단원 학습 정리 2. 수열의 합

2. 여러 가지 수열의 합

교과서 p.146 ~151

(1) 자연수의 거듭제곱의 합

❶ $1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$

❷ $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

❸ $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

㉮ ❶ $1+2+3+\cdots+10=\sum_{k=1}^{10} k=\frac{10(10+1)}{2}=55$

❷ $1^2+2^2+3^2+\cdots+8^2=\sum_{k=1}^{8} k^2=\frac{8(8+1)(2\times 8+1)}{6}=204$

❸ $1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=\sum_{k=1}^{5} k^3=\left\{\frac{5(5+1)}{2}\right\}^2=225$

참고>> 분수 꼴로 된 수열의 합은 $\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ (단, $A\neq B$)을 이용한다.

예 $\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{20}\right)+\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{21}\right)$

$=1-\frac{1}{21}=\frac{20}{21}$

교과서 p.146 ~151

(3) 수열의 합과 일반항의 관계

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 $\sum_{k=1}^{n} a_k$에서

❶ $n=1$일 때, $a_1 = \sum_{k=1}^{1} a_k$

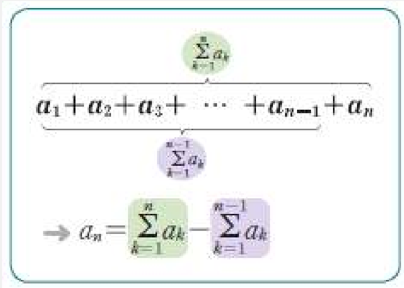
❷ $n \geq 2$일 때, $\sum_{k=1}^{n} a_k = (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}) + a_n$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n$$

이므로

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \, (n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

이다.



예 수열 $\{a_n\}$에서 $\sum_{k=1}^{n} a_k = 2n^2 + n$일 때, 일반항 a_n을 구해 보자.

❶ $n=1$일 때, $a_1 = 2 \times 1^2 + 1 = 3$

❷ $n \geq 2$일 때, $a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = (2n^2 + n) - \{2(n-1)^2 + (n-1)\} = 4n - 1$

이때 $a_1 = 3$은 $a_n = 4n - 1$에 $n = 1$을 대입한 것과 같다.

따라서 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n = 4n - 1$

참고>> 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$$\begin{cases} a_1 = S_1 \\ a_n = S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 2) \end{cases}$$