6강. 함수

함수종류 및 합성함수 그래프

6회 성취 개수:

학번 이름

1.교과서 : P213(일대일 대응,일대일 함수),P241 #3,
P223 #9,P224 #14

2.쌤

219 난이도 ●●○

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 것은?

> 정의역의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여
> $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$이다.

① $f(x)=|x|$ ② $f(x)=x^2$
③ $f(x)=5$ ④ $f(x)=x-5$
⑤ $f(x)=|x|-x$

232 난이도 ●●○

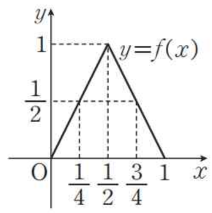
실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2+2 & (x\geq 1)\\ ax+b & (x<1)\end{cases}$$

가 일대일대응일 때, 상수 b의 값의 범위를 구하시오. (단, a는 상수)

244 난이도 ●○○

$0\leq x\leq 1$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다.

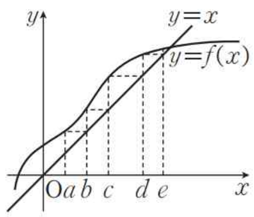


$(f\circ f)\left(\frac{1}{2}\right)+(f\circ f)\left(\frac{3}{4}\right)$의 값을 구하시오.

256 난이도 ●●○

다음 그림은 두 함수 $y=f(x)$, $y=x$의 그래프를 나타낸 것이다. 이때 $(f\circ f\circ f)(b)$의 값을 구하시오.

(단, 모든 점선은 x축 또는 y축에 평행)



252 난이도 ●●○

함수 $f(x)=2x+1$에 대하여

$f^{(2)}=f\circ f$, $f^{(3)}=f\circ f^{(2)}$, $\cdots$,
$f^{(n)}=f\circ f^{(n-1)}$

으로 정의할 때, $f^{(5)}(1)$의 값은?

264

난이도 ●●○

함수 $f(x)=x+2$일 때,

$$(f\circ f\circ f\circ\cdots\circ f\circ f)(1)\ (f\text{가 }10\text{개})$$

의 값은? (단, $f\circ f$는 f와 f의 합성함수)

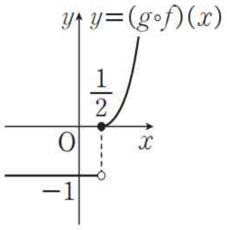
263

난이도 ●●○

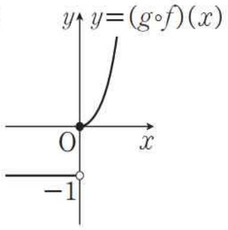
두 함수 $f(x)=2x-1$, $g(x)=\begin{cases} x^2 & (x\ge 0) \\ -1 & (x<0)\end{cases}$에 대하여

다음 중 함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프로 옳은 것은?

①



②



3.모의고사

▶2020년 03월 서울교육청 14번 [4점]

1. 함수 $f(x)=x^2-2x+a$가

$$(f\circ f)(2)=(f\circ f)(4)$$

를 만족시킬 때, $f(6)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

▶2021년 11월 경기교육청 28번 [4점]

1. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2x+2 & (x<2) \\ x^2-7x+16 & (x\ge 2)\end{cases}$$

에 대하여 $(f\circ f)(a)=f(a)$를 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오.

▶2019년 03월 서울교육청 21번 [4점]

1. 두 이차함수 $f(x)=x^2-2x-3$, $g(x)=x^2+2x+a$가 있다. x에 대한 방정식 $f(g(x))=f(x)$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 정수 a의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

1. 두 함수

$$f(x)=x+a$$

$$g(x)=\begin{cases} 2x-6 & (x<a) \\ x^2 & (x\ge a)\end{cases}$$

에 대하여 $(g\circ f)(1)+(f\circ g)(4)=57$을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합을 S라 할 때, $10S^2$의 값을 구하시오.

1. [정답] ①

[출제의도] 이차함수의 그래프의 대칭성을 이용하여 함숫값을 구하는 문제를 해결한다.

$f(x)=x^2-2x+a$ 에서

$f(2)=2^2-4+a=a$

$f(4)=4^2-8+a=a+8$

$(f\circ f)(2)=(f\circ f)(4)$ 에서

$f(f(2))=f(f(4))$

$f(a)=f(a+8)$

이때 함수 $f(x)=x^2-2x+a$ 에서

$f(x)=(x-1)^2+a-1$

이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 축이 직선 $x=1$ 이고, 직선 $x=1$ 에 대하여 대칭이다.

$a\neq a+8$ 이므로 $f(a)=f(a+8)$ 이려면

$\frac{a+(a+8)}{2}=1$

$a=-3$

따라서 함수 $f(x)$ 가 $f(x)=x^2-2x-3$ 이므로

$f(6)=6^2-2\times6-3=21$

[다른 풀이]

$f(x)=x^2-2x+a$ 에서

$f(2)=2^2-4+a=a$

$f(4)=4^2-8+a=a+8$

$(f\circ f)(2)=(f\circ f)(4)$ 에서

$f(f(2))=f(f(4))$

$f(a)=f(a+8)$

$a^2-2a+a=(a+8)^2-2(a+8)+a$

$16a=-48$

$a=-3$

따라서 함수 $f(x)$ 가 $f(x)=x^2-2x-3$ 이므로

$f(6)=6^2-2\times6-3=21$

2. [정답] 6

[출제의도] 합성함수를 활용하여 문제해결하기

$(f\circ f)(a)=f(a)$에서 $f(a)=t$로 치환하면 $f(t)=t$

$t<2$일 때 $2t+2=t$에서 $t=-2$이고,

$t\geq2$일 때 $t^2-7t+16=t$에서 $t=4$이다.

(i) $t=-2$인 경우 $f(a)=-2$에서

$a<2$일 때, $2a+2=-2,\ a=-2$

$a\geq2$일 때, $a^2-7a+16=-2,\ a^2-7a+18=0$의 판별식 D가 $\mathrm{D}=(-7)^2-4\times1\times18=-23<0$이므로 $a\geq2$일 때, $f(a)=-2$를 만족시키는 실수 a의 값이 존재하지 않는다.

(ii) $t=4$인 경우 $f(a)=4$에서

$a<2$일 때, $2a+2=4,\ a=1$

$a\geq2$일 때, $a^2-7a+16=4,\ a^2-7a+12=(a-3)(a-4)=0,$

$a=3$ 또는 $a=4$

(i), (ii)에 의하여 $(f\circ f)(a)=f(a)$를 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합은 $-2+1+3+4=6$

3. [정답] ④

[출제의도] 연립이차방정식과 이차함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결한다.

$f(g(x))=f(x)$에서

$\{g(x)\}^2-2g(x)-3=x^2-2x-3$

$\{g(x)\}^2-x^2-2\{g(x)-x\}=0$

$\{g(x)-x\}\{g(x)+x-2\}=0$

따라서 $g(x)=x$ 또는 $g(x)=-x+2$이므로

$x^2+2x+a=x$ $\qquad x^2+x+a=0$ $\qquad$ ...... ㉠

$x^2+2x+a=-x+2$ $\qquad x^2+3x+a-2=0$ $\qquad$ ...... ㉡

㉠의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=1-4a$

㉡의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=9-4(a-2)=17-4a$

(i) 방정식 ㉠은 서로 다른 두 실근을 갖고, 방정식 ㉡이 실근을 갖지 않는 경우

$D_1>0$ 에서 $\quad a<\frac{1}{4}$

$D_2<0$ 에서 $\quad a>\frac{17}{4}$

따라서 조건을 만족시키는 실수 a 의 값은 존재하지 않는다.

(ii) 두 방정식 ㉠, ㉡이 중근을 갖는 경우

$D_1=0$ 에서 $\quad a=\frac{1}{4}$ $\qquad D_2=0$ 에서 $\quad a=\frac{17}{4}$

따라서 조건을 만족시키는 실수 a 의 값은 존재하지 않는다.

(iii) 방정식 ㉠은 실근을 갖지 않고, 방정식 ㉡이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우

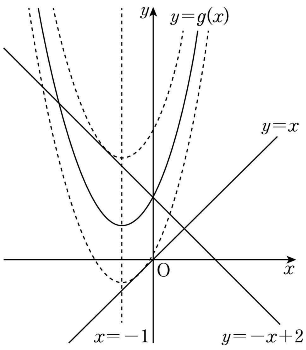
$D_1<0$ 에서 $\quad a>\frac{1}{4}$

$D_2>0$ 에서 $\quad a<\frac{17}{4}$

따라서 $\frac{1}{4}<a<\frac{17}{4}$ 이다.

(i), (ii), (iii)에서 정수 a 는 $1,\ 2,\ 3,\ 4$ 이므로 개수는 4 이다.

[참고]



함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 함수 $y=g(x)$의 그래프가 직선 $x=-1$에 대하여 대칭이다. 즉, 이차함수의 그래프에서 서로 다른 실근의 개수가 2가 되려면 함수 $y=g(x)$의 그래프가 두 직선 $y=x$ 또는 $y=-x+2$와 만나는 모든 서로 다른 점의 개수가 2이어야 하므로 함수 $y=g(x)$의 그래프가 직선 $y=x$와는 만나지 않고, 함수 $y=g(x)$의 그래프가 직선 $y=-x+2$와 서로 다른 두 점에서 만나야 한다. 즉, 방정식 ㉠의 실근의 개수가 0, 방정식 ㉡의 서로 다른 실근의 개수가 2이어야만 한다.

4. [정답] 40

[출제의도] 함수의 성질을 이용하여 추론하기

$(g\circ f)(1)=g(a+1)=(a+1)^2$

$a\le 4$일 때

$(f\circ g)(4)=f(16)=a+16$

$(g\circ f)(1)+(f\circ g)(4)=a^2+3a+17=57$

$a^2+3a-40=(a-5)(a+8)=0$

$a=-8$

$a>4$일 때

$(f\circ g)(4)=f(2)=a+2$

$(g\circ f)(1)+(f\circ g)(4)=a^2+3a+3=57$

$a^2+3a-54=(a-6)(a+9)=0$

$a=6$

$S=-8+6=-2$

따라서 $10S^2=40$