

02

원과 직선의 위치 관계

학습 목표 · 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다.

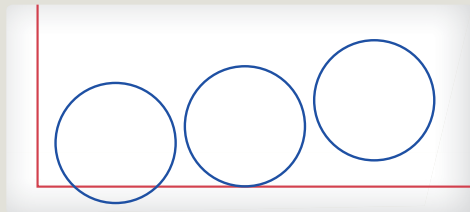
개념

1

좌표평면에서 원과 직선은 어떤 위치 관계가 있을까?

생각 열기

리듬 체조는 줄, 후프, 공, 곤봉, 리본을 이용하여 음악에 맞추어 율동을 표현하는 체조 경기이다. 리듬 체조 경기장의 바닥에 내려놓은 후프를 원으로, 경기장 바닥의 경계선을 직선으로 생각하여 원과 직선의 위치 관계를 생각해 보자. 출처 대한체조협회, 2016



위의 **생각 열기**에서 알 수 있듯이 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만나거나, 접하거나, 만나지 않는다.

좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 알아보자.

원과 직선의 방정식을 각각

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \dots\dots ㉠$$

$$y = mx + n \quad \dots\dots ㉡$$

이라고 하면 이들의 교점의 좌표는 이 두 방정식을 동시에 만족시키는 실수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 이다. ㉡을 ㉠에 대입하면

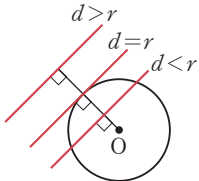
$$x^2 + (mx + n)^2 = r^2$$

이다. 이 식을 전개하여 정리하면

$$(m^2 + 1)x^2 + 2mnx + n^2 - r^2 = 0 \quad \dots\dots ㉢$$

이므로 원 ㉠과 직선 ㉡의 교점의 개수는 이차방정식 ㉢의 실근의 개수와 같다.

● 원의 중심과 직선 사이의 거리와 반지름의 길이를 비교하여 원과 직선의 위치 관계를 판단할 수도 있다. 원의 반지름의 길이를 r , 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d 라고 할 때, d 와 r 의 대소 관계에 따라 원과 직선의 위치 관계는 다음 그림과 같다.



따라서 이차방정식 ㉔의 판별식 D 의 값에 따라 원과 직선의 위치 관계는 다음과 같이 정해진다.

(i) $D > 0$ 이면 서로 다른 두 점에서 만난다.

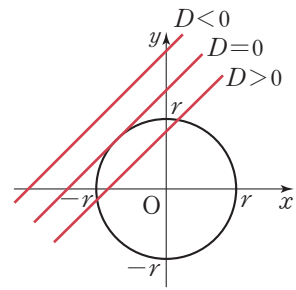
또, 서로 다른 두 점에서 만나면 $D > 0$ 이다.

(ii) $D = 0$ 이면 한 점에서 만난다(접한다).

또, 한 점에서 만나면 $D = 0$ 이다.

(iii) $D < 0$ 이면 만나지 않는다.

또, 만나지 않으면 $D < 0$ 이다.



보기 원 $x^2 + y^2 = 2$ 와 직선 $y = x + 1$ 의 위치 관계를 알아보기 위해

$y = x + 1$ 을 $x^2 + y^2 = 2$ 에 대입하면

$$x^2 + (x+1)^2 = 2, 2x^2 + 2x - 1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

이차방정식 ㉔의 판별식을 D 라고 하면

$$D = 2^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 12 > 0$$

따라서 주어진 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

문제 1 다음 원과 직선의 위치 관계를 말하시오.

(1) $x^2 + y^2 = 4$, $y = -x + 3$

(2) $x^2 + y^2 = 5$, $x - 2y = 5$

예제 1

원 $x^2 + y^2 = 2$ 와 직선 $y = x + k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나도록 실수 k 의 값의 범위를 정하시오.

● 판별식 $D > 0$ 임을 이용하여 실수 k 의 값의 범위를 정한다.

풀이 $y = x + k$ 를 $x^2 + y^2 = 2$ 에 대입하면

$$x^2 + (x+k)^2 = 2$$

$$2x^2 + 2kx + k^2 - 2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

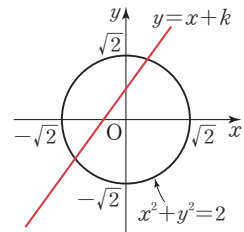
원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 ㉔의

판별식 D 가 $D > 0$ 이어야 하므로

$$D = (2k)^2 - 4 \times 2 \times (k^2 - 2) > 0$$

$$k^2 - 4 < 0, (k+2)(k-2) < 0$$

따라서 구하는 실수 k 의 값의 범위는 $-2 < k < 2$



다른 풀이 원 $x^2 + y^2 = 2$ 의 중심인 점 $(0, 0)$ 과 직선 $x - y + k = 0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{2}$ 보다 작아야 하므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} < \sqrt{2}, -2 < k < 2$$

답 $-2 < k < 2$

문제 2 원 $x^2+y^2=1$ 과 직선 $y=2x+k$ 의 위치 관계가 다음과 같을 때, 실수 k 의 값 또는 그 범위를 구하시오.

- (1) 서로 다른 두 점에서 만난다.
- (2) 한 점에서 만난다.
- (3) 만나지 않는다.

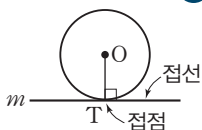
개념

2

기울기가 주어진 원의 접선의 방정식은 어떻게 구할까?

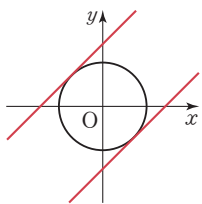
좌표평면에서 원 $x^2+y^2=r^2$ 에 접하고 기울기가 m 인 접선의 방정식을 구해 보자.

배웠어요! 중2



직선 m 이 원 O 와 한 점 T 에서 만날 때, 직선 m 을 원 O 의 접선이라 하고, 점 T 를 접점이라고 한다.

- 한 원에서 기울기가 같은 원의 접선은 두 개이다.



접선의 방정식을

$$y=mx+n$$

이라고 하고, 이것을 원의 방정식에 대입하여 정리하면

$$(m^2+1)x^2+2mnx+n^2-r^2=0 \quad \text{..... ⑦}$$

이다. 이차방정식 ⑦의 판별식을 D 라고 하면

$$D=(2mn)^2-4(m^2+1)(n^2-r^2)=4r^2(m^2+1)-4n^2$$

이다. 원과 직선이 접하면 $D=0$, 즉 $4r^2(m^2+1)-4n^2=0$ 이므로

$$n^2=r^2(m^2+1), \quad n=\pm r\sqrt{m^2+1}$$

이다. 따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$$

이다.

위의 내용을 정리하면 다음과 같다.

기울기가 주어진 원의 접선의 방정식

원 $x^2+y^2=r^2$ 에 접하고 기울기가 m 인 접선의 방정식은

$$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$$

보기 원 $x^2+y^2=4$ 에 접하고 기울기가 -1 인 접선의 방정식은

$$y=-x\pm 2\sqrt{(-1)^2+1}, \quad \text{즉 } y=-x\pm 2\sqrt{2}$$

문제 3 원 $x^2+y^2=9$ 에 접하고 기울기가 2인 접선의 방정식을 구하시오.

한 점을 지나는 원의 접선의 방정식은 어떻게 구할까?

좌표평면에서 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 위의 한 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식을 구해 보자.

배웠어요! 중3

원 O 위의 한 점 P에서의 접선은 반지름 OP와 서로 수직이다.

- 서로 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1 이다.

(i) $x_1 \neq 0, y_1 \neq 0$ 일 때, 직선 OP의 기울기는 $\frac{y_1}{x_1}$ 이고,

점 P에서의 접선은 선분 OP와 수직이므로 접선의

기울기는 $-\frac{x_1}{y_1}$ 이다.

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$$

이고, 이것을 정리하면

$$x_1x + y_1y = x_1^2 + y_1^2$$

이다. 이때 점 $P(x_1, y_1)$ 은 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 위의 점이므로 $x_1^2 + y_1^2 = r^2$ 이다.

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$x_1x + y_1y = r^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

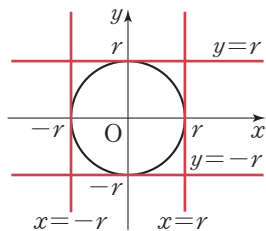
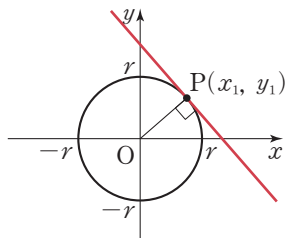
이다.

- $x_1 = 0$ 이면 점 P는 y 축 위의 점이고, $y_1 = 0$ 이면 점 P는 x 축 위의 점이다.

(ii) $x_1 = 0$ 또는 $y_1 = 0$ 일 때, 점 P의 좌표는 $(0, \pm r)$ 또는 $(\pm r, 0)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y = \pm r \text{ 또는 } x = \pm r$$

이다. 이때에도 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.



위의 내용을 정리하면 다음과 같다.

원 위의 점에서의 접선의 방정식

원 $x^2 + y^2 = r^2$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$x_1x + y_1y = r^2$$

보기 원 $x^2 + y^2 = 2$ 위의 점 $(1, -1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$x - y = 2$$

문제 4 다음 원 위의 점에서의 접선의 방정식을 구하시오.

(1) $x^2 + y^2 = 10$, $(-1, 3)$

(2) $x^2 + y^2 = 9$, $(3, 0)$