8강. 함수
유리함수의 이동 및 대칭성, 역함수

8회 성취 개수:

학번 이름

1.교과서 : P229(점대칭, 선대칭), P230(판별하기),
P240 #13, P242 #8, P243 #14

2.쌤

306 난이도 ●●○

다음 |보기|의 함수에서 점근선이 서로 일치하는 것만을 있는 대로 고르시오.

|보기|

ㄱ. $y=\frac{x-3}{x+1}$ ㄴ. $y=\frac{x}{x+1}$

ㄷ. $y=\frac{-2x-1}{x-1}$ ㄹ. $y=\frac{x}{x-1}$

316 난이도 ●●○

유리함수 $y=\frac{ax+b}{x+c}$의 그래프가 점 $(1, -1)$을 지나고 두 점근선의 방정식이 $x=-1$, $y=2$일 때, $a+b+c$의 값은?

(단, a, b, c는 상수)

317 난이도 ●○○

함수 $y=\frac{2x-1}{x+2}$의 그래프는 점 (a, b)에 대하여 대칭일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

318 난이도 ●●○

함수 $y=\frac{3x+k-2}{x+1}$의 그래프가 모든 사분면을 지나도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

3.모의고사

▶2021년 03월 서울교육청 16번 [4점]

1. 좌표평면에서 곡선

$$y=\frac{k}{x-2}+1 \ (k<0)$$

이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 이 곡선의 두 점근선의 교점을 C라 하자. 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있도록 하는 상수 k의 값은?

▶2020년 03월 서울교육청 19번 [4점]

1. 함수 $f(x)=\dfrac{a}{x-6}+b$에 대하여 함수 $y=\left|f(x+a)+\dfrac{a}{2}\right|$의 그래프가 y축에 대하여 대칭일 때, $f(b)$의 값은? (단, a, b는 상수이고, $a\neq 0$이다.)

① $-\dfrac{25}{6}$ ② -4 ③ $-\dfrac{23}{6}$ ④ $-\dfrac{11}{3}$ ⑤ $-\dfrac{7}{2}$

▶2019년 03월 서울교육청 20번 [4점]

1. 두 함수

$$f(x)=-\frac{1}{x}+k,\ g(x)=\frac{1}{x-1}-k$$

가 있다. 정수 k에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점 중 x좌표가 양수인 점의 개수를 $h(k)$라 하자. 등식

$$h(k)+h(k+1)+h(k+2)=4$$

를 만족시키는 정수 k의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

▶2021년 03월 서울교육청 30번 [4점]

1. 함수 $f(x)=\dfrac{bx}{x-a}$ $(a>0,\ b\neq 0)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ f(x+2a)+a & (x\geq a) \end{cases}$$

라 하자. 실수 t에 대하여 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수를 $h(t)$라 하면, 상수 k에 대하여

$$\{t \mid h(t)=1\}=\{t \mid -9\leq t\leq -8\}\cup\{t \mid t\geq k\}$$

이다. $a\times b\times g(-k)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

1. [정답] ④

[출제의도] 유리함수의 그래프를 이용하여 상수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

곡선 $y=\dfrac{k}{x-2}+1$ 이 x 축과 만나는 점은

$0=\dfrac{k}{x-2}+1$ 에서 $\mathrm{A}(2-k, 0)$

곡선 $y=\dfrac{k}{x-2}+1$ 이 y 축과 만나는 점은

$y=\dfrac{k}{0-2}+1$ 에서 $\mathrm{B}\left(0,\ -\dfrac{k}{2}+1\right)$

곡선 $y=\dfrac{k}{x-2}+1$ 의 두 점근선의 방정식은

$x=2,\ y=1$ 이므로 $\mathrm{C}(2, 1)$

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로

$$\frac{1-0}{2-(2-k)}=\frac{1-\left(-\dfrac{k}{2}+1\right)}{2-0}$$

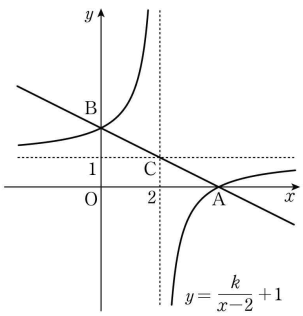
$$\frac{1}{k}=\frac{k}{4}$$

$k^2=4$

$k<0$ 이므로 $k=-2$

[다른 풀이]

유리함수 $y=\dfrac{p}{x-q}+r\,(p\neq 0,\ p,\ q,\ r$ 는 상수$)$의 그래프는 두 점근선 $x=q,\ y=r$ 의 교점 (q, r) 에 대하여 대칭이다. 그러므로 점 (q, r) 를 지나는 직선이 유리함수 $y=\dfrac{p}{x-q}+r$ 의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나면 두 교점은 항상 점 (q, r) 에 대하여 대칭이다.



따라서 곡선 $y=\dfrac{k}{x-2}+1\,(k<0)$의 두 점근선의 교점 $\mathrm{C}(2, 1)$ 과 곡선 위의 두 점 A, B가 한 직선 위에 있으려면 두 점 A, B는 점 C에 대하여 대칭이어야 한다.

두 점 A, B가 각각 x 축, y 축 위의 점이므로 두 점의 좌표를 각각 $(a, 0),\ (0, b)$ 로 놓을 수 있다. 점 C가 선분 AB의 중점이므로

$\dfrac{a+0}{2}=2,\ \dfrac{0+b}{2}=1$

즉, $a=4,\ b=2$

따라서 곡선 $y=\dfrac{k}{x-2}+1$ 이 점 $\mathrm{A}(4, 0)$ 을 지나므로

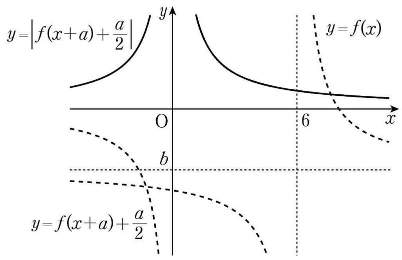
$0=\dfrac{k}{4-2}+1=\dfrac{k}{2}+1$

$k=-2$

2. [정답] ④

[출제의도] 평행이동을 이용하여 유리함수의 그래프를 추론한다.

곡선 $y=\left|f(x+a)+\dfrac{a}{2}\right|$ 는 곡선 $y=f(x+a)+\dfrac{a}{2}$ 의 x 축 아래에 그려진 부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이고, 이 곡선이 y 축에 대하여 대칭이려면 곡선 $y=f(x+a)+\dfrac{a}{2}$ 의 점근선의 방정식은 그림과 같이 $x=0,\ y=0$ 이어야 함을 알 수 있다.



$f(x)=\dfrac{a}{x-6}+b$ 에서

$f(x+a)+\dfrac{a}{2}=\dfrac{a}{x+a-6}+b+\dfrac{a}{2}$

이고 곡선 $y=f(x+a)+\dfrac{a}{2}$ 의 점근선의 방정식은

$x=6-a,\ y=b+\dfrac{a}{2}$

이 점근선의 방정식이 $x=0,\ y=0$ 이어야 하므로

$6-a=0,\ b+\dfrac{a}{2}=0$

$a=6,\ b=-3$

따라서 $f(x)=\dfrac{6}{x-6}-3$ 이므로

$f(b)=f(-3)$

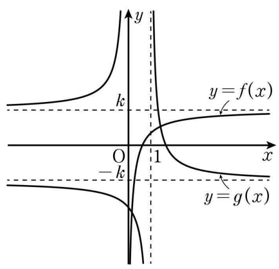
$=-\dfrac{11}{3}$

3. [정답] ②

[출제의도] 유리함수의 그래프와 관련된 문제를 해결한다.

(i) $k>0$ 일 때,

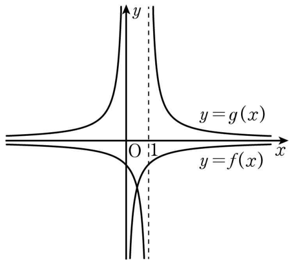
두 곡선 $y=f(x),\ y=g(x)$ 를 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



두 곡선 $y=f(x),\ y=g(x)$ 의 교점 중 x 좌표가 양수인 점의 개수는 2 이다.

(ii) $k=0$ 일 때,

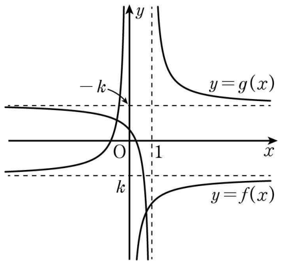
두 곡선 $y=f(x),\ y=g(x)$ 를 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 교점 중 x 좌표가 양수인 점의 개수는 1 이다.

(iii) $k<0$ 일 때,

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 를 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 교점 중 x 좌표가 양수인 점의 개수는 1 이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여

$$h(k)=\begin{cases} 1 & (k\le 0) \\ 2 & (k>0) \end{cases}$$

연속하는 세 정수 k, $k+1$, $k+2$ 에 대하여 등식

$h(k)+h(k+1)+h(k+2)=4$ ...... ㉠

가 성립하려면

$h(k)=1$, $h(k+1)=1$, $h(k+2)=2$

이어야 한다.

이때 $h(-1)=1$, $h(0)=1$, $h(1)=2$ 이므로 등식 ㉠을 만족시키는 정수 k 의 값은 -1 이다.

4. [정답] 192

[출제의도] 유리함수의 그래프와 직선의 교점의 개수를 구하는 문제를 해결한다.

$$f(x)=\frac{bx}{x-a}$$
$$=\frac{b(x-a)+ab}{x-a}$$
$$=\frac{ab}{x-a}+b$$

에서 곡선 $y=f(x)$ 의 점근선의 방정식은 $x=a$, $y=b$ 이다.

이때 곡선 $y=f(x+2a)+a$ 는 곡선 $y=f(x)$ 를 x 축의 방향으로 $-2a$ 만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이므로 곡선 $y=f(x+2a)+a$ 의 점근선의 방정식은 $x=a-2a=-a$, $y=b+a$, 즉 $x=-a$ 와 $y=b+a$ 이다.

이제

$\{t\mid h(t)=1\}=\{t\mid -9\le t\le -8\}\cup\{t\mid t\ge k\}$ ...... ㉠

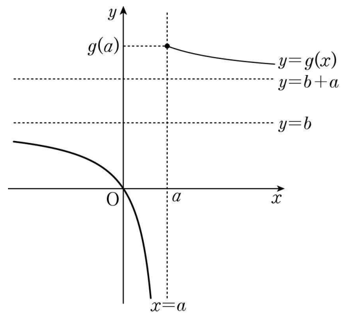
를 만족시키는 경우를 찾아보자.

이때 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 의 교점의 개수가 $h(t)$ 이므로 집합 $\{t\mid h(t)=1\}$은 교점의 개수가 1 이 되는 모든 t 의 값의 집합을 나타낸다.

따라서 ㉠은 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 의 교점의 개수가 1 이 되는 모든 t 의 값의 범위는 $-9\le t\le -8$ 또는 $t\ge k$ 임을 나타낸다.

(i) $b>0$ 인 경우

$ab>0$, $b+a>b>0$ 이므로 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 의 교점의 개수가 1 이 되는 모든 t 의 값의 범위는

$t<b$ 또는 $b+a<t\le g(a)$

이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $b<0$ 인 경우

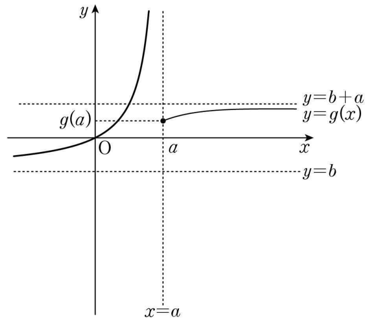
$ab<0$ 이고 $b<b+a$이다.

이때

$g(a)=f(3a)+a=\dfrac{3}{2}b+a$ ...... ㉡

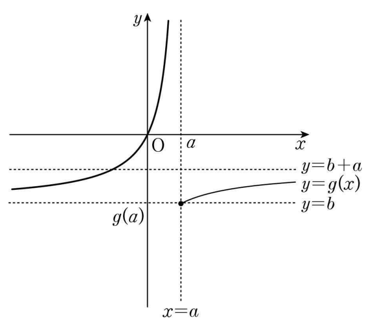
이므로 다음의 경우로 나누어 살펴보자.

(ii-1) $b<g(a)$ 인 경우



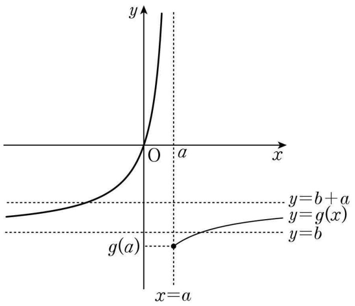
함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 1이 되는 모든 t의 값의 범위는 $b<t<g(a)$ 또는 $t\ge b+a$ 이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii-2) $b=g(a)$ 인 경우



함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 1이 되는 모든 t 의 값의 범위는 $t=g(a)$ 또는 $t\ge b+a$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii-3) $b>g(a)$ 인 경우



함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 1이 되는 모든 t의 값의 범위는

$g(a)\le t\le b$ 또는 $t\ge b+a$

이다.

따라서 ㉠을 만족시키기 위해서는

$g(a)=-9$

$b=-8$

$b+a=k$

이어야 한다.

㉡에서

$$g(a)=\frac{3}{2}\times(-8)+a$$

$$=-12+a=-9$$

이므로 $a=3$

$k=b+a$

$=(-8)+3$

$=-5$

(i), (ii)에서

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{-8x}{x-3} & (x<3)\\[2ex] \dfrac{-8(x+6)}{x+3}+3 & (x\ge 3)\end{cases}$$

즉, $g(x)=\begin{cases}-\dfrac{24}{x-3}-8 & (x<3)\\[2ex] -\dfrac{24}{x+3}-5 & (x\ge 3)\end{cases}$

$g(-k)=g(5)$

$$=-\frac{24}{5+3}-5$$

$=-8$

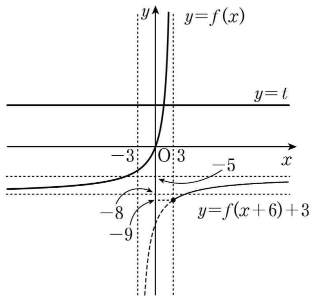
따라서 $a\times b\times g(-k)=3\times(-8)\times(-8)=192$

[보충설명]

함수 $f(x)=\dfrac{-8x}{x-3}$ 에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}f(x) & (x<3)\\ f(x+6)+3 & (x\ge 3)\end{cases}$$

의 그래프와 직선 $y=t$ 는 그림과 같다.



이때 함수 $h(t)$는

$$h(t)=\begin{cases}0 & (t<-9)\\ 1 & (-9\le t\le -8 \text{ 또는 } t\ge -5)\\ 2 & (-8<t<-5)\end{cases}$$

이다.