수능(94~20학년도), 모의고사(03~19년)

단원 : 미분-미분가능

1.미분계수의 정의

1. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않다. 다음 <보기> 중 $x=0$에서 미분가능한 함수를 모두 고르면?

[1.5점][1995학년도 수능 가10]

[보 기]

ㄱ. $y=xf(x)$　　ㄴ. $y=x^2f(x)$

ㄷ. $y=\dfrac{1}{1+xf(x)}$

2-1. 좌미분계수=우미분계수<-->미분가능

1. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^3+ax^2+bx & (x \geqq 1) \\ 2x^2+1 & (x<1) \end{cases}$

가 모든 실수 x에서 미분가능하도록 상수 a, b를 정할 때, ab의 값은? [3점][2004년 9월 가06]

2. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x \leqq 3) \\ -\frac{1}{2}(x-a)^2+b & (x>3) \end{cases}$ 이 모든 실수에서 미분가능할 때, $a+b$의 값을 구하시오. [3점][2010년 7월 가23]

1. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^3+ax+1 & (x \geq 1) \\ 2x^2+a & (x<1) \end{cases}$ 가 모든 실수 x에 대하여 미분가능하도록 하는 상수 a의 값은? [3점][2011년 10월 나05]

3. 미분가능한 함수

$$f(x)=\begin{cases} -x+1 & (x<0) \\ a(x-1)^2+b & (x \geq 0) \end{cases}$$

에 대하여 $f(1)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점][2012년 10월 나11]

4. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^3+ax & (x<1) \\ bx^2+x+1 & (x \geq 1) \end{cases}$ 이 $x=1$에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)[4점][2013학년도 수능 나18]

5. 함수 $f(x)=\begin{cases} -x^2+ax+2 & (x \geq 2) \\ 2x+b & (x<2) \end{cases}$가 $x=2$에서 미분가능할 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오.

[3점][2013년 7월 나24]

6. 함수

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+1 & (x<1) \\ x^4+a & (x \geq 1) \end{cases}$$

이 $x=1$에서 미분가능할 때, 상수 a의 값을 구하시오.

[3점][2016년 9월 나25]

7. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & (x \leq -2) \\ 2x & (x>-2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은? (단, a와 b는 상수이다.) [4점][2017년 6월 나16]

8. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^3-ax+2 & (x \le 2) \\ 5x-2a & (x > 2) \end{cases}$$

가 $x=2$에서 미분가능할 때, 상수 a의 값은?

[3점][2018년 7월 나08]

1. 함수 $f(x)$가 다음과 같다.

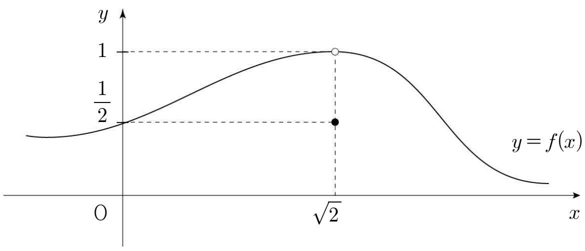
$$f(x)=\begin{cases} -3x+a & (x<-1) \\ x^3+bx^2+cx & (-1 \le x < 1) \\ -3x+d & (x \geqq 1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 미분가능하도록 네 실수 $a,\ b,\ c,\ d$의 값을 정할 때, $a+b+c+d$의 값은?

[3점][2009년 10월 가06]

2. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

[4점][2012년 7월 가11]



<보 기>

ㄱ. $\lim_{x \to \sqrt{2}} [xf(x)] = 1$

ㄴ. 함수 $[xf(x)]$는 $x=\sqrt{2}$에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $(x-\sqrt{2})[xf(x)]$는 $x=\sqrt{2}$에서 미분가능하다.

2-2. 좌미분계수=우미분계수<-->미분가능

(연속인 함수에서 좌미분계수값과 우미분계수값이 같다)

3. <보기>의 함수 중 $x=0$에서 미분가능한 것을 모두 고른 것은? [3점][2004년 10월 가05]

〈 보 기 〉

ㄱ. $f(x)=\begin{cases} x & (x \geqq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$

ㄴ. $g(x)=\begin{cases} (x+1)^2 & (x \geqq 0) \\ 2x+1 & (x < 0) \end{cases}$

ㄷ. $h(x)=\begin{cases} x^2+x+1 & (x \geqq 0) \\ -x^2+x-1 & (x < 0) \end{cases}$

9. 함수 $f(x)=x^3-6x^2+ax+10$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} b-f(x) & (x<3) \\ f(x) & (x \ge 3) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, 함수 $g(x)$의 극솟값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [4점][2020년 4월 나28]

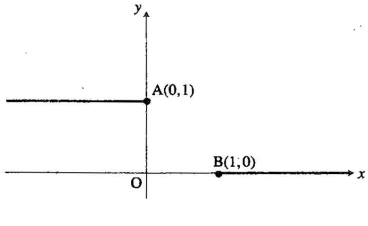
4. 삼차함수 $f(x)=x^3+3x^2-9x$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ m-f(x) & (a \le x < b) \\ n+f(x) & (x \geq b) \end{cases}$$

로 정의한다. 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 미분가능하도록 상수 a, b와 m, n의 값을 정할 때, $m+n$의 값을 구하시오. [4점][2005년 10월 가24]

5. 다음 그림은 함수 $y=1$과 함수 $y=0$의 그래프의 일부이다. 두 점 A(0, 1), B(1, 0) 사이를 $0 \leqq x \leqq 1$에서 정의된 함수 $y=ax^3+bx^2+cx+1$의 그래프를 이용하여 연결하였다. 이렇게 연결된 그래프 전체를 나타내는 함수가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 미분가능하도록 상수 $a,\ b,\ c$의 값을 정할 때, $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하시오.

[4점][1998학년도 수능 가나29]



2-3. 좌미분계수=우미분계수<-->미분가능

(미분가능한 함수를 만들 때 연결지점에서 미분계수 존재)

6. 삼차식 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=\begin{cases} 3 & (x<-1) \\ f(x) & (-1 \leq x \leq 1) \\ -1 & (x>1) \end{cases}$$

로 정의하자. 함수 $g(x)$ 가 모든 실수에서 미분가능할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[4점][2010년 10월 가07]

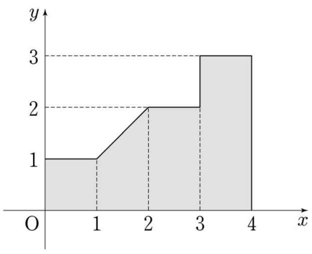
< 보 기 >

ㄱ. $g'(-1)=g'(1)$

ㄴ. 모든 실수 x 에 대하여 $g'(x) \leq 0$

ㄷ. 함수 $g'(x)$ 의 최솟값은 -2 이다.

7. 좌표평면 위에 그림과 같이 어두운 부분을 내부로 하는 도형이 있다. 이 도형과 네 점 $(0, 0)$, $(t, 0)$, (t, t), $(0, t)$ 를 꼭짓점으로 하는 정사각형이 겹치는 부분의 넓이를 $f(t)$ 라 하자.



열린 구간 $(0, 4)$ 에서 함수 $f(t)$ 가 미분가능하지 않은 모든 t 의 값의 합은? [4점][2012년 5월 나21]

8. 함수 $f(x)=-3x^4+4(a-1)x^3+6ax^2$ $(a>0)$과 실수 t에 대하여, $x \leq t$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 a의 최댓값은?

[4점][2010년 9월 가16]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

9. 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-1$ 과 실수 m 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x) \geq mx) \\ mx & (f(x) < mx) \end{cases}$$

라 하자. $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, m 의 값은?

[4점][2012년 6월 가21]

① -14 ② -12 ③ -10 ④ -8 ⑤ -6

2-4. 좌미분계수=우미분계수<-->미분가능

(평행, 대칭이동된 함수에서 미분가능)

10. 함수 $f(x)=x^3-2x$ 에 대하여 함수 $g(x)$는 다음과 같다.

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-1) \\ f(x+p)+q & (x \geq -1) \end{cases}$$

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 0이 아닌 상수이다.)

[4점][2018년 전북5월 나26]

11. 삼차함수 $f(x)=x^3-x^2-9x+1$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq k) \\ f(2k-x) & (x<k) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 모든 실수 k의 값의 합을 $\frac{q}{p}$라 할 때, p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[4점][2015년 3월 가28]

3.절댓값이 포함된 함수의 미분가능성

12. 다음은 함수 $f(x)=|x(x-k)|$의 $x=0$에서 연속성과 미분가능성을 조사하는 과정이다.

(ⅰ) $x=0$에서 $f(x)$의 연속성

$f(0)=0$이고

$$\lim_{h\to 0}\{f(0+h)-f(0)\}=\lim_{h\to 0}|h(h-k)|=\boxed{\text{(가)}}$$

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 k의 값에 관계없이 연속이다.

(ⅱ) $x=0$에서 $f(x)$의 미분가능성

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{|h(h-k)|}{h}=|k|$$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{|h(h-k)|}{h}=\boxed{\text{(나)}}$$

따라서 $f(x)$는 $k=0$인 경우에만 $x=0$에서 $\boxed{\text{(다)}}$

이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

[3점][2007년 5월 가16]

	(가)	(나)	(다)
①	0	$\lvert k \rvert$	미분가능하다.
②	0	$-\lvert k \rvert$	미분가능하지 않다.
③	0	$-\lvert k \rvert$	미분가능하다.
④	$-k$	$\lvert k \rvert$	미분가능하다.
⑤	$-k$	$-\lvert k \rvert$	미분가능하지 않다.

10. 두 함수 $f(x)=|x+3|$, $g(x)=2x+a$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, 상수 a의 값은? [3점][2021년 10월 07]

11. $a>0$인 상수 a에 대하여 함수 $f(x)=\left|(x^2-9)(x+a)\right|$가 오직 한 개의 x 값에서만 미분가능하지 않을 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은? [4점][2020년 3월 나18]

12. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 3 보다 작은 실수 a에 대하여 함수 $g(x)=|(x-a)f(x)|$가 $x=3$에서만 미분가능하지 않다. 함수 $g(x)$의 극댓값이 32일 때, $f(4)$의 값은?

[4점][2021년 10월 10]

13. 두 양수 p, q가 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $p+q$의 값은? [4점][2021년 6월 14]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $xg(x)=|xf(x-p)+qx|$이다.
(나) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.

13. 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\dfrac{f'(5)}{f'(3)}$ 의 값을 구하시오.

[4점][2009년 6월 가24]

(가) 함수 $f(x)$는 $x=2$ 에서 극값을 갖는다.
(나) 함수 $|f(x)-f(1)|$은 오직 $x=a$ $(a>2)$ 에서만 미분가능하지 않다.

14. 최고차항의 계수가 1이고, $f(0)=3$, $f'(3)<0$인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 집합 S를

$S=\{a\,|\,$함수 $|f(x)-t|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않다.$\}$

라 하고, 집합 S의 원소의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=3$과 $t=19$에서만 불연속일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오.

[4점][2011학년도 수능 가24]

4.곱의 꼴 함수의 미분가능성

15. 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}1-x & (x<0)\\ x^2-1 & (0\le x<1)\\ \dfrac{2}{3}(x^3-1) & (x\ge 1)\end{cases}$$

일 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

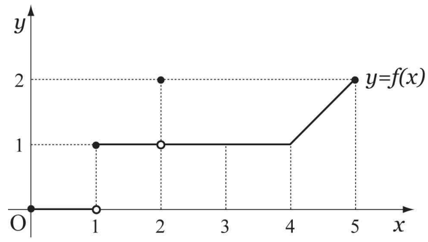
[3점][2007학년도 수능 가07]

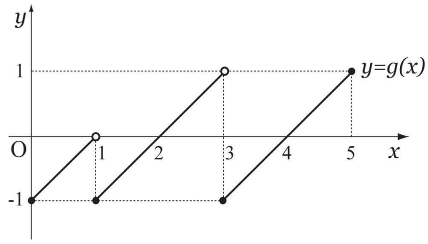
[보 기]

(ㄱ). $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.
(ㄴ). $|f(x)|$는 $x=0$에서 미분가능하다.
(ㄷ). $x^k f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하도록 하는 최소의 자연수 k는 2이다.

16. 그림과 같이 구간 [0, 5]를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점][2009년 7월 가09]





<보 기>

ㄱ. 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$는 $x=2$에서 연속이다.

ㄴ. 함수 $(g \circ f)(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$는 $x=4$에서 미분가능하다.

14. 정수 k와 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x<0) \\ x-1 & (0 \le x < 1) \\ 0 & (1 \le x \le 3) \\ -x+4 & (x>3) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=|f(x-k)|$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점][2022년 4월 공통14]

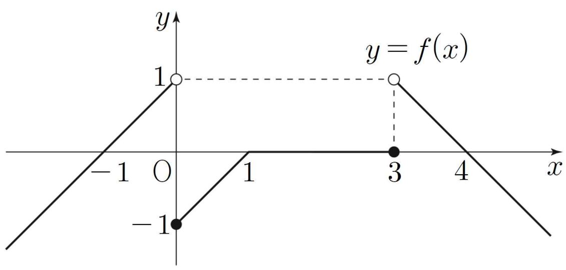
| 보기 |

ㄱ. $k=-3$일 때, $\lim_{x \to 0-} g(x)=g(0)$이다.

ㄴ. 함수 $f(x)+g(x)$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 정수 k가 존재한다.

ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하도록 하는 모든 정수 k의 값의 합은 -5이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



미분-(3)미분가능

1) ⑤

$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$이지만 $f'(0)$이 존재하지 않는다.

Ⅰ. $y' = \lim_{h\to 0}\frac{hf(h)}{h} = \lim_{h\to 0} f(h) = f(0)$

Ⅱ. $y' = \lim_{h\to 0}\frac{h^2 f(h)}{h} = \lim_{h\to 0} hf(h)$

Ⅲ. $y' = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{1+hf(h)}-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-hf(h)}{h(1+hf(h))}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{-f(h)}{1+hf(h)} = -f(0)$

2) ②

함수 $f(x) = \begin{cases} x^3+ax^2+bx\,(x\geq 1) \\ 2x^2+1 \quad (x<1)\end{cases}$이 모든 실수 x에서 미분가능하려면

$x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to 1+} f(x) = f(1)$

즉, $2+1=1+a+b$

$\therefore\ a+b=2\cdots\cdots$㉠

$x=1$에서 미분계수가 존재해야 하므로

$f'(x) = \begin{cases} 3x^2+2ax+b\ (x>1) \\ 4x\ (x<1)\end{cases}$ 에서

$\lim_{x\to 1-} f'(x) = \lim_{x\to 1+} f'(x)$이어야 한다.

즉, $3+2a+b=4$

$\therefore\ 2a+b=1\cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1,\ b=3$

$\therefore\ ab=-3$

3) 36

$f(x)$가 $x=3$에서 연속이므로,

$-\frac{1}{2}(3-a)^2+b=9\ \cdots$ ①

또한 $f'(x) = \begin{cases} 2x & (x\leq 3) \\ -x+a & (x>3)\end{cases}$

$f(x)$는 $x=3$에서 미분가능하므로 $a=9\cdots$ ②

①, ② 에 의하여

$a=9,\ b=27$

$\therefore\ a+b=36$

4) ④

함수 $f(x)$는 연속함수이다.

$f'(x) = \begin{cases} 3x^2+a & (x>1) \\ 4x & (x<1)\end{cases}$

$\lim_{x\to 1+}(3x^2+a) = \lim_{x\to 1-} 4x$ 에서 $3+a=4$이다.

$\therefore\ a=1$

5) ②

함수 $f(x)$가 연속이므로 $f(0)=a+b=1\ \cdots$ ㉠

$f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로

$f'(0) = \lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$

그런데 $\lim_{h\to 0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = -1$,

$\lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 2a(0-1) = -2a$ 이므로

$-1=-2a\ \cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 $b=\frac{1}{2}\ \therefore\ f(1)=b=\frac{1}{2}$ 이다.

6) ③

주어진 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$1+a=b+1+1\ \cdots\cdots$ ㉠

또한 $x=1$에서 미분가능해야 하므로

$3+a=2b+1\ \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 두 식을 연립하면 $a=4,\ b=3$

따라서 $a+b=7$

7) 36

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하면 연속이므로

$-4+2a+2=4+b\ \therefore b=2a-6$

$f'(x) = \begin{cases} -2x+a & (x>2) \\ 2 & (x<2)\end{cases}$ 이고

$f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하므로 $-4+a=2$

따라서 $a=6,\ b=6$

$\therefore ab=36$

8) 2

[출제의도] 구간별로 정의된 함수가 구간의 경계에서 미분가능할 조건을 구할 수 있는가?

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1+} f(x) = f(1)$

즉, $a+1=1+a$

또한, $f(x) = \begin{cases} ax^2+1 & (x<1) \\ x^4+a & (x\geq 1)\end{cases}$ 에서

미분계수 $f'(1)$이 존재해야 하므로

$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1-}\frac{ax^2+1-(a+1)}{x-1}$

$= \lim_{x\to 1-}\frac{a(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1-} a(x+1) = 2a$

$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1+}\frac{x^4+a-(1+a)}{x-1}$

$= \lim_{x\to 1+}\frac{(x^2+1)(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1+}\{(x^2+1)(x+1)\} = 4$

이므로 $2a=4,\ a=2$

9) ⑤

$f(x)$가 실수전체의집합에서 미분가능하므로 $x=-2$에서 미분가능하다.

$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2+} f(x) = f(2)$

$\therefore\ 2a-b=8 \quad \cdots$ ㉠

$\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = -4+a$

$\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 2$

$f(x)$는 $x=2$에서 미분가능이므로

$-4+a=2$

$\therefore\ a=6$

㉠에 의하여

$\therefore\ b=4$

$\therefore\ a+b=10$

10) ⑤

[출제의도] 함수의 미분가능성 이해하기

$\lim_{x\to 2-}(x^3-ax+2)=\lim_{x\to 2+}(5x-2a)=f(2)$

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

$f'(2)$가 존재해야하므로

$\lim_{h\to 0-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to 0-}\frac{(2+h)^3-a(2+h)+2-(10-2a)}{h}=12-a$

$\lim_{h\to 0+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to 0+}\frac{5(2+h)-2a-(10-2a)}{h}=5$

$12-a=5$

따라서 $a=7$

11) ③

함수 $f(x)$가 $x=\pm 1$에서 미분가능해야 하므로

$f(-1)=3+a=-1+b-c,\ f'(-1)=-3$이고

$f(1)=-3+d=1+b+c,\ f'(1)=-3$이다.

$\therefore\ a+b+c+d=2+0-6-2=-6$

12) ③

ㄱ. $\lim_{x\to\sqrt{2}}[xf(x)]=1$ (참)

ㄴ. $g(x)=[xf(x)]$라 하면, $g(\sqrt{2})=0,\ \lim_{x\to\sqrt{2}}g(x)=1$ 이므로

$[xf(x)]$는 $x=\sqrt{2}$에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. $\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{(x-\sqrt{2})[xf(x)]-0}{x-\sqrt{2}}=1$ (참)

13) ②

[출제의도] 미분가능성을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $\lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=1,\ \lim_{h\to 0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=-1$

이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $g(x)$는 $x=0$에서 연속이고,

$\lim_{h\to 0+}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=2$

이므로 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄷ. $h(x)$는 $x=0$에서 불연속이므로 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

14) 6

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

함수 $g(x)$가 $x=3$에서 연속이고 미분가능하다.

함수 $g(x)$가 $x=3$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 3-}g(x)=\lim_{x\to 3+}g(x)=g(3)$

$b-f(3)=f(3)$

$b=6a-34$

함수 $g(x)$가 $x=3$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to 3-}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3+}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}$

$\lim_{x\to 3-}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3-}\frac{b-f(x)-f(3)}{x-3}$

$=\lim_{x\to 3-}\frac{-f(x)+\{b-f(3)\}}{x-3}$

$=\lim_{x\to 3-}\frac{-\{f(x)-f(3)\}}{x-3}$

$=-f'(3)$

$=a-9$

$\lim_{x\to 3+}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$

$=f'(3)=-a+9$

따라서 $a=9,\ b=20$

$$g(x)=\begin{cases}-x^3+6x^2-9x+10 & (x<3)\\ x^3-6x^2+9x+10 & (x\geq 3)\end{cases}$$

$x<3$에서

$g'(x)=-3x^2+12x-9=-3(x-1)(x-3)$

$g'(x)=0$에서 $x=1$

$x\geq 3$에서

$g'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$g'(x)=0$에서 $x=3$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗		↗

$g(1)=-1+6-9+10=6$이므로

함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극솟값 6을 갖는다.

15) 118

함수 $g(x)$는 연속이고 미분가능하므로

$f(a)=m-f(a),\ m-f(b)=n+f(b)$ ……㉠

$$g'(x)=\begin{cases}f'(x) & (x<a)\\ -f'(x) & (a\leqq x<b)\\ f'(x) & (x\geqq b)\end{cases}$$

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

따라서 극댓값은 $f(-3)=27$, 극솟값은 $f(1)=-5$

㉠에서 $m=2f(-3)=54$,

$n=m-2f(1)=54+10=64$ 이므로

$a=-3,\ b=1,\ m=54,\ n=64$

$\therefore\ m+n=118$

16) 13

$(-\infty,\ \infty)$에서 미분가능하려면 $x=0,\ 1$에서 연속이고 미분가능이어야 한다.

함수 $y=ax^3+bx^2+cx+1$는 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 $x=0$에서 연속이다.

$x=1$에서 연속이려면 $0=a+b+c+1$

$\therefore\ a+b+c=-1$

$y'=3ax^2+2bx+c$

i) $x=0$에서 미분가능하려면 $0=c$

ii) $x=1$에서 미분가능하려면 $3a+2b+c=0$

$\therefore\ \begin{cases}a+b=-1\\ 3a+2b=0\end{cases}$

$\therefore\ a=2,\ b=-3$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=13$

따라서 $a^2+b^2=13$

17) ②

$f'(x)=k(x-1)(x+1)$이고 $f(-1)=3,\ f(1)=-1$

$\therefore f(x)=x^3-3x+1,\ f'(x)=3x^2-3$

$g'(x)=\begin{cases}0 & (x<-1,\ x>1)\\ 3x^2-3 & (-1\leqq x\leqq 1)\end{cases}$에서

ㄴ. $g'(x)\leqq 0$ (참)

ㄷ. $g'(x)\geqq -3$이므로 $g'(x)$의 최솟값은 -3 (거짓)

18) ③

$$f(t)=\begin{cases} t^2 & (0<t<1) \\ 1+\int_1^t x\,dx=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2} & (1\leq t<2) \\ \frac{5}{2}+\int_2^t 2\,dx=2t-\frac{3}{2} & (2\leq t<3) \\ \frac{9}{2}+\int_3^t 3\,dx=3t-\frac{9}{2} & (3\leq t<4)\end{cases}$$ 이고,

t 가 자연수가 아닐 때는 미분가능하므로

$$f'(t)=\begin{cases} 2t & (0<t<1) \\ t & (1<t<2) \\ 2 & (2<t<3) \\ 3 & (3<t<4)\end{cases}$$

$\lim_{t\to2+}f'(t)=\lim_{t\to2-}f'(t)=2$ 가 되어 $t=2$ 에서 미분가능하지만

$t=1$ 또는 3 에서는 미분이 불가능하다.

따라서 $1+3=4$ 이다.

19) ①

$f'(x)=-12x^3+12(a-1)x^2+12ax$

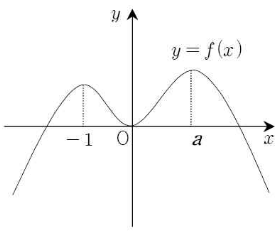
$=-12x\{x^2-(a-1)x-a\}$

$=-12x(x+1)(x-a)$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1,\ 0,\ a$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↘		↗		↘

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$f(-1)=2a+1,\ f(a)=a^4+2a^3$ 이고,

$f(a)-f(-1)=a^4+2a^3-2a-1=(a+1)^3(a-1)$ 이므로

$0<a<1$ 이면 $f(a)<f(-1)$

$a\geq1$ 이면 $f(a)\geq f(-1)$ 이다.

(ⅰ) $0<a<1$ 인 경우

$t<-1$ 이면

$g(t)=f(t)=-3t^4+4(a-1)t^3+6at^2$

$t\geq-1$ 이면

$g(t)=f(-1)=2a+1$

따라서,

$$g'(t)=\begin{cases}-12t^3+12(a-1)t^2+12at & (t<-1) \\ 0 & (t>-1)\end{cases}$$

이고, $\lim_{t\to-1-}g'(t)=\lim_{t\to-1+}g'(t)=0$

이므로 $g(t)$ 는 $t=-1$ 에서 미분가능하다.

그러므로 $0<a<1$ 일 때 함수 $g(t)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(ⅱ) $a\geq1$ 인 경우

$f(-1)=f(\alpha)\ (0<\alpha\leq a)$ 이라 하자.

$t<-1$ 이면

$g(t)=f(t)=-3t^4+4(a-1)t^3+6at^2$

$-1\leq t<\alpha$ 이면

$g(t)=f(-1)=2a+1$

$\alpha\leq t<a$ 이면

$g(t)=f(t)=-3t^4+4(a-1)t^3+6at^2$

$t\geq a$ 이면

$g(t)=f(a)=a^4+2a^3$

따라서,

$$g'(t)=\begin{cases}-12t^3+12(a-1)t^2+12at & (t<-1) \\ 0 & (-1<t<\alpha) \\ -12t^3+12(a-1)t^2+12at & (\alpha<t<a) \\ 0 & (t>a)\end{cases}$$

$\lim_{t\to-1-}g'(t)=\lim_{t\to-1+}g'(t)=0$ 이므로 $g(t)$ 는 $t=-1$ 에서 미분가능하다.

$\lim_{t\to a-}g'(t)=\lim_{t\to a+}g'(t)$ 이어야 하므로

$-12a^3+12(a-1)a^2+12a^3=0$ 에서

$12(a-1)a^2=0\quad\therefore\ a=1$

$a=1$ 이면 $f(x)=-3x^4+6x^2$ 이므로

$f(-1)=f(1)\quad\therefore\ \alpha=a=1$

$$\therefore\ g'(t)=\begin{cases}-12t^3+12t & (t<-1) \\ 0 & (-1<t<1) \\ -12t^3+12t & (t>1)\end{cases}$$

$g'(-1)=0,\ g'(1)=0$ 이므로

$a=1$ 일 때, $g(t)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(ⅰ),(ⅱ)에서 함수 $g(t)$ 가 수 전체의 집합에서 미분가능하기 위한 a 의 값의 범위는 $0<a\leq1$ 이므로

구하는 a 의 최댓값은 1 이다.

20) ②

$f(x)=mx$ 인 $x=\alpha$ 라 하면 $x=\alpha$ 에서 미분가능하므로

$\alpha^3-3\alpha^2-9\alpha-1=m\alpha$ ⋯⋯ ㉠

$3\alpha^2-6\alpha-9=m$ ⋯⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $(\alpha-1)^2(2\alpha+1)=0$

$\therefore\ \alpha=1$ 또는 $\alpha=-\frac{1}{2}$

그래프를 그려보면, $\alpha=1$ 일 때 $m=-12$ 이고

$g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하지만

$\alpha=-\frac{1}{2}$ 일 때 $m=-\frac{21}{4}$ 이고

$g(x)$ 는 $x>0$ 에서 미분불가능한 뾰족한 점이 발생한다.

따라서 $m=-12$

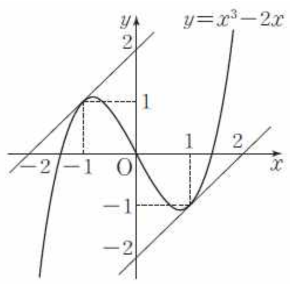
21) 4

[출제의도] 발견적 추론능력(추측)-다항함수의 미분법

$f'(x)=3x^2-2$ 에서 $f'(-1)=1$

$f'(x)=1$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 함수 $f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 곡선 $y=f(x)$ 위에 있는 점 $(1,\ -1)$ 이 점 $(-1,\ 1)$ 의 위치에 오도록 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 2만큼 $y=f(x)\ (x\geq1)$ 의 그래프가 평행이동하면 된다.

즉, $x\geq-1$ 일 때 $g(x)=f(x+2)+2$ 이다.

따라서 $p=2$, $q=2$ 이므로 $p+q=4$

22) 13

[출제의도] 함수의 대칭성을 이용하여 미분가능성 문제를 해결한다.

다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 직선 $x=k$에 대하여 대칭인 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서는 $x=k$에서 미분가능하면 된다.

$$\lim_{x\to k-}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}=\lim_{x\to k-}\frac{f(2k-x)-f(k)}{x-k}$$

$$=\lim_{x\to k-}\left[\frac{\{(2k-x)^3-(2k-x)^2-9(2k-x)+1\}}{x-k}-\frac{(k^3-k^2-9k+1)}{x-k}\right]$$

$$=\lim_{x\to k-}\left[(k-x)\times\frac{\{(2k-x)^2+k(2k-x)+k^2-(3k-x)-9\}}{x-k}\right]$$

$$=-3k^2+2k+9$$

또, $\displaystyle\lim_{x\to k+}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}=\lim_{x\to k+}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}$

$$=\lim_{x\to k+}\frac{(x^3-x^2-9x+1)-(k^3-k^2-9k+1)}{x-k}$$

$$=\lim_{x\to k+}\frac{(x-k)\{x^2+kx+k^2-(x+k)-9\}}{x-k}$$

$$=3k^2-2k-9$$

$\displaystyle\lim_{x\to k-}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}=\lim_{x\to k+}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}$ 이므로

$-3k^2+2k+9=3k^2-2k-9$

$3k^2-2k-9=0$

그러므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 실수 k의 값의 합은 $\dfrac{2}{3}$이다.

따라서 $p=3$, $q=2$이므로 $p^2+q^2=13$이다.

[참고]

함수 $y=f(2k-x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $x=k$에 대하여 대칭이다. 따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $x=k$에 대하여 대칭이고, 함수 $y=g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서는 $f'(k)=0$이어야 한다.

23) ③

[출제의도] 함수의 연속성과 미분가능성 조사하기

(가) $\boxed{0}$

(나) $\boxed{-|k|}$

(다) $\boxed{\text{미분가능하다.}}$

24) ③

[출제의도] 미분가능성을 이해하여 함숫값을 구한다.

$$f(x)g(x)=\begin{cases}-(x+3)(2x+a) & (x<-3)\\ (x+3)(2x+a) & (x\ge -3)\end{cases}$$

함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=-3$에서 미분가능하다. 즉,

$$\lim_{x\to -3-}\frac{f(x)g(x)-f(-3)g(-3)}{x+3}$$

$$=\lim_{x\to -3+}\frac{f(x)g(x)-f(-3)g(-3)}{x+3},$$

$$\lim_{x\to -3-}(-2x-a)=\lim_{x\to -3+}(2x+a)$$

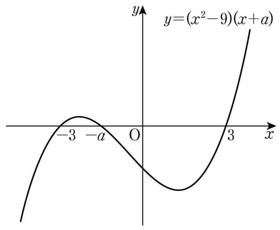
따라서 $6-a=-6+a$에서 $a=6$

25) ①

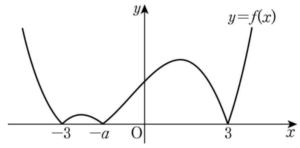
[출제의도] 조건을 만족시키는 함수의 그래프를 추론하여 극댓값을 구한다.

(i) $0<a<3$일 때

함수 $y=(x^2-9)(x+a)$의 그래프는 x축과 세 점 $(-3,0)$, $(-a,0)$, $(3,0)$에서 만나므로 그래프의 개형은 그림과 같다.



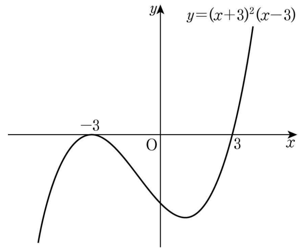
그러므로 함수 $f(x)=|(x^2-9)(x+a)|$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



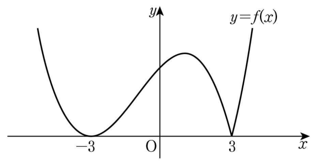
함수 $f(x)$는 $x=-3$, $x=-a$, $x=3$에서 미분가능하지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=3$일 때

함수 $y=(x^2-9)(x+a)=(x+3)^2(x-3)$의 그래프는 x축과 점 $(-3,0)$에서 접하고 점 $(3,0)$에서 만나므로 그래프의 개형은 그림과 같다.



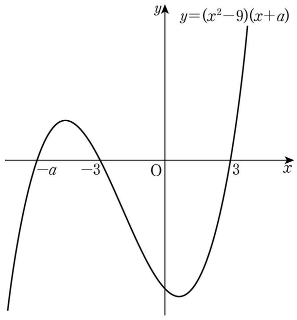
그러므로 $f(x)=|(x+3)^2(x-3)|$의 그래프 개형은 그림과 같다.



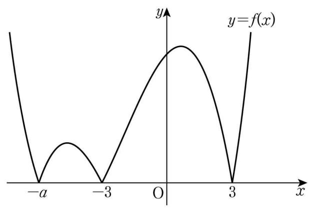
$f(x)$는 $x=3$에서만 미분가능하지 않으므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(iii) $a>3$일 때

함수 $y=(x^2-9)(x+a)$의 그래프는 x축과 세 점 $(-a,0)$, $(-3,0)$, $(3,0)$에서 만나므로 그래프의 개형은 그림과 같다.



그러므로 함수 $f(x)=|(x^2-9)(x+a)|$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=-a$, $x=-3$, $x=3$에서 미분가능하지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 $a=3$

함수 $y=(x^2-9)(x+3)$의 극솟값의 절댓값이

함수 $f(x)=|(x^2-9)(x+3)|$의 극댓값이다.

$y=(x^2-9)(x+3)$의 도함수는

$y'=2x(x+3)+(x^2-9)=3(x+3)(x-1)$이므로

$y'=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

$y=(x^2-9)(x+3)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	0	↘	-32	↗

그러므로 함수 $y=(x^2-9)(x+3)$은 $x=1$에서 극소이고 극솟값은 -32

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고 극댓값은

$f(1)=|-32|=32$

[보충 설명]

$a=3$일 때 함수 $f(x)$가 $x=3$에서만 미분가능하지 않음을 보이자.

$$f(x)=|(x^2-9)(x+3)|$$
$$=|(x+3)^2(x-3)|$$
$$=\begin{cases}(x+3)^2(x-3) & (x\ge 3)\\ -(x+3)^2(x-3) & (x<3)\end{cases}$$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, 3)$과 구간 $(3, \infty)$에서 각각 다항함수이므로

함수 $f(x)$는 $x\ne 3$인 모든 실수 x에서 미분가능하다.

그런데

$$\lim_{x\to 3-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3-}\frac{-(x+3)^2(x-3)}{x-3}=-36$$

$$\lim_{x\to 3+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3+}\frac{(x+3)^2(x-3)}{x-3}=36$$

이므로 극한값 $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$이 존재하지 않는다.

그러므로 $f(x)$는 $x=3$에서 미분가능하지 않다.

따라서 $f(x)$는 오직 한 개의 x 값에서만 미분가능하지 않다.

26) ①

[출제의도] 함수의 그래프를 이해하여 함숫값을 구한다.

함수 $g(x)$는 $x=a$에서 미분가능하고 $g(a)=0$이므로

$$\lim_{x\to a-}\frac{g(x)}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{g(x)}{x-a},$$

$$\lim_{x\to a-}\frac{|(x-a)f(x)|}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{|(x-a)f(x)|}{x-a},$$

$$\lim_{x\to a-}\frac{-(x-a)|f(x)|}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{(x-a)|f(x)|}{x-a}$$

그러므로 $-|f(a)|=|f(a)|$에서 $f(a)=0$

$f(x)=(x-a)(x-k)$ (k는 상수)라 하면

함수 $g(x)=|(x-a)^2(x-k)|$가 $x=3$에서만

미분가능하지 않으므로 $k=3$이다.

그러므로

$g(x)=|(x-a)^2(x-3)|$, $h(x)=(x-a)^2(x-3)$

이라 하면

$a<3$이고 함수 $g(x)$의 극댓값이 32이므로

함수 $h(x)$의 극솟값은 -32이다.

$h'(x)=2(x-a)(x-3)+(x-a)^2=(x-a)(3x-6-a)=0$

함수 $h(x)$는 $x=\frac{6+a}{3}$에서 극솟값 -32를 갖는다.

$$h\left(\frac{6+a}{3}\right)=\left(\frac{6+a}{3}-a\right)^2\left(\frac{6+a}{3}-3\right)$$

$$=-4\left(1-\frac{a}{3}\right)^3=-32$$

$\left(1-\frac{a}{3}\right)^3=8$이므로 $1-\frac{a}{3}=2$ 에서 $a=-3$

따라서 $f(x)=(x+3)(x-3)$에서 $f(4)=7$

27) ③

[출제의도] 절댓값을 포함한 함수의 미분가능성을 판단할 수 있는가?

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $f(-1)=-7$을 갖고, $x=3$에서 극솟값 $f(3)=-39$를 갖는다.

조건 (가)에서

$xg(x)=|xf(x-p)+qx|$ 이므로

$$g(x)=\begin{cases}|f(x-p)+q| & (x>0)\\ -|f(x-p)+q| & (x<0)\end{cases}$$

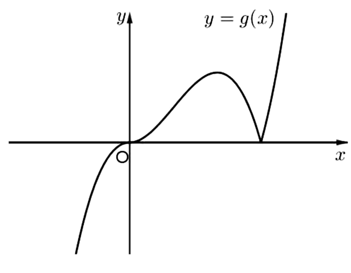
함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$|f(-p)+q|=-|f(-p)+q|$

즉, $|f(-p)+q|=0$이어야 한다.

한편, 함수 $y=|f(x-p)+q|$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동시킨 후, $y<0$인 부분에 그려진 부분을 x축에 대하여 대칭이동시킨 것이다. 이때, p, q가 모두 양수이고 조건 (나)에서 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수가 1이므로 $p=1$, $q=7$이어야 한다. 따라서

$p+q=1+7=8$



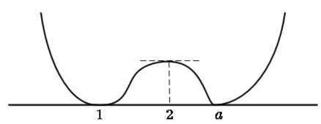
28) 12

$g(x)=f(x)-f(1)$ 이라 하면

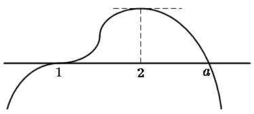
$g(1)=g'(1)=0$, $g'(2)=0$

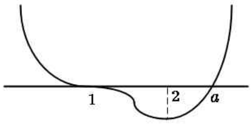
$y=|g(x)|$ 는 $x=1$ 에서 극값을 갖는다.

따라서 (나)의 조건에 맞도록 $y=|g(x)|$ 의 그래프를 그려보면 아래그림과 같다.



$y=g(x)$ 의 그래프는 다음 두 가지 경우에 해당한다.



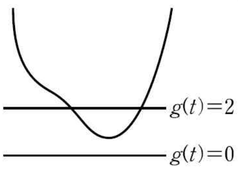


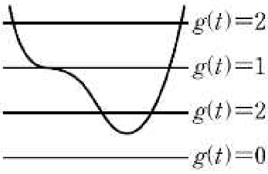
$\therefore\ g'(x)=a(x-1)^2(x-2)=f'(x)\ (a\neq 0)$

$\dfrac{f'(5)}{f'(3)}=\dfrac{48a}{4a}=12$

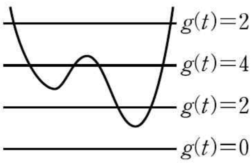
29) 147

만약 $y=f(x)$의 그래프가 극점을 하나만 가진다면, $g(t)$가 불연속인 점은 하나이거나 셋이다.





따라서 $y=f(x)$의 그래프는 두 개의 극솟점과 하나의 극댓점을 가진다.
또한 $y=f(x)$의 그래프가 두 개의 극솟값을 가지면, $g(t)$가 불연속인 점은 3개다.



따라서 $y=f(x)$의 그래프의 두 개의 극솟점의 극솟값은 같다.

$f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2+k$이고, 극솟값이 3이어야 하므로 $k=3$

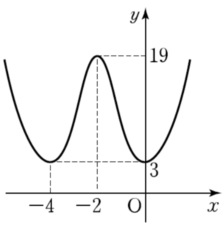
$f(x)=3$의 한 근이 0 이므로 $f(x)=x^2(x-\alpha)^2+3$

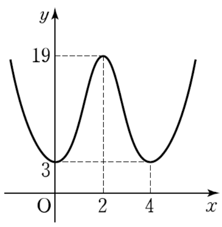
$f'(x)=2x(x-\alpha)^2+2x^2(x-\alpha)=2x(x-\alpha)(2x-\alpha)=0$에서

(극댓값)$=f\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{\alpha^4}{16}+3=19$

$\therefore \alpha=\pm 4$

그런데, $\alpha=-4$이면 $f'(3)>0$이므로 $\alpha=4$





$f(x)=x^2(x-4)^2+3,\ f(-2)=4\times 36+3=147$

30) ③

$$f(x)=\begin{cases}1-x & (x<0)\\ x^2-1 & (0\le x<1)\\ \dfrac{2}{3}(x^3-1) & (x\ge 1)\end{cases}$$

ㄱ. $\displaystyle\lim_{h\to 0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{(1+h)^2-0}{h}=2$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{\frac{2}{3}((1+h)^3-1)-0}{h}=2$$

$\therefore\ f'(1)$은 존재하고 미분가능하다. (참)

ㄴ. $\displaystyle\lim_{h\to 0-}\frac{|f(h)|-|f(0)|}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{|1-h|-1}{h}=-1$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{|f(h)|-|f(0)|}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{|h^2-1|-|(-1)|}{h}=0$$

$\therefore\ |f(x)|$는 $x=0$에서 미분 불가능하다. (거짓)

ㄷ. $\displaystyle\lim_{h\to 0-}\frac{h^k f(h)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{h^k(1-h)}{h}=\lim_{h\to 0-}h^{k-1}(1-h)$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{h^k f(h)}{h}=\lim_{h\to 0+}h^{k-1}(h^2-1)$$

$$\lim_{h\to 0-}h^{k-1}(1-h)=\lim_{h\to 0+}h^{k-1}(h^2-1)=0$$

에서 $k\ge 2$이므로 ㄷ은 참이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

31) ⑤

ㄱ. $\dfrac{g(2)}{f(2)}=0$, $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{g(x)}{f(x)}=0$ (참)

ㄴ. $g(f(1))=-1$, $\displaystyle\lim_{x\to 1}g(f(x))=-1$(참)

ㄷ. $f(x)=\begin{cases}1 & (3\le x<4)\\ x-3 & (4\le x\le 5)\end{cases}$,

$g(x)=x-4\ (3\le x\le 5)$

$f(x)g(x)=\begin{cases}x-4 & (3\le x<4)\\ (x-3)(x-4) & (4\le x\le 5)\end{cases}$

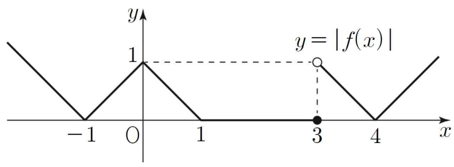
$$\lim_{x\to 4-}\frac{f(x)g(x)-f(4)g(4)}{x-4}=1$$

$$\lim_{x\to 4+}\frac{f(x)g(x)-f(4)g(4)}{x-4}=1 \text{ (참)}$$

32) ④

[출제의도] 도함수를 이용하여 추론하기

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=|f(x)|$의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이므로 함수 $g(x)$는 $x=k+3$에서만 불연속이다.

ㄱ. $k=-3$일 때

$\displaystyle\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0-}|f(x+3)|=0$,

$g(0)=|f(0+3)|=0$에서 $\displaystyle\lim_{x\to 0-}g(x)=g(0)$

ㄴ. $\displaystyle\lim_{x\to 0-}f(x)=1$, $f(0)=-1$에서 $\displaystyle\lim_{x\to 0-}f(x)\neq f(0)$

$k\neq -3$일 때 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$\displaystyle\lim_{x\to 0-}\{f(x)+g(x)\}\neq f(0)+g(0)$

$k=-3$일 때 $\displaystyle\lim_{x\to 0-}g(x)=g(0)$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to 0-}\{f(x)+g(x)\}\neq f(0)+g(0)$

그러므로 모든 정수 k에 대하여

함수 $f(x)+g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하기 위해서는 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이어야 한다.

$\displaystyle\lim_{x\to 0-}f(x)g(x)=\lim_{x\to 0-}g(x)$,

$\displaystyle\lim_{x\to 0+}f(x)g(x)=-\lim_{x\to 0+}g(x)$,

$f(0)g(0)=-g(0)$

에서 $\lim_{x\to0-}g(x)=-\lim_{x\to0+}g(x)=-g(0)$

모든 정수 k에 대하여 $\lim_{x\to0-}g(x)=g(0)$이므로

$\lim_{x\to0}g(x)=g(0)=0$

그러므로 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 정수 k의 값은 -4, -2, -1, 1

(i) $k=-4$ 또는 $k=1$일 때,

$$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{(x+1)(-x)}{x}=-1$$

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{(x-1)x}{x}=-1$$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

(ii) $k=-2$일 때,

$$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=0$$

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=0$$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

(iii) $k=-1$일 때,

$$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{(x+1)(-x)}{x}=-1$$

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=0$$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 모든 정수 k의 값의 합은

$-4+(-2)+1=-5$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ