{|2 \times 2 + 3 - 14|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}$$

점 P와 직선 l_1 사이의 거리의 최댓값은 $\frac{7\sqrt{5}}{5} + \sqrt{13}$

$$\therefore a = \frac{7}{5}, \quad b = 1$$

$$\therefore 5(a+b) = 5\left(\frac{7}{5} + 1\right) = 12$$

37. 답 ③

[해설] [출제의도] 원과 직선의 위치 관계를 활용하여 문제해결하기

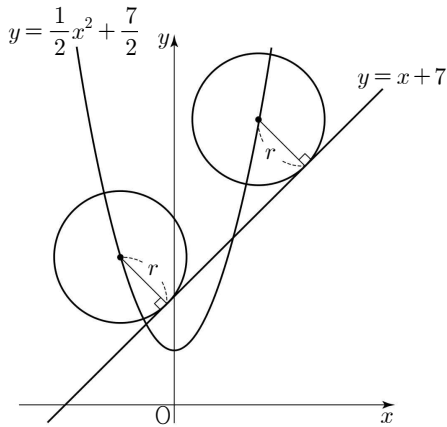
반지름의 길이가 r 이고 중심이 이차함수

$$y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}$$

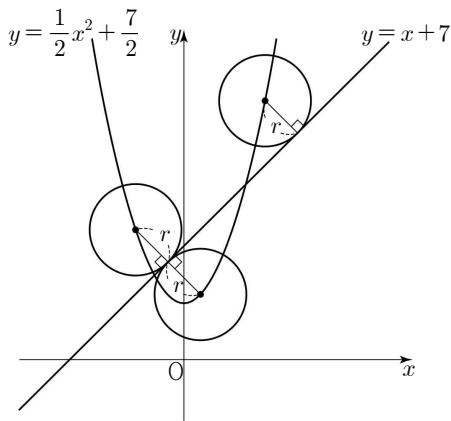
직선 $y = x + 7$ 에 접하는 원의 개수 m 은 반지름

r 의 길이에 따라 다음과 같은 세 가지 경우가 있다.

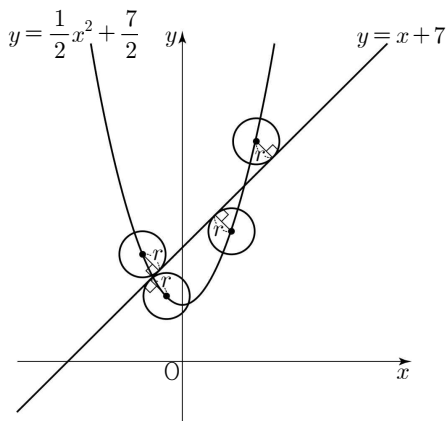
(i) $m=2$ 일 때,



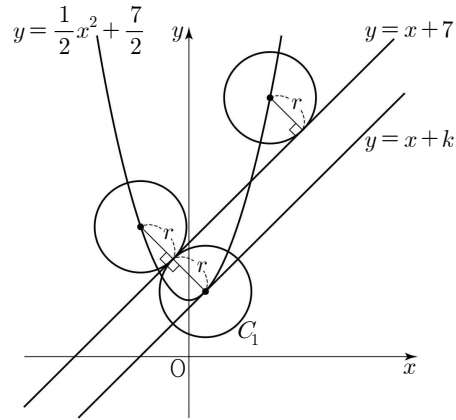
(ii) $m=3$ 일 때,



(iii) $m=4$ 일 때,



이 중 m 이 홀수인 경우는 $m=3$ 일 때이므로 직선 $y=x+7$ 에 접하는 원 중 직선 $y=x+7$ 의 아래쪽에 위치한 원이 한 개일 때이다.



이 원을 C_1 이라 하면 원 C_1 의 반지름의 길이 r 는 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}$ 의 그래프에 접하고 기울기가 1인 직선과 직선 $y=x+7$ 사이의 거리와 같다.

이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}$ 의 그래프에 접하고

기울기가 1인 직선을 $y=x+k$ 라 하면

이차방정식 $\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2} = x+k$ 가 중근을 가져야하므로

$x^2 - 2x + 7 - 2k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$D = 2^2 - 4 \times 1 \times (7 - 2k) = 0$ 에서 $k=3$

두 직선 $y=x+7$ 과 $y=x+3$ 사이의 거리는

직선 $y=x+3$ 위의 점 $(0, 3)$ 과 직선 $y=x+7$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-3+7|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 2\sqrt{2}$$

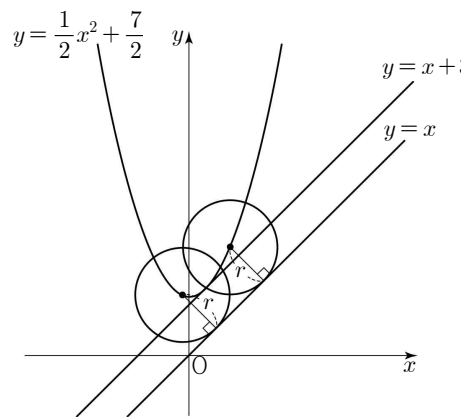
$$\therefore r = 2\sqrt{2}$$

직선 $y=x$ 과 직선 $y=x+3$ 사이의 거리는

직선 $y=x$ 위의 점 $(0, 0)$ 과 직선 $y=x+3$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$r = 2\sqrt{2} > \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ 이므로 } n=2$$



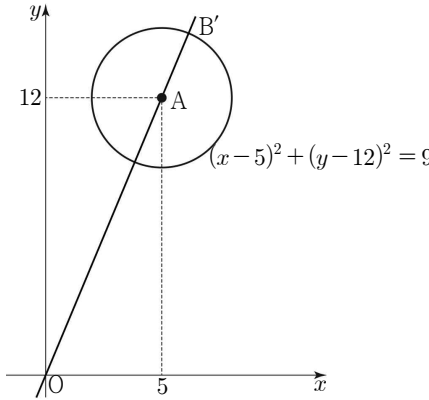
$$\text{따라서 } m+n+r^2 = 3+2+(2\sqrt{2})^2 = 13$$

38. 답 256

[해설] [출제의도] 원의 성질을 활용하여 문제해결하기
 두 점 A(5, 12), B(a, b)에 대하여 선분 AB의
 길이가 3이므로

$$\sqrt{(a-5)^2 + (b-12)^2} = 3$$

$$(a-5)^2 + (b-12)^2 = 9$$



점 B는 원 $(x-5)^2 + (y-12)^2 = 9$ 위의 점이다.

원점 O에 대하여 $a^2 + b^2 = \overline{OB}^2$ 이므로

\overline{OB} 의 길이가 최대일 때 $a^2 + b^2$ 이 최댓값을 갖는다.

직선 OA가 원과 만나는 두 점 중 원점에서

더 멀리 있는 점을 B'라 하면 선분 OB의 길이의
 최댓값은 선분 OB'의 길이와 같다.

$$\overline{OB'} = \overline{OA} + \overline{AB'}$$

$$= \sqrt{5^2 + 12^2} + 3$$

$$= \sqrt{169} + 3$$

$$= 13 + 3$$

$$= 16$$

선분 OB의 길이의 최댓값은 16

따라서 $a^2 + b^2$ 의 최댓값은 $16^2 = 256$

39. **정답** ③

[출제의도] 직선의 대칭이동을 할 수 있다.

직선 $y = \frac{2}{3}x - 2$ 를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 직선의

방정식은

$$x = \frac{2}{3}y - 2 \quad \text{즉,} \quad y = \frac{3}{2}x + 3$$

이므로 y절편은 3이다.

40. **정답** 16

#평행이동 #넓이

좌표평면에서 직선 $2x - y + 15 = 0$ 을 x 축의 방향으로 2만큼
 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$2(x-2) - (y+3) + 15 = 0, \quad \text{즉} \quad 2x - y + 8 = 0$$

이 직선과 x축, y축이 만나는 점의 좌표는 각각

$(-4, 0)$, $(0, 8)$ 이므로 구하는 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 8 = 16$$

41. **정답** 11

이해력-도형의 방정식

점 A(2, -1)을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -3만큼
 평행이동한 점은

B(2+5, -1-3), 즉 B(7, -4)이고

점 B(7, -4)를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점은
 C(-4, 7)이다.

$$\therefore b - a = 7 - (-4) = 11$$

42. **정답** ②

[출제의도] 도형의 평행이동 이해하기

직선 $2x + y + 5 = 0$ 을 x 축의 방향으로 2만큼,

y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의

방정식은 $2(x-2) + (y+1) + 5 = 0$

$$2x + y + 2 = 0$$

따라서 $a = 2$

43. **정답** ⑤

[출제의도] 도형의 평행이동 이해하기

점 P(a, a²)을 x축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$ 만큼,

y축의 방향으로 2만큼 평행이동한

점 $\left(a - \frac{1}{2}, a^2 + 2\right)$ 가 직선 $y = 4x$ 위에 있으므로

$$a^2 + 2 = 4a - 2$$

$$(a-2)^2 = 0$$

따라서 $a = 2$

44. **정답** ①

[수학 내적 문제 해결 능력-도형의 방정식]

두 원 C₁, C₂의 중심을 각각 C₁, C₂라 하자.

$x^2 + y^2 - 2x + 4y = k$ 에서 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = k+5$ 이므로 중심

C₁의 좌표는 C₁(1, -2), 반지름의 길이는 $\sqrt{k+5}$ 이다.

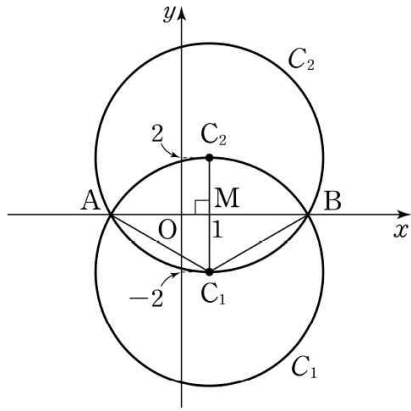
한편, 원 C₁이 원 C₂의 중심 C₂를 지나려면 원 C₁의 반지름의
 길이는 선분 C₁C₂의 길이와 같아야 한다.

원 C₁을 x축에 대하여 대칭이동한 원 C₂의 중심은

C₂(1, 2)이므로 $\overline{C_1C_2} = 2 - (-2) = 4$

따라서 $\sqrt{k+5} = 4$ 이므로 $k+5 = 4^2$

$$\therefore k = 16 - 5 = 11$$



한편, 두 원 C_1 , C_2 의 반지름의 길이는 4로 같으므로 두 원의 교점을 A, B라 하고, 선분 AB의 중점을 M이라 하면 $\overline{C_1M} \perp \overline{AB}$ 이고 $\overline{AC_1} = 4$, $\overline{MC_1} = 2$ 이다.

즉, $\overline{AM} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$ 이므로

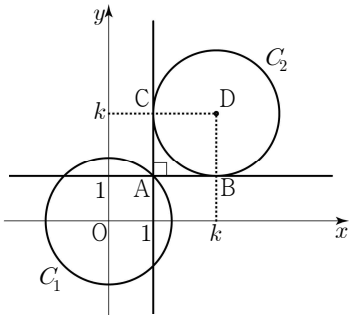
$\angle AC_1B = 120^\circ$ 이고, $\overline{AB} = 2\overline{AM} = 4\sqrt{3}$

따라서 그림에서 두 원 C_1 , C_2 의 내부의 공통부분의 넓이는

$$S = 2 \left(16\pi \times \frac{120^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 2 \right) = \frac{32}{3}\pi - 8\sqrt{3}$$

45. 정답 ①

[출제의도] 도형의 평행이동을 활용하여 문제 해결하기



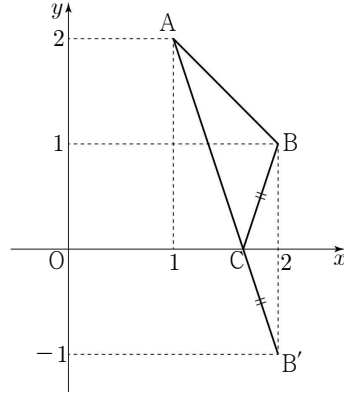
점 A(1, 1)에서 원 C_2 에 그은 두 접선이 원 C_2 와 만나는 점을 각각 B, C라 하고, 원 C_2 의 중심을 D(k, k)라 하자.

사각형 ABDC는 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 정사각형이다.

$k > 2$ 이므로 $k = 1 + \sqrt{2}$

46. 정답 12

[출제의도] 대칭이동을 활용하여 문제해결하기



삼각형 ABC의 둘레의 길이는 $\overline{AC} + \overline{CB} + \overline{BA}$

점 B(2, 1)을 x 축에 대하여 대칭이동한 점을

B' 이라 하면 점 B' 의 좌표는 (2, -1)이다.

$\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AC} + \overline{CB'} \geq \overline{AB'}$ 이고

$\overline{BA} = \sqrt{2}$, $\overline{AB'} = \sqrt{10}$ 이므로

삼각형 ABC의 둘레의 길이의 최솟값은 $\sqrt{2} + \sqrt{10}$

따라서 $a + b = 12$

47. 답 56

[해설] [출제의도] 도형의 대칭이동을 이해하여 원의 중심의 좌표를 구한다.

원 $x^2 + y^2 + 10x - 12y + 45 = 0$ 은

$(x+5)^2 + (y-6)^2 = 16$ 이므로

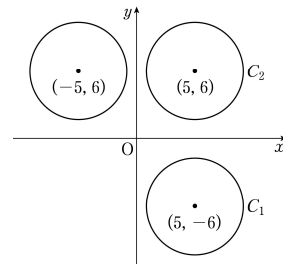
중심의 좌표는 (-5, 6)이다.

원 C_1 의 중심의 좌표는 점 (-5, 6)을 원점에 대하여 대칭이동한 점이므로 (5, -6)이다.

원 C_2 의 중심의 좌표는 점 (5, -6)을 x 축에 대하여 대칭이동한 점이므로 (5, 6)이다.

$a = 5$, $b = 6$ 이므로

$10a + b = 50 + 6 = 56$



48. 답 ①

[해설] [출제의도] 도형의 대칭이동 이해하기

직선 $y = ax - 6$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한

직선은 $y = -ax + 6$ 이고, 이 직선이

점 (2, 4)를 지나므로 $4 = -2a + 6$

따라서 $a = 1$

49. 답 ①

[해설] [출제의도] 점의 대칭이동 이해하기

A(2, 3), B(-2, -3)이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{(-2-2)^2 + (-3-3)^2} = 2\sqrt{13}$$

50. 답 3

[해설] 점 (4, -3) 을 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 5 만큼 평행이동하면 $(4+(-3), -3+5)$ 에서 (1, 2)

$$\therefore a=1, b=2$$

$$\therefore a+b=1+2=3$$

51. 답 ⑤

[해설] 이해력 - 도형의 방정식

직선 $l: y=3x+k$ 를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 직선의 방정식은 $y+4=3(x-2)+k$

$$\therefore y=3x+k-10$$

직선 $y=3x+k-10$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$-y=-3x+k-10$$

$$\therefore y=3x-k+10$$

직선 l 과 직선 $y=3x-k+10$ 이 일치해야 하므로

$$3x+k=3x-k+10, 2k=10 \therefore k=5$$

52. 답 ⑤

[해설] [출제의도] 선분의 내분을 이용하여

수학 내적 문제 해결하기

직선 $3x+4y-12=0$ 이 x 축, y 축과 만나는 점은 각각 $A(4, 0)$, $B(0, 3)$ 이므로

선분 AB 를 2 : 1로 내분하는 점은 $P\left(\frac{4}{3}, 2\right)$

점 P 를 x 축, y 축에 대하여 대칭이동한 점은

각각 $Q\left(\frac{4}{3}, -2\right)$, $R\left(-\frac{4}{3}, 2\right)$ 이므로

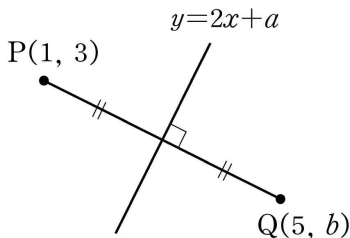
삼각형 RQP 의 무게중심의 좌표 (a, b) 는

$$\left(\frac{4}{9}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\text{따라서 } a+b=\frac{10}{9}$$

53. 답 ③

[해설]



두 점 P, Q 가 직선 $y=2x+a$ 에 대하여 서로 대칭이므로 직선 $y=2x+a$ 는 선분 PQ 의 수직이등분선이다.

선분 PQ 의 중점의 좌표는 $\left(\frac{1+5}{2}, \frac{3+b}{2}\right)$, 즉 $\left(3, \frac{3+b}{2}\right)$ 이고,

중점이 직선 $y=2x+a$ 위의 점이므로

$$\frac{3+b}{2}=6+a$$

$$\therefore 2a-b=9 \quad \dots\dots ㉑$$

또한 두 점 P, Q 를 지나는 직선과 직선 $y=2x+a$ 가 서로 수직이므로

$$2 \times \frac{b-3}{5-1} = -1$$

$$\therefore b=1 \quad \dots\dots ㉒$$

㉒을 ㉑에 대입하면

$$2a-1=-9 \text{ 이므로 } a=-4$$

$$\therefore a+b=(-4)+1=-3$$

54. 답 ④

[해설] [출제의도] 도형의 평행이동 이해하기

직선 $3x+4y+17=0$ 을 x 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$3(x-n)+4y+17=0$$

직선 $3x+4y-3n+17=0$ 이 원 $x^2+y^2=1$ 에

접하므로 원의 중심 $(0, 0)$ 과

직선 $3x+4y-3n+17=0$ 사이의 거리가 1이다.

$$\frac{|-3n+17|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1 \text{ 에서}$$

$$-3n+17=5 \text{ 또는 } -3n+17=-5$$

$$\therefore n=4 \text{ 또는 } n=\frac{22}{3}$$

n 은 자연수이므로 $n=4$

55. 정답 ②

[출제의도] 집합 이해하기

$$A=B \text{ 이므로 } a=4, b=2$$

$$\text{따라서 } a \times b=8$$

56. 정답 ②

계산 능력 - 집합과 명제

[해설]

$A=\{1, 3, 5, 7\}$, $B=\{1, 5, 9\}$ 에서 $A \cap B=\{1, 5\}$ 이므로 모든 원소의 합은 $1+5=6$

57. 정답 ③

$A-B=\{2, 4\}$ 이므로 모든 원소의 합은 6이다.

58. 정답 ⑤

[출제의도] 차집합의 원소의 합을 구할 수 있다.

$$A \cap B=\{4\} \text{ 이므로 } B-A=\{5, 6\}$$

따라서 집합 $B-A$ 의 모든 원소의 합은 $5+6=11$

59. 정답 ③

$$A \cap B=\{3\} \text{ 이므로 } a^2-6=3$$

$$\therefore a=-3 \text{ 또는 } a=3$$

(i) $a=3$ 이면 $B=\{4, 5, 15\}$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

호남제일고 1학년 7월 20일 논술형 평가 자료

(ii) $a = -3$ 이면 $B = \{-1, 3, 4\}$ 이므로 $B - A = \{-1, 4\}$
 (i), (ii)에서 집합 $B - A$ 의 모든 원소의 합은 $-1 + 4 = 3$

60. **정답** ⑤

계산 능력 - 집합과 명제

$A - B = \{1, 4\}$ 이므로

$a = 4, b = 3$

$\therefore a + b = 7$

61. **정답** ②

[출제의도] 교집합의 원소의 합을 구할 수 있다.

$A \cap B = \{1, 3\}$ 이므로 집합 $A \cap B$ 의 모든 원소의 합은

$1 + 3 = 4$ 이다.

62. **정답** ⑤

이해 능력 - 집합과 명제

$B^c = \{2, 8\}$ 이므로 $A \cup B^c = \{2, 3, 7, 8\}$ 이다.

따라서 집합 $A \cup B^c$ 의 모든 원소의 합은

$2 + 3 + 7 + 8 = 20$

63. **정답** 5

[출제의도] 집합 사이의 포함관계를 이용하여

추론하기

$A \subset B$ 이고 a 는 양수이므로 $a = 5$

64. **정답** 48

[출제의도] 집합의 포함관계를 이용하여 조건에 맞는 집합을 추론한다.

$\sqrt{25} = 5$ 이므로

$A_{25} = \{1, 3, 5\}$

$1 \leq \sqrt{n} < 7$ 이면

$A_n \subset A_{25}$ 이므로

$1 \leq n < 49$

따라서 자연수 n 의 최댓값은 48이다.

65. **정답** 20

[출제의도] 집합의 연산을 이용하여 부분집합의 개수를 구할 수 있다.

$\{1, 2\} - A = \{1\}$ 이므로 집합 A 는 1은 포함하지 않고, 2는 반드시 포함해야 한다.

한편, $n(A) = 3$ 이므로 집합 A 는 집합 $\{3, 4, 5, 6\}$ 의 부분집합 중 원소의 개수가 2인 집합에 2를 포함시킨 집합이다.

따라서 구하는 모든 집합 A 의 개수는 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_4C_2 = 6$

66. **정답** ⑤

$B - A = B$ 에서 $A \cap B = \emptyset$

$A \cap B = \emptyset$ 이라면 $a \neq a^2, a^2 + 1 \neq a + 3$

a 는 자연수이므로 $a \neq a^2$ 에서 $a \neq 1$

$a^2 + 1 \neq a + 3$ 에서 $a \neq 2$

따라서 조건을 만족시키는 a 의 값은 3부터 10까지의 자연수이므로

구하는 a 의 값의 합은 $3 + 4 + \dots + 10 = 52$

67. **정답** 16

이해력 - 집합과 명제

$A \cup B = U$ 이므로 $\{5, 6\} \subset B$ 이어야 한다.

따라서 집합 B 의 개수는 집합 $\{1, 2, 3, 4\}$ 의 부분집합의 개수와 같으므로

$2^4 = 16$

68. **정답** 24

#부분집합의 개수

[출제의도] 부분집합의 개수를 구할 수 있다.

집합 B 의 모든 부분집합의 개수는

$2^5 = 32$

이 중에서 $X \cap A = \emptyset$ 인 집합 X 의 개수는 집합 $\{4, 5, 6\}$ 의 부분집합의 개수와 같으므로

$2^3 = 8$

따라서 $X \cap A \neq \emptyset$ 인 집합 X 의 개수는

$32 - 8 = 24$

69. **정답** 68

[출제의도] 부분집합의 개수를 구할 수 있다.

(i) 집합 X 의 원소 중 가장 큰 수가 9이고 가장 작은 수가 2일 때

집합 X 의 개수는 집합 $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 의 부분집합의 개수와 같으므로

$2^6 = 64$

(ii) 집합 X 의 원소 중 가장 큰 수가 6이고 가장 작은 수가 3일 때

집합 X 의 개수는 집합 $\{4, 5\}$ 의 부분집합의 개수와 같으므로

$2^2 = 4$

(i), (ii)에서 구하는 집합 X 의 개수는

$64 + 4 = 68$

70. **정답** 32

이해력 - 집합과 명제

$x = 2$ 일 때, $\frac{(2-1)!}{2} = \frac{1}{2}$ 이므로 집합 A 의 원소가 아니다.

$x = 3$ 일 때, $\frac{(3-1)!}{3} = \frac{2}{3}$ 이므로 집합 A 의 원소가 아니다.

$x = 4$ 일 때, $\frac{(4-1)!}{4} = \frac{3 \times 2 \times 1}{4} = \frac{3}{2}$ 이므로 집합 A 의 원소가 아니다.

$x=5$ 일 때, $\frac{(5-1)!}{5} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{5} = \frac{24}{5}$ 이므로 집합 A 의 원소가 아니다.

$x=6$ 일 때, $\frac{(6-1)!}{6} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{6} = 20$ 이므로 집합 A 의 원소이다.

$x=7$ 일 때, $\frac{(7-1)!}{7} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{7} = \frac{720}{7}$ 이므로 집합 A 의 원소가 아니다.

$x=8$ 일 때, $\frac{(8-1)!}{8} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{8} = 630$ 이므로 집합 A 의 원소이다.

$x=9$ 일 때, $\frac{(9-1)!}{9} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{9} = 4480$ 이므로 집합 A 의 원소이다.

따라서 $A = \{6, 8, 9\}$ 이므로 $A \subset X \subset U$ 를 만족시키는 모든 집합 X 의 개수는 $2^{8-3} = 32$ 이다.

[다른 풀이]

(i) x 가 소수일 때

$(x-1)!$ 은 x 를 인수로 가질 수 없으므로 $\frac{(x-1)!}{x}$ 은 자연수일 수 없다.

(ii) $x = a \times b$ ($1 < a < b$, a, b 는 자연수)일 때,
 $1 < a < b \leq x-1$ 이므로 $(x-1)!$ 은 a 와 b 를 인수로 가진다.
 따라서 $\frac{(x-1)!}{x}$ 은 자연수이다.

이를 만족시키는 $1 < x < 10$ 인 자연수는
 $a=2$ 인 경우 $x=6, 8$
 $a=3$ 인 경우 x 는 집합 U 의 원소가 아니다.
 따라서 $A \supset \{6, 8\}$

(iii) $x = c^2$ (c 는 소수)일 때,
 $c=2$ 일 때, $\frac{3!}{4} = \frac{3}{2}$ 이므로 자연수가 아니다.
 $c=3$ 일 때, $\frac{8!}{9}$ 은 자연수이다.

$c \geq 5$ 일 때, $c^2 \geq 25$ 이므로 x 는 집합 U 의 원소가 아니다.
 따라서 $A \supset \{9\}$

(i), (ii), (iii)에 의하여
 $A = \{6, 8, 9\}$
 따라서 $A \subset X \subset U$ 를 만족시키는 모든 집합 X 의 개수는 $2^{8-3} = 32$ 이다.

71. **정답** ⑤

$A \cap B = B$ 이므로 $B \subset A$ 이고, 집합 B 에서

$$(m^2 - 3m)x = 4$$

(i) $m^2 - 3m = 0$, 즉 $m=0$ 또는 $m=3$ 이면

집합 $B = \emptyset$ 이므로 $B \subset A$ 를 만족시킨다.

(ii) $m^2 - 3m \neq 0$ 이면 집합 B 의 원소는 $x = \frac{4}{m^2 - 3m}$

한 개뿐이다.

$B \subset A$ 이므로 $\frac{4}{m^2 - 3m} = -2$ 또는 $\frac{4}{m^2 - 3m} = 1$ 이어야 한다.

$$\frac{4}{m^2 - 3m} = -2 \text{ 이면 } m^2 - 3m + 2 = 0 \text{ 이므로}$$

$$m = 1 \text{ 또는 } m = 2$$

$$\frac{4}{m^2 - 3m} = 1 \text{ 이면 } m^2 - 3m - 4 = 0 \text{ 이므로}$$

$$m = -1 \text{ 또는 } m = 4$$

(i), (ii)에서 모든 실수 m 의 값의 합은

$$0 + 3 + 1 + 2 - 1 + 4 = 9$$

72. **정답** 96

(i) $2 \in B, 4 \in B$ 인 경우

$5 \notin B, 7 \notin B$ 이고, 집합 B 의 모든 원소의 합은 짝수이어야 하므로 세 수 1, 3, 9가 모두 집합 B 의 원소가 아니거나 세 수 1, 3, 9 중 두 수만 집합 B 의 원소이다. 한편, 6, 8은 집합 B 의 원소이거나 원소가 아니어도 되므로 주어진 조건을 만족시키는 집합 B 의 개수는 $({}_3C_0 + {}_3C_2) \times 2^2 = (1+3) \times 2^2 = 16$

(ii) $5 \in B, 7 \in B$ 인 경우

$2 \notin B, 4 \notin B$ 이고, 세 수 1, 3, 9가 모두 집합 B 의 원소가 아니거나 세 수 1, 3, 9 중 두 수만 집합 B 의 원소이다. 한편, 6, 8은 집합 B 의 원소이거나 원소가 아니어도 되므로 주어진 조건을 만족시키는 집합 B 의 개수는

$$({}_3C_0 + {}_3C_2) \times 2^2 = (1+3) \times 2^2 = 16$$

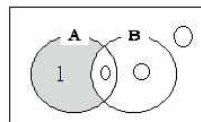
(iii) 두 수 2, 4 중 한 수만 집합 B 의 원소이고, 두 수 5, 7 중 한 수만 집합 B 의 원소인 경우

세 수 1, 3, 9 중 한 수만 집합 B 의 원소이거나 세 수 1, 3, 9가 모두 집합 B 의 원소이다. 한편, 6, 8은 집합 B 의 원소이거나 원소가 아니어도 되므로 주어진 조건을 만족시키는 집합 B 의 개수는 ${}_2C_1 \times {}_2C_1 \times ({}_3C_1 + {}_3C_3) \times 2^2 = 64$

(i)~(iii)에서 구하는 집합 B 의 개수는

$$16 + 16 + 64 = 96$$

73. **정답** ①



그림에서

2, 3, 4, 5가 들어갈 수 있는 자리는 각각 3곳이므로 $3^4 = 81$

74. **정답** 47

수학 외적 문제 해결 능력-집합과 명제

50명의 학생들의 집합을 U , 문제를 풀 수 있다고 대답한 학생의 집합을 A , 실제로 답을 맞춘 학생의 집합을 B 라고 하면 주어진 조건에서

$$n(A) = 36, n(B) = 30, n(A \cap B^c) = 9$$

이때 $n(U) = 50$ 이므로

$$n(B^c) = 50 - 30 = 20$$

이때 문제를 풀 수 있다고 대답했거나 실제로 답을 맞추지 못한 학생의 집합은 $A \cup B^c$ 이므로 구하는 학생의 수는

$$\begin{aligned} n(A \cap B^c) &= n(A) + n(B^c) - n(A \cup B^c) \\ &= 36 + 20 - 9 = 47 \end{aligned}$$

75. **정답** ②

[출제의도] 집합의 연산을 이용하여 실생활 문제를 해결한다. 은행 A와 은행 B를 이용하는 고객의 집합을 각각 A, B라 하면 조건 (가)에서

$$n(A) + n(B) = 82$$

$$n(A \cup B) = 65$$

$$\begin{aligned} n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\ &= 82 - 65 \\ &= 17 \end{aligned}$$

따라서 한 은행만 이용하는 고객의 수는 $65 - 17 = 48$ 이고 조건 (나)에서 두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 남자 고객의 수와 두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 여자 고객의 수는 각각 24명이다.

따라서 은행 A와 은행 B를 모두 이용하는 여자 고객의 수는 $30 - 24 = 6$ 이다.

[다른 풀이]

조건 (나)에서 두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 남자 고객의 수와 두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 여자 고객의 수가 같으므로 이를 x 라 하면 은행 A와 은행 B를 모두 이용하는 남자 고객의 수는 $35 - x$ 이고, 은행 A와 은행 B를 모두 이용하는 여자 고객의 수는 $30 - x$ 이다.

조건 (가)에서

$$\{x + 2(35 - x)\} + \{x + 2(30 - x)\} = 82$$

$$2x + (70 - 2x) + (60 - 2x) = 82$$

$$2x = 48$$

$$x = 24$$

따라서 은행 A와 은행 B를 모두 이용하는 여자 고객의 수는 $30 - 24 = 6$ 이다.

76. **정답** 36

[출제의도] 집합의 연산 법칙을 이해한다.

$$A = \{x \mid x \text{는 } 4 \text{의 배수}\}$$

$$= \{4, 8, 12, 16, 20\}$$

$$B = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{의 약수}\}$$

$$= \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$$

드모르간의 법칙에 의하여

$$(A^c \cup B)^c = (A^c)^c \cap B^c$$

$$= A \cap B^c$$

$$= A - B$$

$A - B = \{8, 12, 16\}$ 이므로 집합 $A - B$ 의 모든 원소의 합은 $8 + 12 + 16 = 36$ 이다.

77. **정답** ④

추론 능력(추측) - 집합과 명제

[해설]

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A \cap X = \{3, 4, 5\}$ 이므로 $1 \notin X$, $2 \notin X$, $6 \notin X$ 이고 $3 \in X$, $4 \in X$, $5 \in X$ 이다.

$B = \{4, 6\}$ 이고

$n(B \cup X) = n(B) + n(X) - n(B \cap X)$ 이므로

$$6 = 2 + n(X) - 1$$

$$\therefore n(X) = 5$$

$X = \{3, 4, 5, a, b\}$ ($5 < a < b$)라 하면

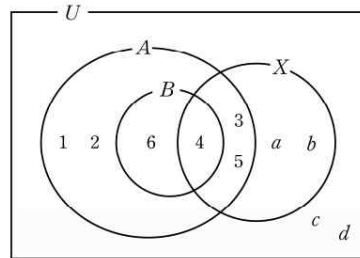
$$a \in \{7, 8, 9, 10\}, b \in \{7, 8, 9, 10\}$$

이므로 $a = 9$, $b = 10$ 일 때, 집합 X 의 모든 원소의 합은 최댓값을 갖는다.

따라서 구하는 합은 $3 + 4 + 5 + 9 + 10 = 31$

[다른 풀이]

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



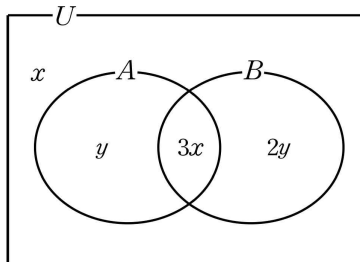
$\{a, b, c, d\} = \{7, 8, 9, 10\}$ 이므로 $\{a, b\} = \{9, 10\}$ 일 때, 부분집합 X 의 모든 원소의 합은 최댓값 $3 + 4 + 5 + 9 + 10 = 31$ 을 갖는다.

78. **정답** 9

수학 외적 문제 해결 능력 - 집합과 명제

[해설]

반 학생 전체의 집합을 U 라 하고 두 편의 연극 A, B를 본 학생을 원소로 하는 집합을 각각 A, B라 하자. 세 집합 U , A, B의 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



$n((A \cup B)^c) = x$, $n(A - B) = y$ 라 하면 문제의 조건에 의하여 $4x + 3y = 24$, $3x + y = 13$ 이므로 $x = 3$ 이다.

따라서 두 편의 연극을 모두 본 학생 수는 9이다.

79. **정답** ④

[출제의도] 집합을 이용하여 문제를 해결한다.

조건 (가)에 의해 집합 A의 모든 원소 a 에 대하여 $2a \notin A$ 이므로 a 와 $2a$ 가 집합 A에 동시에 속할 수 없다.

a , $2a$ 가 모두 속하는 집합들로 집합 U 를 나누어 보면 다음과 같다.

$\{1, 2, 4, 8, 16\}, \{3, 6, 12\}, \{5, 10\}, \{7, 14\}, \{9, 18\}, \{11\}, \{13\}, \{15\}, \{17\}, \{19\}$

각 집합에 속하는 모든 원소들을 크기 순서대로 나열 할 때, 이웃한 두 원소는 동시에 A 에 속할 수 없다.

$\{1, 2, 4, 8, 16\}$ 에서 조건 (가)를 만족시키는 집합 A 의 부분집합은

$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{8\}, \{16\}, \{1, 4\}, \{1, 8\}, \{1, 16\}, \{2, 8\}, \{2, 16\}, \{4, 16\}, \{1, 4, 16\}$

이다.

이 중 집합 A 의 원소의 개수가 최대일 때는

$\{1, 4, 16\} \subset A$ 인 경우이다.

마찬가지 방법으로 $\{3, 6, 12\}$ 에서 $\{3, 12\} \subset A$ 이고 세 집합 $\{5, 10\}, \{7, 14\}, \{9, 18\}$ 에서는 각 집합의 두 원소 중 하나의 원소가 A 에 속한다.

또한 집합 A 의 원소의 개수가 최대가 되기 위해서는 11, 13, 15, 17, 19는 항상 A 에 속해야 한다.

즉, $\{11, 13, 15, 17, 19\} \subset A$ 이다.

이상에서 반드시 포함되어야 하는 원소의 합은

$1+3+4+11+12+13+15+16+17+19=111$ 이다.

조건 (나)에 의해 각 집합 $\{5, 10\}, \{7, 14\}, \{9, 18\}$ 에서 한 개씩 선택한 원소의 합이 최대인 홀수가 되도록 5, 14, 18을 선택한다.

따라서 집합 A 의 모든 원소의 합의 최댓값은

$111+5+14+18=148$ 이다.

80. **정답** 10

[출제의도] 조건으로 제시된 집합을 이용하여 문제를 해결한다. 집합 A 의 모든 원소의 합이 100이므로 집합 A 에 25 이상인 원소가 적어도 2개 포함되어 있어야 한다. 전체집합 U 에서 25 이상인 원소는 25, 26, 28, 29뿐이다.

(i) 집합 A 에 25 이상의 원소가 3개만 속한 경우

26, 28, 29가 속한 경우: $A = \{17, 26, 28, 29\}$

25, 26, 29가 속한 경우: $A = \{20, 25, 26, 29\}$

25, 28, 29 또는 25, 26, 28이 속한 경우:

원소의 합이 100이기 위해서는 나머지 한 원소가 3의 배수가 되어야 한다. 그런데 3의 배수는 전체집합 U 의 원소가 아니므로 조건을 만족시키는 집합 A 가 존재하지 않는다.

(ii) 집합 A 에 25 이상의 원소가 2개만 속한 경우

25보다 작은 전체집합 U 의 원소 중 가장 큰 두 원소의 합은 $22+23=45$ 이다. 그러므로 네 원소의 합이 100이 되기 위해서는 25 이상인 두 원소의 합이 55 이상이어야 한다.

28, 29가 속한 경우: $A = \{20, 23, 28, 29\}$

26, 29가 속한 경우: $A = \{22, 23, 26, 29\}$

따라서 위의 네 집합에 대하여 $x_4 - x_3 + x_2 - x_1$ 의 값은 각각 10, 8, 4, 4이고 이 중 최댓값은 10이다.

[다른 풀이]

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$ 에서 $x_1 + x_3 = 100 - (x_2 + x_4)$

$x_4 - x_3 + x_2 - x_1 = x_4 + x_2 - (x_3 + x_1)$

$= x_4 + x_2 - \{100 - (x_2 + x_4)\} = 2(x_2 + x_4) - 100$

이 값이 최대가 되기 위해서는 $x_2 + x_4$ 의 값이 최대가 되어야 하

므로 $x_4 = 29$ 이다.

그런데 $x_4 > x_3 > x_2$ 에서 x_2 는 28이 될 수 없으므로 $x_3 = 28, x_2 = 26$ 이다.

따라서 최댓값은 $2 \times (29 + 26) - 100 = 10$ 이다.