

진앙과 진원을 원으로 추적하라.

지진이 발생하면 지진파가 사방으로 퍼져 나간다. 이때 인근의 지진 관측소는 두 지진 파 P파와 S파가 도착하는 시간의 차이로 진원까지의 거리를 측정한다. 진앙은 세 곳의 관측소에서 각 관측소를 중심으로 각 관측소에서 구한 각각의 진원 거리를 반지름의 길이로 하는 세 원을 그려 추적할 수 있다. 진앙의 위치는 각 원이 만나는 점을 이은 세 선분의 교점이다.

출처 『수학동아』, 2011년 4월호



준비 학습

●이차방정식의 판별식

자신 있음

복습 필요



1 이차방정식 $x^2 + kx + 4 = 0$ 이 다음 근을 갖도록 실수 k 의 값 또는 그 범위를 정하십시오.

(1) 서로 다른 두 실근

(2) 중근

(3) 서로 다른 두 허근

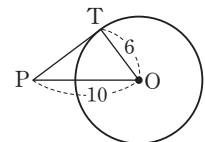
●원의 성질

자신 있음

복습 필요



2 오른쪽 그림의 점 P에서 원 O에 그은 접선 PT의 길이를 구하십시오.



01

원의 방정식

학습 목표 · 원의 방정식을 구할 수 있다.



개념

1

원의 방정식은 어떻게 구할까?

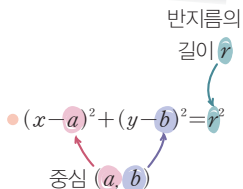
생각 열기

어떤 긴급 구호품 운송용 드론은 출발점에서 거리가 20 km 이하인 지역에 구호품을 운송할 수 있다고 한다. 다음 그림의 좌표평면에서 원점 O는 드론의 출발점을, 점 $P(x, y)$ 는 구호품을 운송해야 하는 지점을 나타낸다. $\overline{OP}=20$ km일 때, x 와 y 사이의 관계식을 구해 보자.



배웠어요!중1

평면 위의 한 점 O로부터 일정한 거리에 있는 점들로 이루어진 도형을 원이라고 한다.



좌표평면 위의 한 점 $C(a, b)$ 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r 인 원을 나타내는 방정식을 알아보자.

이 원 위의 임의의 점을 $P(x, y)$ 라고 하면 $\overline{CP}=r$ 이므로

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

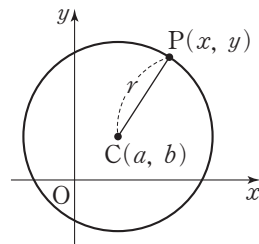
이다. 이 식의 양변을 제곱하면

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \quad \text{..... ㉠}$$

이다.

한편, 점 $P(x, y)$ 가 ㉠을 만족시키면 $\overline{CP}=r$ 이므로 점 $P(x, y)$ 는 중심이 $C(a, b)$ 이고 반지름의 길이가 r 인 원 위의 점이다.

따라서 ㉠을 점 $C(a, b)$ 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r 인 원의 방정식이라고 한다.

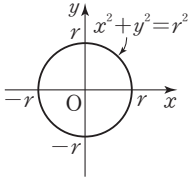


앞의 내용을 정리하면 다음과 같다.

원의 방정식

중심이 $C(a, b)$ 이고 반지름의 길이가 r 인 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$



특히, 중심이 원점 $O(0, 0)$ 이고 반지름의 길이가 r 인 원의 방정식은 다음과 같다.

$$x^2 + y^2 = r^2$$

보기 (1) 중심이 점 $(1, -2)$ 이고 반지름의 길이가 3인 원의 방정식은

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$$

(2) 중심이 원점 $O(0, 0)$ 이고 반지름의 길이가 2인 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 = 4$$

문제 1 다음 원의 방정식을 구하시오.

- (1) 중심이 점 $(-1, 3)$ 이고 반지름의 길이가 4인 원
- (2) 중심이 원점 $O(0, 0)$ 이고 점 $(3, 4)$ 를 지나는 원

예제 1

두 점 $A(4, 1)$, $B(-2, 3)$ 을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식을 구하시오.

● 원의 중심과 반지름의 길이를 구한 후, 원의 방정식을 구한다.

풀이 구하는 원의 중심을 $C(a, b)$ 라고 하면 점 C 는 \overline{AB} 의 중점이므로

$$a = \frac{4+(-2)}{2} = 1, \quad b = \frac{1+3}{2} = 2$$

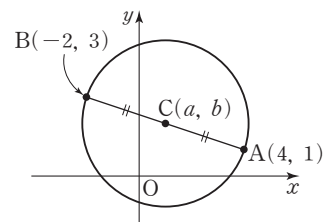
즉, 원의 중심은 $C(1, 2)$ 이다.

이때 반지름의 길이는

$$\overline{AC} = \sqrt{(1-4)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{10}$$

이므로 구하는 원의 방정식은

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$$



$$\text{답 } (x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$$

문제 2 다음 두 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식을 구하시오.

- (1) $(5, 1)$, $(-1, -3)$
- (2) $(-2, 4)$, $(2, 6)$

방정식 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 이 나타내는 도형은 무엇일까?

원의 방정식 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 을 전개하여 정리하면

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

이다. 이때 $-2a=A$, $-2b=B$, $a^2 + b^2 - r^2 = C$ 라고 하면 이 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

꼴로 나타낼 수 있다.

Q 원의 방정식을

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$
으로 나타내면 어떤
점이 편리할까요?

A 원의 중심과 반지름
의 길이를 바로 알 수
있어요.

또한, x, y 에 대한 이차방정식 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 은

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4C}{4}$$

로 변형할 수 있다. 이때 $A^2 + B^2 - 4C > 0$ 이면 방정식 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 은

중심이 점 $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ 이고

반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}}{2}$

인 원을 나타낸다.

예제
2

방정식 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ 은 어떤 도형을 나타내는지 말하시오.

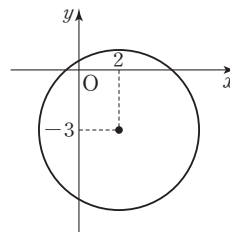
풀이 주어진 방정식을 변형하면

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) = 16$$

즉, $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4^2$ 이다.

따라서 주어진 방정식은 중심이 점 $(2, -3)$ 이고

반지름의 길이가 4인 원을 나타낸다.



답 중심이 점 $(2, -3)$ 이고 반지름의 길이가 4인 원

문제 3

다음 방정식이 나타내는 도형을 말하시오.

(1) $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$

(2) $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$

문제 4

방정식 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + k = 0$ 이 원을 나타내도록 실수 k 의 값의 범위를 정하시오.


좌표축에 접하는 원의 방정식

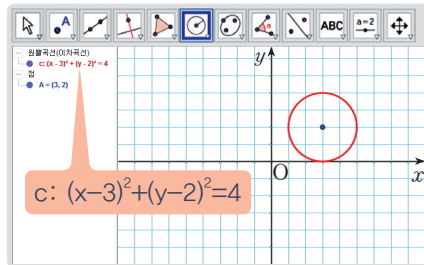
하 중 상
난이도

컴퓨터 프로그램을 사용하여 좌표축에 접하는 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이 사이의 관계를 알아보자.

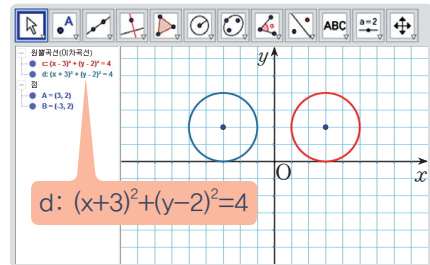
활동

x 축에 접하는 원은 (중심의 y 좌표의 절댓값) = (반지름의 길이)임을 확인해 보자.

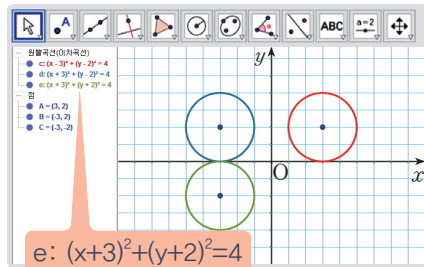
- ①  중심과 반지름이 있는 원을 사용하여 중심이 제1사분면 위에 있고 반지름의 길이가 2인 원을 그린다. 이 원을 x 축에 접하게 한 뒤, 대수창에 나타난 원의 방정식을 확인한다.



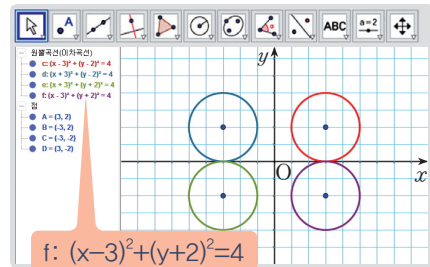
- ② 원의 중심을 제2사분면 위의 점으로 바꾸어 원을 x 축에 접하게 한 뒤, 대수창에 나타난 원의 방정식을 확인한다.



- ③ 원의 중심을 제3사분면 위의 점으로 바꾸어 원을 x 축에 접하게 한 뒤, 대수창에 나타난 원의 방정식을 확인한다.



- ④ 원의 중심을 제4사분면 위의 점으로 바꾸어 원을 x 축에 접하게 한 뒤, 대수창에 나타난 원의 방정식을 확인한다.



탐구 1

컴퓨터 프로그램을 사용하여 y 축에 접하는 원은 (중심의 x 좌표의 절댓값) = (반지름의 길이)임을 확인해 보자.

탐구 2

컴퓨터 프로그램을 사용하여 x 축과 y 축에 동시에 접하는 원은 (중심의 x 좌표의 절댓값) = (중심의 y 좌표의 절댓값) = (반지름의 길이)임을 확인해 보자.