파동의 수학적 풀이

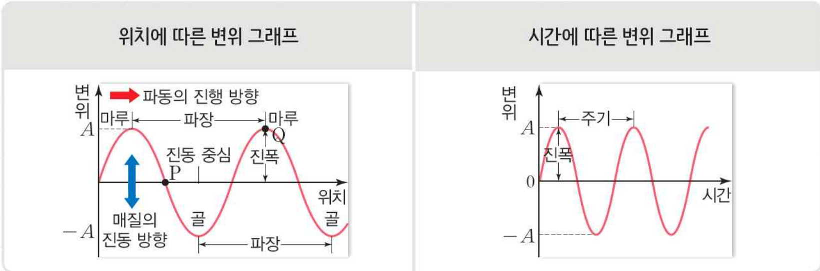
1. 파동(wave)

(1) 파동이란?

① 파동 : 물체의 진동에 의해 그 진동이 퍼져 나가는 현상 (진동 + 에너지 전달)

- 진동(vibration, oscillation) : 제자리에서 물체의 흔들림

② 파동을 나타내는 그래프



(2) 파동과 관련된 물리량

① 진폭(amplitude) : 진동의 중심에서 마루 또는 골까지의 거리

- 원래의 위치에서 가장 멀리까지 이동한 거리

② 파장(λ : wavelength) : 매질이 한 번 진동할 때 파동의 이동 거리

③ 주기(T : period) : 매질의 한 점이 한 번 진동하는 데 걸리는 시간

④ 진동수(ν or f : frequency) : 매질의 한 점이 1초 동안 진동하는 횟수

- 진동수와 주기는 역수 관계임. $\left(T=\dfrac{1}{f},\quad f=\dfrac{1}{T}\right)$

⑤ 파동의 속도 $v=\dfrac{\text{1번 진동할 때 이동거리}}{\text{1번 진동할 때 걸린시간}}=\dfrac{\lambda}{T}=\lambda f$

2. 수학적 풀이

(1) 파동 방정식

① 위치에 따른 변위 그래프에서 $y=A\sin(kx)$ [kx의 단위는 radian]의 형태임

- A : 진폭
- 1번 진동했을 때 $kx=k\lambda=2\pi \quad \Rightarrow k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$: 파수(wave number)

즉, $y=A\sin(kx)=A\sin\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}x\right)$

② 파동 함수

파동이 v의 속도로 $+x$ 방향으로 전달된다면,

- 시간 t 후에는 vt만큼을 전달 $\Rightarrow$ 파동의 식이 vt만큼 평행이동시키면 됨
- $y=f(x)$를 $+x$방향으로 x_0만큼 평행이동시키면, $y=f(x-x_0)$이므로

$y=A\sin\left[\dfrac{2\pi}{\lambda}(x-vt)\right]=A\sin\left[\dfrac{2\pi}{\lambda}x-\dfrac{2\pi v}{\lambda}t\right]$

$v=\dfrac{\lambda}{T}$에서 $\dfrac{v}{\lambda}=\dfrac{1}{T}$이고, 각속도는 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$이므로, $\dfrac{2\pi v}{\lambda}=\omega$

정리하면, $y=A\sin[kx-\omega t]$

만약 초기에 원점이 아니면, 파동함수는 $y=A\sin[kx-\omega t+\phi]$ [ϕ : 위상]

- 파수 $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$, 각속도 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$

③ 각속도와 파수

- 각속도(angular velocity) : 원운동에서 시간에 대한 각도의 변화량

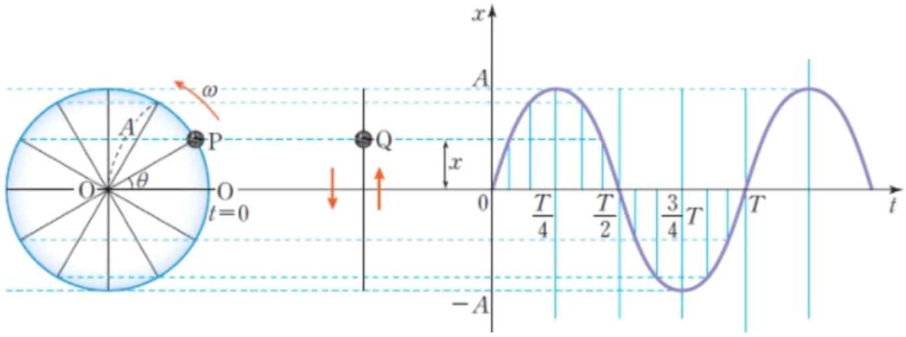
  ⇒ 단위 시간 동안 각도의 변화량

  $$각속도 = \frac{각도의\ 변화량}{시간의\ 변화량} \qquad \omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

  1바퀴 돌 때 걸린 시간은 주기(T)이고, 각도의 변화는 2π이므로

  $$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

  그림에서처럼 진동은 원운동을 1차원으로 투영시킨 것이므로 원운동의 물리량과 같음, 또한 표현방식은 삼각함수로 표현할 수 있음



[원운동] **[진동]** **[삼각함수]**

- 파수(wave number) : 단위 길이에 동안 각도의 변화량

  ⇒ 파동이 1m 진행할 때 각도가 얼마나 변했는지를 나타냄

  $$파수 = \frac{각도의\ 변화량}{거리의\ 변화량} \qquad k = \frac{\Delta\theta}{\Delta l}$$

  1번 진동할 때 이동거리가 파장(λ)이고, 각도의 변화는 2π이므로

  $$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

④ 파동 방정식 : 파동의 성질을 나타내는 방정식

- 1차원의 일반적인 파동방정식 $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$

  위의 파동함수를 대입하면 증명할 수 있음

  ※ 위의 형태의 운동방정식이 나오면 파동임

- 3차원의 파동방정식 $\nabla^2 y + \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$

(2) 파동의 간섭

진폭, 파장, 주기가 같은 두 파동 y_1, y_2의 간섭

① A, λ, T가 같다면, k, ω가 같고, 두 파동이 만났을 때 위상차만 다름

$y_1 = A\sin[kx - \omega t + \phi_1]$, $y_2 = A\sin[kx - \omega t + \phi_2]$

중첩의 원리에 의해 $y = y_1 + y_2 = A\sin[kx - \omega t + \phi_1] + A\sin[kx - \omega t + \phi_2]$

삼각함수 공식 $\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$에서,

$$y = 2A\sin\left[kx - \omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right]\cos\left[\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right]$$

파동함수의 일반식 $y = A\sin[kx - \omega t + \phi]$과 비교해 보면,

합성파의 진폭은 $2A\cos\left[\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right]$이고, 위상은 $\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}$임

② 위상차가 같을 때, 즉 $\phi_1 = \phi_2 = \phi$

진폭은 $2A\cos\left[\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right] = 2A$, 위상은 ϕ : 보강 간섭

③ 위상차가 π일 때, 즉 $\phi_1 - \phi_2 = \pi$

진폭은 $2A\cos\left[\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right] = 0$: 상쇄 간섭

(3) 경로차

① 경로차 : 두 파동이 만났을 때 파원으로부터 거리의 차이

② k, ω가 같고, 원점에서 시작한 ($\phi = 0$), 두 파동이 P점에서 만났을 때 간섭

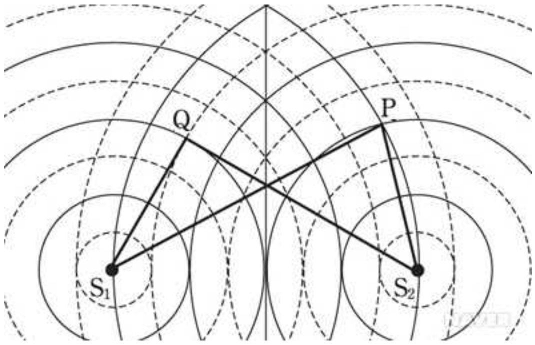
파동함수가 각각 y_1, y_2이고, $\overline{S_1P} = L_1$, $\overline{S_2P} = L_2$라면, 경로차는 $|L_1 - L_2|$

파원 S_1, S_2에서 지속적인 파동이 발생하고, 동시에 만나므로,

파동함수는 $y_1 = A\sin(kL_1)$, $y_2 = A\sin(kL_2)$

합성파 $y = y_1 + y_2 = 2A\sin\left[\frac{k(L_1 + L_2)}{2}\right]\cos\left[\frac{k(L_1 - L_2)}{2}\right]$

이때 진폭은 $2A\cos\left[\frac{k(L_1 - L_2)}{2}\right]$



③ 보강간섭 : $\cos\left[\frac{k(L_1 - L_2)}{2}\right] = \pm 1$ [※ 보강간섭은 마루~마루 또는 골~골이 만날 때임]

$\Rightarrow \frac{k(L_1 - L_2)}{2} = m\pi$ $[m = 0,\ 1,\ 2, \cdots]$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$이므로, $\frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{L_1 - L_2}{2} = m\pi$ 경로차 $L_1 - L_2 = m\lambda$ $[m = 0,\ 1,\ 2, \cdots]$

④ 상쇄간섭 : $\cos\left[\frac{k(L_1 - L_2)}{2}\right] = 0$ $\Rightarrow$ $\frac{k(L_1 - L_2)}{2} = \left(\frac{1}{2} + m\right)\pi$ $[m = 0,\ 1,\ 2, \cdots]$

$\frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{L_1 - L_2}{2} = \left(\frac{1}{2} + m\right)\pi$ 경로차 $L_1 - L_2 = \frac{\lambda}{2}(2m + 1)$ $[m = 0,\ 1,\ 2, \cdots]$

※ 경로차에 따른 간섭조건

보강간섭 : 경로차 $L_1 - L_2 = \frac{\lambda}{2} \times 2m$ $[m = 0,\ 1,\ 2, \cdots]$

상쇄간섭 : 경로차 $L_1 - L_2 = \frac{\lambda}{2} \times (2m + 1)$ $[m = 0,\ 1,\ 2, \cdots]$