9강.무리함수
위치,꼭짓점,역함수

9회 성취 개수:

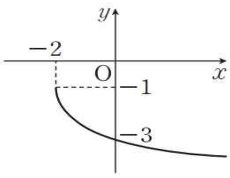
학번 이름

1.교과서 : P233,P234,P235(분석하기), 역함수와 그 성질, P240 #14,P243 #15

2.쌤

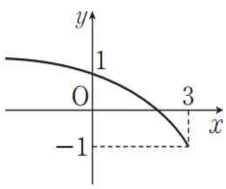
327 난이도 ●●○ [천재]

무리함수 $y=-\sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하시오.



336 난이도 ●●○

함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 상수 a, b, c에 대하여 $6(a+b+c)$의 값을 구하시오.



349 난이도 ●●●

다음 |보기|에서 함수 $y=-\sqrt{a(x-1)}+1$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것만을 있는 대로 고르시오.

|보기|

ㄱ. $a=-1$이면 그래프는 제2사분면을 지난다.
ㄴ. $a>0$이면 치역은 $\{y\,|\,y\le 1\}$이다.
ㄷ. $a<0$이면 치역은 $\{y\,|\,y\le 1\}$이다.
ㄹ. $y=\sqrt{x}+1$의 그래프와 만날 수 있다.

338 난이도 ●●●

모든 실수 x에 대하여 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\sqrt{x}\ (0\le x<1),\ f(x+1)=f(x)$$

를 만족시킨다. 좌표평면 위에서 각 자연수 n에 대하여 직선 $y=\dfrac{x}{n}$와 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 개수를 $g(n)$이라 할 때, $g(1)+g(3)+g(5)$의 값을 구하시오.

350 난이도 ●●●

상수 k의 값에 따라 두 함수 $y=\sqrt{x+1}$, $y=x+k$의 그래프의 교점의 개수를 조사하시오.

3.모의고사

▶2019년 03월 서울교육청 15번 [4점]

1. 함수 $y=5-2\sqrt{1-x}$ 의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 제1사분면에서 만나도록 하는 모든 정수 k의 값의 합은?

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

▶2018년 03월 서울교육청[4점]

1. 좌표평면 위의 두 곡선

$$y=-\sqrt{kx+2k}+4,\ y=\sqrt{-kx+2k}-4$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, k는 0이 아닌 실수이다.)

< 보 기 >

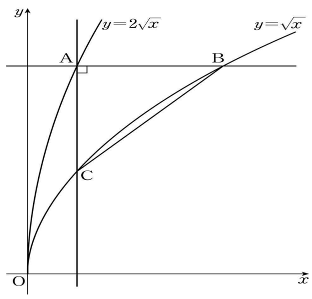
ㄱ. 두 곡선은 서로 원점에 대하여 대칭이다.
ㄴ. $k<0$이면 두 곡선은 한 점에서 만난다.
ㄷ. 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 k의 최댓값은 16이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

▶2018년 03월 서울교육청(고2)[4점]

1. 함수 $y=2\sqrt{x}$ 의 그래프 위의 점 A를 지나고 x축, y축에 각각 평행한 직선이 함수 $y=\sqrt{x}$ 의 그래프와 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 삼각형 ACB가 직각이등변삼각형일 때, 삼각형 ACB의 넓이는? (단, 점 A는 제1사분면에 있다.)

① $\frac{1}{18}$ ② $\frac{1}{15}$ ③ $\frac{1}{12}$ ④ $\frac{1}{9}$ ⑤ $\frac{1}{6}$



▶2020년 03월 서울교육청 30번 [4점]

1. 함수 $f(x)=\sqrt{ax-3}+2\left(a\ge\frac{3}{2}\right)$에 대하여 집합 $\{x|x\ge 2\}$에서 정의된 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)<f^{-1}(x)\text{인 경우}) \\ f^{-1}(x) & (f(x)\ge f^{-1}(x)\text{인 경우}) \end{cases}$$

가 있다. 자연수 n에 대하여 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=x-n$이 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(n)$이라 하자.

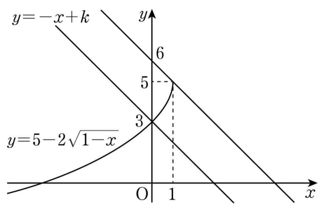
$$h(1)=h(3)<h(2)$$

일 때, $g(4)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

1. [정답] ③

[출제의도] 무리함수의 그래프와 직선의 교점에 관한 문제를 해결한다.

함수 $y=5-2\sqrt{1-x}$ 의 그래프는 그림과 같다.



직선 $y=-x+k$가 점 $(1,\ 5)$를 지날 때의 k의 값은

$5=-1+k$에서 $k=6$

함수 $y=5-2\sqrt{1-x}$ 의 그래프와 y축과의 교점의 y좌표를 구하면

$y=5-2=3$

직선 $y=-x+k$가 점 $(0,\ 3)$을 지날 때의 k의 값은

$3=0+k$에서 $k=3$

따라서 함수 $y=5-2\sqrt{1-x}$ 의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 제1사분면에서 만나도록 하는 k의 값의 범위는 $3<k\le 6$

따라서 모든 정수 k의 값의 합은 $4+5+6=15$이다.

2. [정답] ④

[출제의도] 무리함수의 그래프의 성질을 이용하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판단한다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$f(x)=-\sqrt{kx+2k}+4$, $g(x)=\sqrt{-kx+2k}-4$

라 하자.

ㄱ. $f(-x)=-\sqrt{-kx+2k}+4$

$=-\left(\sqrt{-kx+2k}-4\right)$

$=-g(x)$

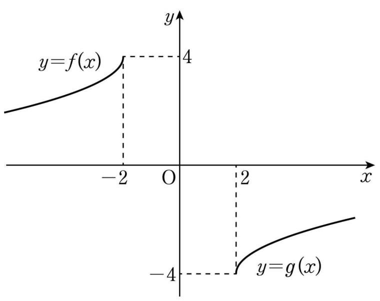
이므로 $g(x)=-f(-x)$

따라서 두 곡선

$y=-\sqrt{kx+2k}+4$, $y=\sqrt{-kx+2k}-4$

는 원점에 대하여 대칭이다. (참)

ㄴ. $k<0$이면 두 곡선은 다음과 같다.



따라서 두 곡선은 만나지 않는다. (거짓)

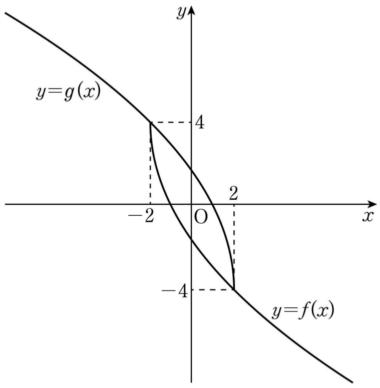
ㄷ. (i) $k<0$일 때

ㄴ에 의하여 두 곡선은 만나지 않는다.

(ii) $k>0$일 때

ㄱ에서 두 곡선은 원점에 대하여 대칭이고 k의 값이 커질수록 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=4$와 멀어지고 곡선 $y=g(x)$는 직선 $y=-4$와 멀어진다.

따라서 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 k의 최댓값은 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$가 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ -4)$를 지날 때이다.



$$-4=-\sqrt{2k+2k}+4$$

$\sqrt{4k}=8$, $4k=64$

따라서 $k=16$ (참)

3. [정답] ①

[출제의도] 무리함수의 그래프와 도형의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

점 A의 좌표를 $(a,\ 2\sqrt{a})(a>0)$라 하면

$\mathrm{B}(4a,\ 2\sqrt{a})$, $\mathrm{C}(a,\ \sqrt{a})$가 된다.

직각이등변삼각형 ACB에서 빗변이 아닌 두 변

AB와 AC의 길이가 각각 $3a$, $\sqrt{a}$이고

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$이므로

$3a=\sqrt{a}$

$9a^2=a$

$a\ne 0$이므로 $9a=1$

$a=\dfrac{1}{9}$

따라서 삼각형 ACB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times(3a)^2=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$

$=\dfrac{1}{18}$

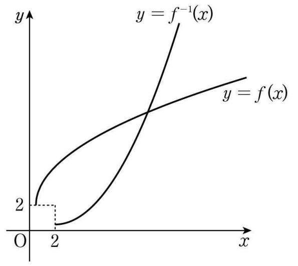
4. [정답] 13

[출제의도] 무리함수의 역함수의 그래프를 이용하여 교점의 개수를 구하는 문제를 해결한다.

$f(x)=\sqrt{ax-3}+2\left(x\ge\dfrac{3}{a}\right)$에서

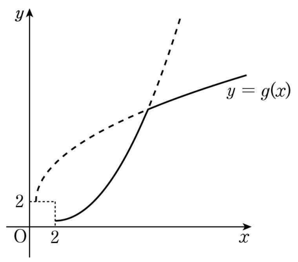
$f^{-1}(x)=\dfrac{1}{a}(x-2)^2+\dfrac{3}{a}\ (x\ge 2)$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 개형은 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

함수 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)<f^{-1}(x)\text{인 경우}) \\ f^{-1}(x) & (f(x)\geq f^{-1}(x)\text{인 경우}) \end{cases}$ 는 $x\geq 2$ 인 실수 x 에 대하여 $f(x)$ 와 $f^{-1}(x)$ 중 크지 않은 값이므로 함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 [그림 2]와 같다.



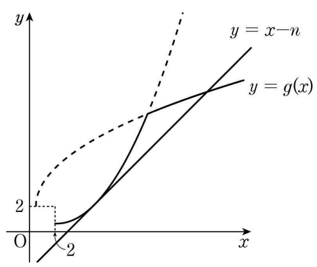
[그림 2]

$f(x)<f^{-1}(x)$ 인 경우, 자연수 n 에 대하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x-n$ 이 만나는 서로 다른 점의 개수는 항상 1 이다.
따라서 $f(x)\geq f^{-1}(x)$ 일 때 함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x-n$ 이 만나는 서로 다른 점의 개수와 이에 따른 $h(n)$ 은 다음과 같다.

(i) 교점의 개수가 1 인 경우

[그림 3]과 같이 직선 $y=x-n$ 이

함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프에 접하는 경우



[그림 3]

$\frac{1}{a}(x-2)^2+\frac{3}{a}=x-n$ 에서

$(x-2)^2+3=ax-an$

$x^2-(a+4)x+an+7=0$

x 에 대한 이차방정식 $x^2-(a+4)x+an+7=0$ 의 판별식을 D라 하면

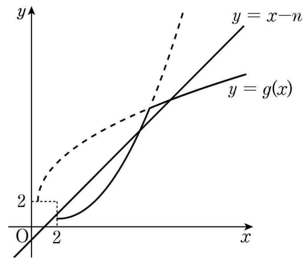
$D=\{-(a+4)\}^2-4(an+7)=0$

$a^2+8a-12-4an=0$

이므로

$n=2-\frac{3}{a}+\frac{a}{4}$

[그림 4]와 같이 함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프 위의 점 $\left(2,\ \frac{3}{a}\right)$ 이 직선 $y=x-n$ 의 아랫부분에 있는 경우



[그림 4]

x 좌표가 2 일 때 직선 $y=x-n$ 의 y 좌표인 $2-n$ 이 $f^{-1}(2)=\frac{3}{a}$ 보다 크므로

$\frac{3}{a}<2-n$

$n<2-\frac{3}{a}$

따라서 함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x-n$ 이 만나는 서로 다른 점의 개수가 1 인 자연수 n 의 값의 범위는

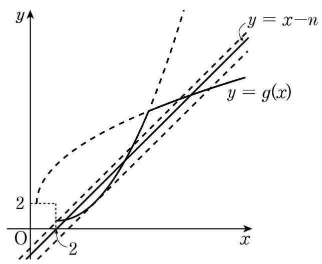
$n=2-\frac{3}{a}+\frac{a}{4}$ 또는 $n<2-\frac{3}{a}$

이고 이때 $h(n)=2$ 이다.

(ii) 교점의 개수가 2 인 경우

[그림 5]와 같이 직선 $y=x-n$ 이

함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프에 접하고 기울기가 1 인 직선의 윗부분에 있고, 직선 $y=x-n$ 이 함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프 위의 점 $\left(2,\ \frac{3}{a}\right)$ 을 지나거나 점 $\left(2,\ \frac{3}{a}\right)$ 이 직선 $y=x-n$ 의 윗부분에 있는 경우이다.



[그림 5]

함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프에 접하고 기울기가 1 인 직선 $y=x-2+\frac{3}{a}-\frac{a}{4}$ 의 y 절편인

$-2+\frac{3}{a}-\frac{a}{4}$ 가 직선 $y=x-n$ 의 y 절편인 $-n$ 보다 작으므로

$-n>-2+\frac{3}{a}-\frac{a}{4}$

$n<2-\frac{3}{a}+\frac{a}{4}$

직선 $y=x-n$ 이 함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프 위의 점 $\left(2,\ \frac{3}{a}\right)$ 을 지나면

$\frac{3}{a}=2-n \qquad n=2-\frac{3}{a}$

점 $\left(2,\ \frac{3}{a}\right)$ 이 직선 $y=x-n$ 의 윗부분에 있는 경우는 x 좌표가 2 일 때 직선 $y=x-n$ 의 y 좌표인 $2-n$ 이 $f^{-1}(2)=\frac{3}{a}$ 보다 작으므

로 $\dfrac{3}{a} > 2-n \qquad n > 2-\dfrac{3}{a}$

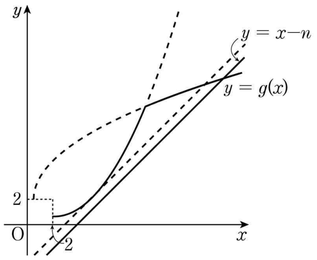
따라서 함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x-n$ 이 만나는 서로 다른 점의 개수가 2 인 자연수 n 의 값의 범위는

$$2-\frac{3}{a} \le n < 2-\frac{3}{a}+\frac{a}{4}$$

이고 이때 $h(n)=3$ 이다.

(iii) 교점이 없는 경우

[그림 6]과 같이 직선 $y=x-n$ 이 함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프에 접하고 기울기가 1 인 직선의 아랫부분에 있는 경우이다.



[그림 6]

함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프에 접하고 기울기가 1 인 직선 $y=x-2+\dfrac{3}{a}-\dfrac{a}{4}$ 의 y 절편인

$-2+\dfrac{3}{a}-\dfrac{a}{4}$ 가 직선 $y=x-n$ 의 y 절편인 $-n$ 보다 크므로

$$-n < -2+\frac{3}{a}-\frac{a}{4} \qquad n > 2-\frac{3}{a}+\frac{a}{4}$$

따라서 함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x-n$ 이 만나는 점이 없는 자연수 n 의 값의 범위는

$n > 2-\dfrac{3}{a}+\dfrac{a}{4}$ 이고 이때 $h(n)=1$ 이다.

(i), (ii), (iii)에서

$$h(n)=\begin{cases} 2 & \left(0<n<2-\dfrac{3}{a}\right) \\ 3 & \left(2-\dfrac{3}{a} \le n < 2-\dfrac{3}{a}+\dfrac{a}{4}\right) \\ 2 & \left(n=2-\dfrac{3}{a}+\dfrac{a}{4}\right) \\ 1 & \left(n>2-\dfrac{3}{a}+\dfrac{a}{4}\right) \end{cases}$$

$h(1)=h(3)<h(2)$ 를 만족시키려면

$h(1)=2,\ h(3)=2,\ h(2)=3$ 이어야 한다.

즉

$0<1<2-\dfrac{3}{a}$ …… ㉠

$2-\dfrac{3}{a} \le 2 < 2-\dfrac{3}{a}+\dfrac{a}{4}$ …… ㉡

$3=2-\dfrac{3}{a}+\dfrac{a}{4}$ …… ㉢

㉢에서

$$\frac{a}{4}-\frac{3}{a}-1=0$$

$a^2-4a-12=0$

$(a+2)(a-6)=0$

$a=-2$ 또는 $a=6$

이때 $a \ge \dfrac{3}{2}$ 이므로

$a=6$

$a=6$ 을 ㉠에 대입하면

$$0<1<2-\frac{3}{6}=\frac{3}{2}$$

이므로 ㉠을 만족시키고,

$a=6$ 을 ㉡에 대입하면

$$2-\frac{3}{6} \le 2 < 2-\frac{3}{6}+\frac{6}{4}$$

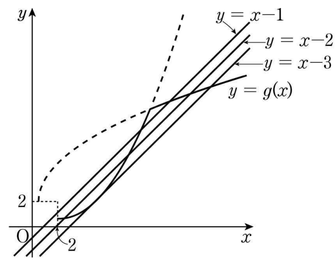
$$\frac{3}{2} \le 2 < 3$$

이므로 ㉡을 만족시킨다.

따라서 조건을 만족시키는 함수 $g(x)$ 는 $a=6$ 일 때인

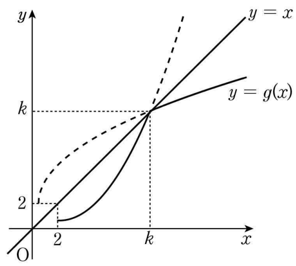
$$g(x)=\begin{cases} \sqrt{6x-3}+2 & (f(x)<f^{-1}(x)\text{인 경우}) \\ \dfrac{1}{6}(x-2)^2+\dfrac{1}{2} & (f(x) \ge f^{-1}(x)\text{인 경우}) \end{cases}$$

이고, 이때 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 [그림 7]과 같다.



[그림 7]

[그림 8]과 같이 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표를 k 라 하면



[그림 8]

$$\frac{1}{6}(k-2)^2+\frac{1}{2}=k$$

$k^2-4k+7=6k$

$k^2-10k+7=0$

$k>2$ 이므로

$k=5+3\sqrt{2}$

따라서 함수 $g(x)$ 는

$$g(x)=\begin{cases} \sqrt{6x-3}+2 & (x>5+3\sqrt{2}) \\ \dfrac{1}{6}(x-2)^2+\dfrac{1}{2} & (2 \le x \le 5+3\sqrt{2}) \end{cases}$$

이므로

$$g(4)=\frac{1}{6}(4-2)^2+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}$$

따라서 $p=6,\ q=7$ 이므로

$p+q=13$