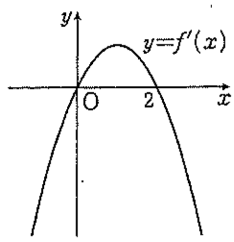
02 함수의 그래프

학습 목표
함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

준비하기
함수 $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$가 극값을 갖는 x의 값을 구하시오.

함수의 증가와 감소, 극대와 극소

생각 열기 오른쪽 그림은 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 그래프이다.



❶ $f(x)$가 증가하는 구간과 감소하는 구간을 말해 보자.

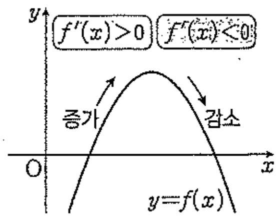
❷ $f(x)$가 극값을 갖는 x의 값을 구해 보자.

미분가능한 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 도함수 $f'(x)$의 부호를 조사하여 다음과 같이 판정할 수 있다.

함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능하고, 이 구간에 속하는 모든 x에 대하여

❶ $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

❷ $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.



문제 1 다음 함수의 증가와 감소를 조사하시오.

(1) $y=\ln x-x$　　　　(2) $y=2xe^{-x}$

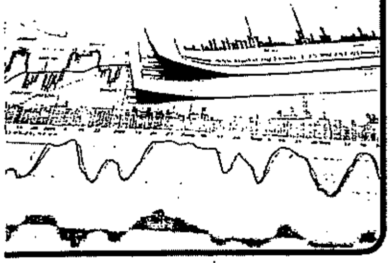
함수 $f(x)$의 극대와 극소를 도함수 $f'(x)$의 부호를 조사하여 다음과 같이 판정할 수 있다.

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고, $x=a$의 좌우에서

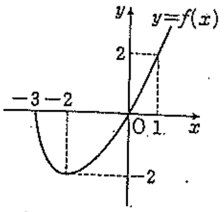
❶ $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면, $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.

❷ $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면, $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

다가서기
문명이 발전함에 따라 사회, 정치, 경제와 관련된 정보나 관계를 다루는 사회 과학에서도 다양한 수학적인 접근 방법이 필요하게 되었다.
특히, 함수의 그래프를 이용하면 어떤 현상의 특성이나 변화를 파악하는 데 편리하다.
이때 함수의 그래프의 개형은 미분을 이용하여 그릴 수 있다.



예제 1 구간 $[-3, \infty)$에서 함수 $f(x)=x\sqrt{x+3}$의 극값을 구하시오.



풀이 $f'(x)=\dfrac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}}$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$

$f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$

따라서 $f(x)$는 $x=-2$에서 극소이고 극솟값은 -2이다.

답 극솟값: -2

문제 2 다음 함수의 극값을 구하시오.

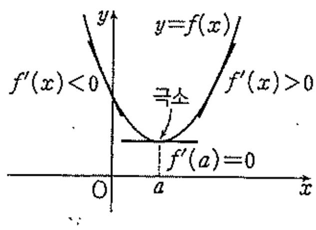
(1) $f(x)=x\ln x$ (2) $f(x)=x^2e^{-x}$

이제 다음을 통해 두 번 미분가능한 함수의 극대와 극소를 판정하는 방법에 대하여 알아보자.

함께하기 다음은 함수 $f(x)$의 이계도함수 $f''(x)$가 존재하고 $f'(a)=0$일 때, $f''(a)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 극대와 극소를 판정하는 과정이다. $\square$ 안에 음, 양, 극대, 극소 중에서 알맞은 말을 써넣어 보자.

활동 ❶ $f''(a)>0$이면, $x=a$를 포함하는 작은 열린 구간에서 $f'(x)$는 증가하고 $f'(a)=0$이므로 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 $\square$에서 $\square$으로 바뀐다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 $\square$이다.



활동 ❷ $f''(a)<0$이면, $x=a$를 포함하는 작은 열린 구간에서 $f'(x)$는 감소하고 $f'(a)=0$이므로 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 $\square$에서 $\square$으로 바뀐다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 $\square$이다.