



1. 교과서 : P218, P220 역함수와 그 성질, P243 #12

2. 짝

270

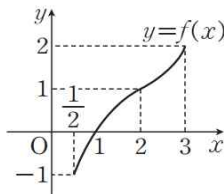
난이도 ●●○ [비상]

두 함수  $f(x) = 2x^2 + 1$  ( $x \geq 0$ ),  $g(x) = x - 5$ 에 대하여  
 $(f^{-1} \circ g)^{-1}(1)$ 의 값을 구하시오.

280

난이도 ●○○

$\frac{1}{2} \leq x \leq 3$ 에서 함수  $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같고  
 $(f \circ f)(2) = a$ 일 때,  $f^{-1}(a)$ 의 값을 구하시오.



281

난이도 ●●○

함수  $f(x) = \frac{1}{3}x - 3$ 의 그래프와 그 역함수  $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점의 좌표를 구하시오.

285

난이도 ●●○

실수 전체의 집합에서 정의된 함수  $f$ 에 대하여  
 $f(3x - 1) = 6x + 4$ 일 때,  $f(x)$ 의 역함수  $g(x)$ 를 구하시오.

290

난이도 ●●○

역함수가 존재하는 함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) f^{-1}(0) = 3$$

$$(나) f(5x - 2) = g(x)$$

$g^{-1}(0)$ 의 값은?

### 3.모의고사

▶2021년 03월 서울교육청 20번 [4점]

1. 세 집합

$$X = \{1, 2, 3, 4\}, Y = \{2, 3, 4, 5\}, Z = \{3, 4, 5\}$$

에 대하여 두 함수  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수  $f$ 는 일대일대응이다.  
 (나)  $x \in (X \cap Y)$ 이면  $g(x) - f(x) = 1$ 이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

- < 보 기 > —————
- ㄱ. 함수  $g \circ f$ 의 치역은  $Z$ 이다.  
 ㄴ.  $f^{-1}(5) \geq 2$   
 ㄷ.  $f(3) < g(2) < f(1)$ 이면  $f(4) + g(2) = 6$ 이다.

▶2018년 11월 경기교육청[4점] \* <모순법>

1. 집합  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 에 대하여 함수  $f: X \rightarrow X$ 가 역 함수가 존재하고, 다음 조건을 만족시킨다.

- (가)  $x = 1, 2, 6$ 일 때  $(f \circ f)(x) + f^{-1}(x) = 2x$ 이다.  
 (나)  $f(3) + f(5) = 10$

$f(6) \neq 6$ 일 때,  $f(4) \times \{f(6) + f(7)\}$ 의 값을 구하시오.

▶2019년 03월 서울교육청 21번 [4점]

1. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수  $f(x)$ 에 대하여 함수  $g(x)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$g(x) = \begin{cases} -x+4 & (x < -2) \\ f(x) & (-2 \leq x \leq 1) \\ -x-2 & (x > 1) \end{cases}$$

함수  $g(x)$ 의 치역이 실수 전체의 집합이고, 함수  $g(x)$ 의 역함수가 존재할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

- < 보 기 > —————
- ㄱ.  $f(-2) + f(1) = 3$   
 ㄴ.  $g(0) = -1, g(1) = -3$ 이면 곡선  $y = f(x)$ 의 꼭짓점의  $x$ 좌표는  $\frac{5}{2}$ 이다.  
 ㄷ. 곡선  $y = f(x)$ 의 꼭짓점의  $x$ 좌표가  $-2$ 이면  $g^{-1}(1) = 0$ 이다.

1. [정답] ①

[출제의도] 일대일대응과 합성함수를 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 추론한다.

ㄱ. 함수  $f$  는 일대일대응이고 집합  $X \cap Y = \{2, 3, 4\}$  의 모든 원소  $x$  에 대하여  $g(x) - f(x) = 1$  이므로

$f(x) = 5$  인  $x$  가 존재하면  $g(x) = 6$  이 되어 모순이다.

그러므로 집합  $X \cap Y = \{2, 3, 4\}$  의 모든 원소  $x$  에 대하여  $f(x) \leq 4$  이고

함수  $f$  는 일대일대응이므로

$$\{f(2), f(3), f(4)\} = \{2, 3, 4\}$$

$$g(x) = f(x) + 1 \text{ 에서}$$

$$\{g(2), g(3), g(4)\} = \{3, 4, 5\}$$

따라서 함수  $g \circ f$  의 치역은  $Z$ 이다. (참)

ㄴ. ㄱ에서  $\{f(2), f(3), f(4)\} = \{2, 3, 4\}$  이고

함수  $f$  는 일대일대응이므로

$$f(1) = 5$$

따라서  $f^{-1}(5) = 1$  (거짓)

ㄷ. ㄴ에서  $f(1) = 5$  이므로

$$f(3) < g(2) < f(1) \text{ 에서 } f(3) < g(2) < 5 \dots\dots \textcircled{1}$$

(i)  $g(2) = 3$  인 경우

$$f(2) = g(2) - 1 = 2$$

함수  $f$  는 일대일대응이므로

$$f(3) = 3 \text{ 또는 } f(3) = 4$$

가 되어  $\textcircled{1}$ 을 만족시키지 않는다.

(ii)  $g(2) = 4$  인 경우

$$f(2) = g(2) - 1 = 3 \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$ 에서  $f(3) < 3$  이므로  $f(3) = 2$

함수  $f$  는 일대일대응이므로  $f(4) = 4$

$$\text{따라서 } f(4) + g(2) = 4 + 4 = 8 \text{ (거짓)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ이다.

2. [정답] 50

[출제의도] 합성함수와 역함수를 이용하여 추론하기

함수  $f$  는 역함수가 존재하므로 일대일대응이다.

조건 (가)에서  $x = 1, 2, 6$  일 때

$$f(f(x)) + f^{-1}(x) = 2x \text{ 이므로}$$

(i)  $x = 1$  일 때,

$$f(f(1)) + f^{-1}(1) = 2 \text{ 이고}$$

$$f(f(1)) \in X, f^{-1}(1) \in X \text{ 이므로}$$

$$f(f(1)) = f^{-1}(1) = 1$$

$$\therefore f(1) = 1$$

(ii)  $x = 2$  일 때,

$$f(f(2)) + f^{-1}(2) = 4 \text{ 이고}$$

$$f(f(2)) \in X, f^{-1}(2) \in X \text{ 이므로}$$

$$f(f(2)) = 1 \text{ 이면 } f(2) = 1 \text{ 이므로 함수 } f \text{ 가}$$

일대일대응인 것에 모순이다.

$$f^{-1}(2) = 1 \text{ 이면 } f(1) = 2 \text{ 이므로 } f(1) = 1 \text{ 에 모순이다.}$$

$$\text{따라서 } f(f(2)) = f^{-1}(2) = 2$$

$$\therefore f(2) = 2$$

(iii)  $x = 6$  일 때,

$$f(6) \neq 6, f(f(6)) + f^{-1}(6) = 12 \text{ 이고}$$

$$f(f(6)) \in X, f^{-1}(6) \in X \text{ 이므로}$$

$$f(f(6)) = 7, f^{-1}(6) = 5 \text{ 또는 } f(f(6)) = 5, f^{-1}(6) = 7$$

$f(f(6)) = 7, f^{-1}(6) = 5$  인 경우

$$f(5) = 6 \text{ 이고 } f(3) + f(5) = 10 \text{ 이므로 } f(3) = 4$$

$$f(6) = a \text{ 라 하면 } f(a) = 7 \text{ 이므로 } a = 6 \text{ 또는 } a = 7$$

$$f(6) \neq 6 \text{ 이므로 } a \neq 6$$

$$a = 7 \text{ 이면 } f(6) = 7 \text{ 이고 } f(f(6)) = 7 \text{ 에서}$$

$$f(7) = 7 \text{ 이므로 함수 } f \text{ 가 일대일대응인 것에}$$

모순이다.

$f(f(6)) = 5, f^{-1}(6) = 7$  인 경우

$$f(7) = 6 \text{ 이고 } f(3) + f(5) = 10 \text{ 이므로}$$

$$f(3) = 3, f(5) = 7 \text{ 또는 } f(3) = 7, f(5) = 3$$

$$\text{따라서 } f(6) = 4 \text{ 또는 } f(6) = 5$$

$$f(6) = 5 \text{ 이면 } f(f(6)) = 5 \text{ 에서 } f(f(6)) = f(5) = 5$$

이므로 함수  $f$  가 일대일대응인 것에 모순이다.

$$f(6) = 4 \text{ 이면 } f(4) = 5 \text{ 이고 } f(f(6)) = f(4) = 5 \text{ 이다.}$$

이때 함수  $f$  는 주어진 조건을 모두 만족한다.

$$\text{따라서 } f(4) = 5, f(6) = 4, f(7) = 6 \text{ 이므로}$$

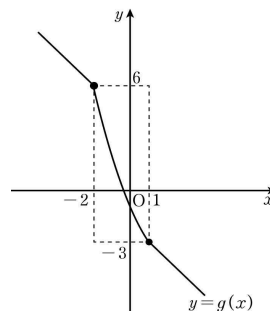
$$f(4) \times \{f(6) + f(7)\} = 5 \times (4 + 6) = 50$$

3. [정답] ⑤

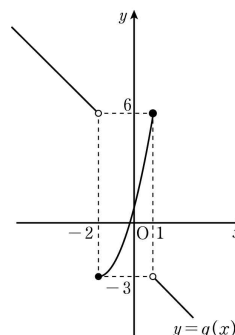
[출제의도] 일대일대응을 이해하여 명제의 참, 거짓을 추론한다.

ㄱ. 함수  $g(x)$  의 정의역과 치역이 모두 실수 전체의 집합이고 함수  $g(x)$  의 역함수가 존재하므로 함수  $g(x)$  는 일대일대응이다. 따라서 함수  $y = g(x)$  의 그래프의 개형은 다음과 같이 두 가지이다.

(i)  $g(-2) = f(-2) = 6, g(1) = f(1) = -3$  일 때,



(ii)  $g(-2) = f(-2) = -3, g(1) = f(1) = 6$  일 때,



(i), (ii)에서

$$f(-2) + f(1) = 3 \text{ (참)}$$

$$\therefore g(0) = f(0) = -1 \text{에서}$$

$$f(x) = ax^2 + bx - 1 \text{ (} a \text{는 양의 상수, } b \text{는 상수)}$$

로 놓을 수 있다.

$$g(1) = f(1) = -3 \text{ 이면 } f(-2) = 6 \text{ 이어야 하므로}$$

$$a + b - 1 = -3, 4a - 2b - 1 = 6$$

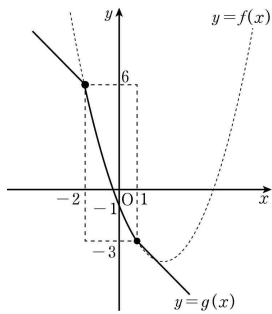
$$\text{연립방정식 } \begin{cases} a + b = -2 \\ 4a - 2b = 7 \end{cases} \text{ 을 풀면}$$

$$a = \frac{1}{2}, b = -\frac{5}{2}$$

따라서

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - 1 \\ &= \frac{1}{2}\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{33}{8} \end{aligned}$$

이므로 곡선  $y = f(x)$ 의 꼭짓점의  $x$ 좌표는  $\frac{5}{2}$ 이다. (참)



ㄷ. 곡선  $y = f(x)$ 의 꼭짓점의  $x$ 좌표가  $-2$ 이므로

$$f(x) = a(x+2)^2 + p \text{ (} a \text{는 양의 상수, } p \text{는 상수)}$$

라 할 수 있다.

이때 함수  $g(x)$ 가 일대일대응이므로

$$f(-2) = -3, f(1) = 6$$

이다.

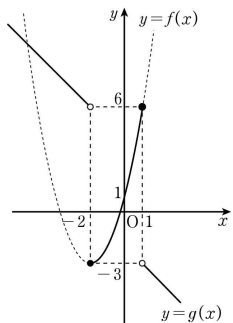
$$p = -3, 9a + p = 6$$

에서  $a = 1$ 이므로

$$f(x) = (x+2)^2 - 3$$

따라서  $g(0) = f(0) = 1$ 이므로

$$g^{-1}(1) = 0 \text{ (참)}$$



그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.