

예제 2

점 $A(4, 0)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 4$ 에 그은 접선의 방정식을 구하시오.

● 접점을 $P(x_1, y_1)$ 로 놓고 후, 접선이 점 $A(4, 0)$ 을 지나고 점 P 가 원 위에 있음을 이용하여 접점의 좌표를 구한다.

배웠어요! 중3

원 밖의 한 점에서 원에 그은 접선은 항상 2개이고 접선의 길이는 서로 같다.

풀이 접점을 $P(x_1, y_1)$ 이라고 하면 점 P 에서의 접선의 방정식은

$$x_1x + y_1y = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

접선 $\textcircled{1}$ 이 점 $A(4, 0)$ 을 지나므로

$$4x_1 = 4, x_1 = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

또한, 점 $P(x_1, y_1)$ 은 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점이므로

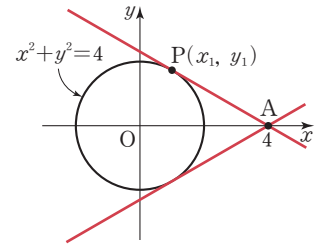
$$x_1^2 + y_1^2 = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ 을 연립하여 풀면

$$x_1 = 1, y_1 = \sqrt{3} \text{ 또는 } x_1 = 1, y_1 = -\sqrt{3}$$

따라서 이 값을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$x + \sqrt{3}y = 4 \text{ 또는 } x - \sqrt{3}y = 4$$



$$\textcircled{답} x + \sqrt{3}y = 4 \text{ 또는 } x - \sqrt{3}y = 4$$

문제 5 점 $(1, 3)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 접선의 방정식을 구하시오.

생각과 표현

문제 해결

추론

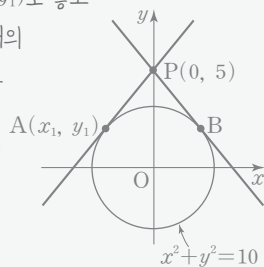
창의·융합

의사소통

점 $P(0, 5)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 10$ 에 그은 두 접선이 이 원과 만나는 점을 각각 A, B 라고 할 때, 다음 두 가지 방법으로 두 점 A, B 사이의 거리를 구해 보자.

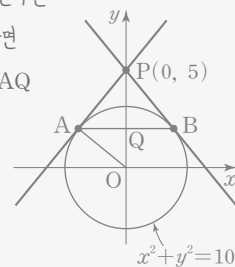
이 단원에서 배운 내용을 이용해 보자.

접점을 $A(x_1, y_1)$ 로 놓고
원 위의 점에서의
접선의 방정식을
이용하면 ...



중학교에서 배운 닮음비를 이용해 보자.

\overline{AB} 와 \overline{OP} 가 만나는
점을 Q 라고 하면
 $\triangle OPA \sim \triangle OAQ$
이므로 닮음비를
이용하면 ...



바탕 다지기

① 중심과 반지름의 길이가 주어진 원의 방정식

중심이 $C(a, b)$ 이고 반지름의 길이가 r 인 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

② 원과 직선의 위치 관계

원 $x^2 + y^2 = r^2$ 과 직선 $y = mx + n$ 을 연립하여 만든 이차방정식의 판별식 D 의 값에 따라 원과 직선의 위치 관계는 다음과 같이 정해진다.

(1) $D > 0$ 이면 서로 다른 두 점에서 만난다.

또, 서로 다른 두 점에서 만나면 $D > 0$ 이다.

(2) $D = 0$ 이면 한 점에서 만난다(접한다).

또, 한 점에서 만나면 $D = 0$ 이다.

(3) $D < 0$ 이면 만나지 않는다.

또, 만나지 않으면 $D < 0$ 이다.

③ 기울기가 주어진 원의 접선의 방정식

원 $x^2 + y^2 = r^2$ 에 접하고 기울기가 m 인 접선의 방정식은

$$y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$

④ 원 위의 점에서의 접선의 방정식

원 $x^2 + y^2 = r^2$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$x_1x + y_1y = r^2$$

01 다음 원의 방정식을 구하시오.

(1) 중심이 점 $(1, 2)$ 이고 반지름의 길이가 3인 원

(2) 중심이 원점 $O(0, 0)$ 이고 점 $(\sqrt{3}, 1)$ 을 지나는 원

02 두 점 $(1, -3)$, $(7, 1)$ 을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식을 구하시오.

03 원 $x^2 + y^2 = 5$ 와 직선 $y = 2x + k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나도록 실수 k 의 값의 범위를 정하시오.

04 다음 접선의 방정식을 구하시오.

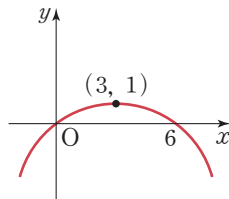
(1) 원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 접하고 기울기가 -1 인 접선

(2) 원 $x^2 + y^2 = 10$ 위의 점 $(3, -1)$ 에서의 접선

기본 익히기

- 05** 방정식 $x^2 + y^2 - 2x + 6y + k = 0$ 이 원을 나타내도록 실수 k 의 값의 범위를 정하십시오.

- 06** 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 원점과 두 점 $(3, 1)$, $(6, 0)$ 을 지나는 호가 그려져 있다. 이 호를 포함하는 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 각각 구하십시오.



- 07** 점 $(1, 2)$ 를 지나고 x 축과 y 축에 동시에 접하는 두 원이 있다. 이 두 원의 중심 사이의 거리를 구하십시오.

- 08** 원 $x^2 + y^2 = 25$ 에 접하고 직선 $x - 2y + 5 = 0$ 과 수직인 직선의 방정식을 구하십시오.

- 09** 중심이 점 $(2, 4)$ 이고 x 축에 접하는 원이 y 축과 만나는 두 점 사이의 거리를 구하십시오.

- 10** 중심이 점 $(1, 3)$ 이고 직선 $2x + y - 10 = 0$ 에 접하는 원의 방정식을 구하십시오.

- 11** 원 $x^2 + y^2 = 2$ 에 접하고 기울기가 m 인 접선이 점 $(2, 4)$ 를 지날 때, m 의 값을 모두 구하십시오.

- 12** 다음은 중심이 y 축 위에 있고 두 점 $(3, 2)$, $(-1, 0)$ 을 지나는 원의 방정식을 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

중심이 y 축 위에 있으므로 원의 중심을 점 $(0, a)$ 라고 하면
원이 두 점 $(3, 2)$, $(-1, 0)$ 을 지나므로
 $\sqrt{9+(a-2)^2} = \sqrt{\square}$
양변을 제곱하여 정리하면 $a = \square$
이때 반지름의 길이는 \square 이므로
구하는 원의 방정식은 \square

- 13** 점 $(-1, 3)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 그은 접선의 방정식을 구하시오.

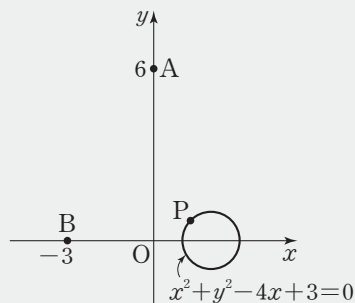
실력 키우기

- 14** 원 $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$ 과 직선 $y = mx$ 가 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 선분 AB의 길이가 최대가 되도록 하는 상수 m 의 값을 구하시오.

- 15** 두 직선 $y = -x + 4$, $y = -x + 8$ 에 모두 접하는 원의 중심이 직선 $y = 2x$ 위에 있을 때, 원의 중심의 좌표를 구하시오.

생각
특!특!

- 16** 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 두 점 A(0, 6), B(-3, 0)과 원 $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ 이 있다. 점 P가 원 위를 움직일 때, 물음에 답하여 보자.



- (1) $\triangle PAB$ 의 넓이의 최솟값을 구해 보자.
- (2) 위의 문제에 주어진 조건에서 다음 중 하나를 바꾸어 새로운 문제를 만들고, 그 문제를 풀어 보자.

점 A의 좌표, 점 B의 좌표, 원의 방정식