페르마의 원리(Fermat's principle)

(1) 페르마의 원리

① 두 지점을 지나는 빛은 최소 시간이 걸리는 지점을 택한다.

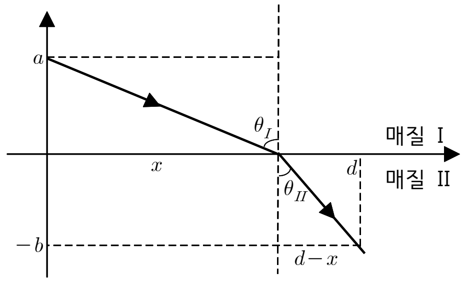
② 빛의 직진, 반사, 굴절을 설명할 수 있음

③ 굴절 : 빛이 서로 다른 매질을 지날 때 빛의 속도의 차이에 의해 꺾이는 현상

⇒ 거리는 직선이 가장 짧은 거리이지만, 속도의 차이에 의해 더 짧은 시간이 걸리는 구간이 존재할 수 있음

(2) 페르마의 원리 증명

그림에서처럼 빛은 xy좌표에서 $(0,\ a) \rightarrow (d,\ -b)$로 진행하다고 가정



속도 $= \dfrac{거리}{시간}$ ⇒ 시간 $= \dfrac{거리}{속도}$ 즉, $t = \dfrac{s}{v}$

매질 I에서 $s_I = \sqrt{a^2+x^2}$ 이므로,

$$t_I = \frac{s_I}{v_I} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_I}$$

매질 II에서 $s_{II} = \sqrt{b^2+(d-x)^2}$ 이므로,

$$t_{II} = \frac{s_{II}}{v_{II}} = \frac{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}{v_{II}}$$

전체 걸린 시간 $t = t_I + t_{II} = \dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_I} + \dfrac{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}{v_{II}}$

최소시간이 되려면, $\dfrac{dt}{dx} = 0$ ⇒ $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{x}{v_I\sqrt{a^2+x^2}} + \dfrac{-(d-x)}{v_{II}\sqrt{b^2-(d-x)^2}} = 0$

정리하면, $\dfrac{x}{v_I\sqrt{a^2+x^2}} = \dfrac{d-x}{v_{II}\sqrt{b^2-(d-x)^2}}$

그런데, $\sin\theta_I = \dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$, $\sin\theta_{II} = \dfrac{d-x}{\sqrt{b^2-(d-x)^2}}$ 이므로,

$$\frac{\sin\theta_I}{v_I} = \frac{\sin\theta_{II}}{v_{II}}$$: 스넬의 법칙

※ 반사의 법칙도 같은 방법으로 증명할 수 있음