미래를 함께 여는 부산교육

2020 대입 수시 대비

제시문 면접 지도 자료

수 리

부산광역시교육청
BUSAN METROPOLITAN CITY OFFICE OF EDUCATION

2020대입 수시 대비
수리심층면접나침반

일러두기 & 수록내용

- 대입 수리구술면접을 준비하는 수험생 및 수학교사들을 위하여 부산논술면접 지원단에서 만들고 부산광역시교육청에서 발간하는 수리구술면접 관련 책자입니다.

- 교재는 서울대 일반전형 면접 및 구술고사, 연세대 학습역량평가, 한국과학기술원(KAIST) 면접 및 구술고사에 출제된 기출 문제와 연습용 모의 문제 위주로 만들어진 책자입니다.

- 본 자료는 업무포털(http://neis.pen.go.kr) 접속화면 오른쪽 배너의
[교무 업무지원] - [과별 자료실] - [중등교육과]에서 다운로드 가능합니다.

CONTENTS

2020대입 수시 대비
수리심층면접나침반

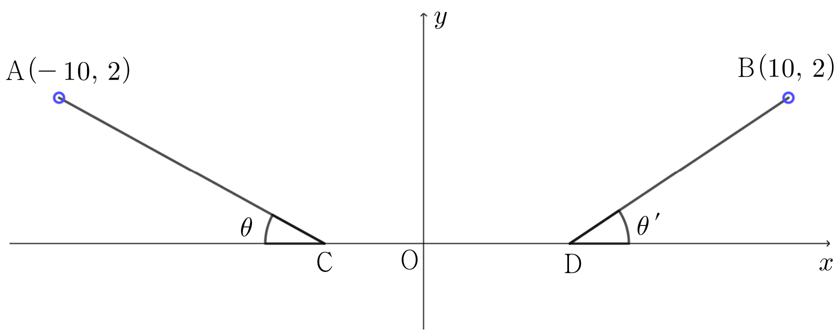
01 2019학년도 서울대 일반전형(자연)[1]

핵심개념 및 용어	답변준비시간 및 면접시간	모집단위
두 점 사이의 거리, 대칭이동, 평행이동, 도함수, 함수의 극대와 극소, 절대부등식, 부등식의 영역, 공간도형과 공간좌표, 접선의 방정식, 삼각함수의 미분, 공간도형과 공간좌표, 부등식의 영역, 삼각함수의 미분, 두 평면의 교선, 합의 법칙과 곱의 법칙, 수열의 극한값	답변준비시간: 45분 내외 면접시간: 15분 내외	수리과학부, 통계학부, 공과대학, 조경시스템공학부, 바이오시스템소재학부, 수학교육과, 자유전공학부

문제 1.

[1-1] 좌표평면 위의 두 점 A와 B의 좌표는 각각 $(-10, 2)$, $(10, 2)$이며, 점 C와 점 D는 x축 위를 움직이고 있다. $\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{CD}}+\overline{\mathrm{DB}}$가 최소가 되게 하는 점 C와 점 D의 좌표를 구하시오.

[1-2] 문제 [1-1]과 같은 상황에서, $0<k\le 1$인 상수 k에 대하여 점 A에서 출발하여 점 C와 점 D를 거쳐 점 B에 도달했을 때의 비용을 $\overline{\mathrm{AC}}+k\overline{\mathrm{CD}}+\overline{\mathrm{DB}}$라고 하자. 이때 비용이 최소가 되게 하는 점 C와 점 D는 항상 원점에 대하여 대칭임을 설명하시오.



[1-3] 문제 [1-2]와 같은 상황에서, 상수 k를 1부터 줄여나가면 비용이 최소가 되게 하는 점 C와 점 D는 처음에는 움직이지 않다가 어느 순간부터 움직이기 시작한다. 움직이기 시작했을 때의 k의 값을 구하시오.

1) 서울대학교 홈페이지

문제2. 좌표평면 위에 다음과 같은 영역 S, T가 있다.

$S=\{(x, y) \mid |y| > x^2\}$

$T=\{(x, y) \mid 0 < |y| < |x|\}$

그리고 주어진 점 (x, y)에 대하여 다음 시행 (P)와 시행 (Q)를 생각해 보자.

시행 (P) : (i) 0이 아닌 정수 m을 하나 선택한다.
(ii) (x, y)를 (x^2+2my, y)로 바꾼다.

시행 (Q) : (i) 0이 아닌 정수 n을 하나 선택한다.
(ii) (x, y)를 $(\sqrt{|x|}, y+2nx)$로 바꾼다.

[2-1] 영역 S에 속하는 점 (x, y)에 대하여 시행 (P)를 행하여 얻어지는 점은 항상 영역 T에 속하게 됨을 보이시오.

[2-2] 점 (x, y)에서 시작하여 시행 (Q)와 시행 (P)를 번갈아가면서 적용하되 반드시 첫 번째 시행은 (Q)이도록 한다. 만약 한 번 이상의 시행 이후 다시 시작점 (x, y)로 돌아올 수 있으면 점 (x, y)를 '되돌이점'이라고 부르자.

예 1: 점 $(0, 0)$은 되돌이점이다.
$(0, 0) \rightarrow (0, 0)$ ($n=1$을 선택하여 시행 (Q)를 행한다)

예 2: 점 $(1, 2)$는 되돌이점이다.
$(1, 2) \rightarrow (1, 0)$ ($n=-1$을 선택하여 시행 (Q)를 행한다)
$\rightarrow (1, 0)$ ($m=1$을 선택하여 시행 (P)를 행한다)
$\rightarrow (1, 2)$ ($n=1$을 선택하여 시행 (Q)를 행한다)

점 $(1, 0)$은 되돌이점인지 판정하고, 그 이유를 설명하시오.

문제 3.

[3-1] 좌표공간에서 xy평면 위의 영역 $S=\{(x,\,y,\,0)|0\le x\le 10,\ 0\le y\le 1\}$을 x축의 둘레로 회전시켜 얻은 입체도형을 U라 하자. 입체 U에 포함된 정사면체 중 그 한 면이 yz평면에 있는 경우, 정사면체의 한 변의 길이가 가질 수 있는 최댓값을 구하시오.

[3-2] 좌표공간에서 xy평면 위의 영역 $S=\{(x,\,y,\,0)|0\le x\le 2\pi,\ 0\le y\le 2+\cos x\}$을 x축의 둘레로 회전시켜 얻은 입체도형을 V라 하자. 입체 V에 포함된 정사면체 중 그 한 면이 yz평면에 있는 경우, 정사면체의 한 변의 길이가 가질 수 있는 최댓값을 구하시오.

문제4. 자연수 n에 대하여 좌표공간 위에 평면 $P_n : x+y+2z=2n$이 주어져 있다.

[4-1] 평면 P_n과 평면 $x-y-2z=0$이 이루는 교선을 l_1, 평면 P_n과 평면 $y-x-2z=0$이 이루는 교선을 l_2, 평면 P_n과 xz평면이 이루는 교선을 l_3, 평면 P_n과 yz평면이 이루는 교선을 l_4라 하자. 이때 4개의 교선 l_1, l_2, l_3, l_4로 이루어진 사각형의 넓이 A_n의 값을 구하시오.

[4-2] 문제 [4-1]의 상황에서 4개의 교선 l_1, l_2, l_3, l_4로 이루어진 사각형의 내부(경계 포함)에 있는 점들 중 각 좌표가 모두 정수인 점의 개수 S_n을 구하시오.

[4-3] 극한값 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{A_n}$을 구하시오.

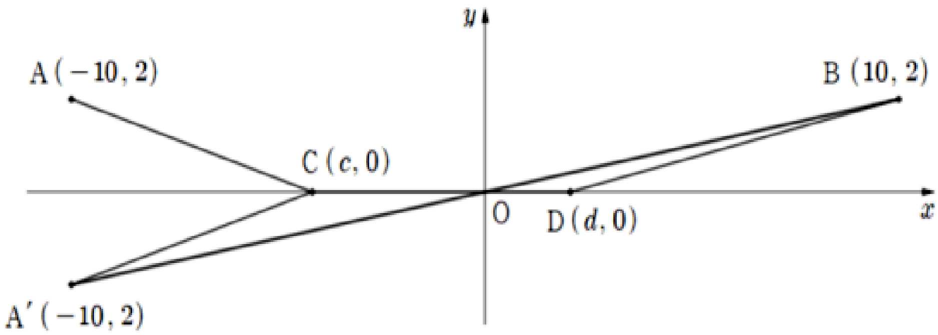
예시 답안

문제 1.

[1-1] $(-10, 2)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면

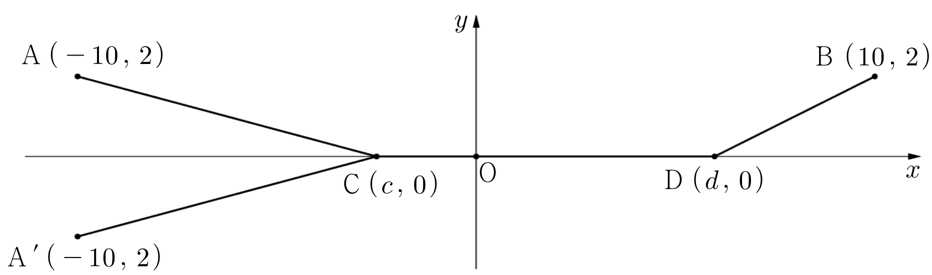
$$\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{CD}}+\overline{\mathrm{DB}}=\overline{\mathrm{A'C}}+\overline{\mathrm{CD}}+\overline{\mathrm{DB}} \le \overline{\mathrm{A'B}}$$

이다. 따라서 $\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{CD}}+\overline{\mathrm{DB}}$가 최소가 되게 하는 점 C와 점 D의 좌표는 모두 $(0, 0)$이다.

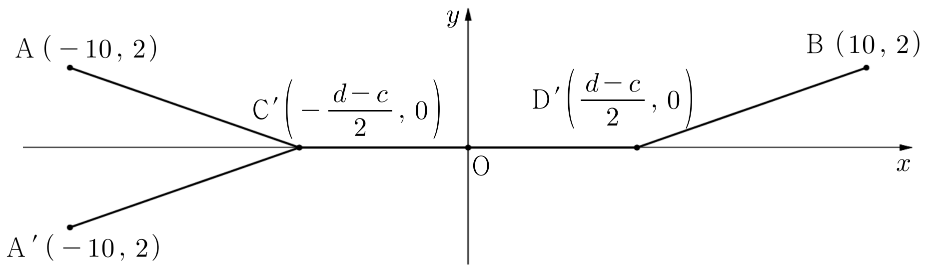


[1-2] $\mathrm{A}(-10, 2)$, $\mathrm{B}(10, 2)$, $\mathrm{C}(c, 0)$, $\mathrm{D}(d, 0)$에서 $c>d$인 경우는 고려하지 않아도 된다는 것은 분명하다. 그러므로 $c \le d$인 경우만 고려하고, 두 점 $\mathrm{C}'\left(-\frac{d-c}{2}, 0\right)$, $\mathrm{D}'\left(\frac{d-c}{2}, 0\right)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AC}}+k\overline{\mathrm{CD}}+\overline{\mathrm{DB}}$와 $\overline{\mathrm{AC'}}+k\overline{\mathrm{C'D'}}+\overline{\mathrm{D'B}}$를 비교하자.

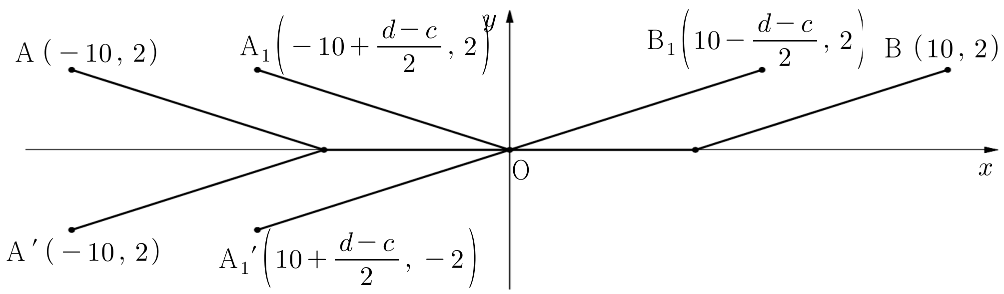
$\overline{\mathrm{CD}}=d-c=\overline{\mathrm{C'D'}}$이므로 $\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{DB}}$와 $\overline{\mathrm{AC'}}+\overline{\mathrm{D'B}}$만 비교하면 된다. 그런데 점 C와 점 D에 상관없이 $\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{DB}} \ge \overline{\mathrm{AC'}}+\overline{\mathrm{D'B}}$이다(그림들 참조). 따라서 비용 $\overline{\mathrm{AC}}+k\overline{\mathrm{CD}}+\overline{\mathrm{DB}}$를 최소가 되게 하는 점 C와 점 D는 항상 원점에 대하여 대칭이다.



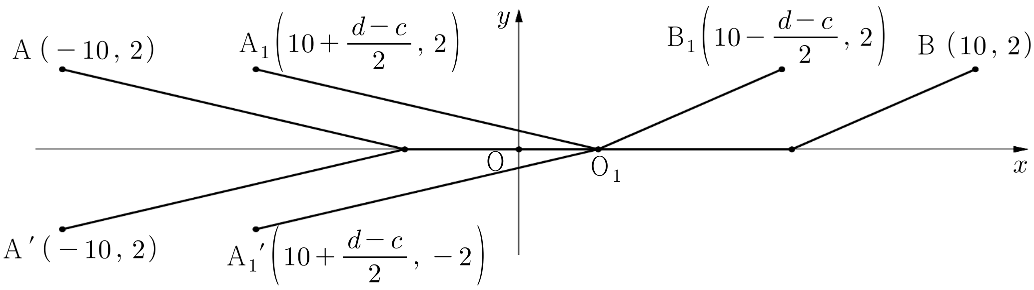
[그림 1]



[그림 2]



[그림 3]



[그림 4]

(다른 풀이)

$A(-10, 2)$, $B(10, 2)$, $C(c, 0)$, $D(d, 0)$라 하자. 비용 $\overline{AC}+k\overline{CD}+\overline{DB}$가 최소가 되기 위해서는 $c \le d$임은 자명하다.

$d-c=l$이라 할 때, 점 $A'(-10+l, -2)$에 대하여

$$\overline{AC}+k\overline{CD}+\overline{DB}=\overline{AC}+\overline{DB}+kl=\overline{A'D}+\overline{DB}+kl$$

이고, $\overline{A'D}+\overline{DB}$가 최소가 되기 위해서 점 D는 직선 $A'B$가 x축과 만나는 점이므로 두 점 A'와 B의 중점일 때이다.

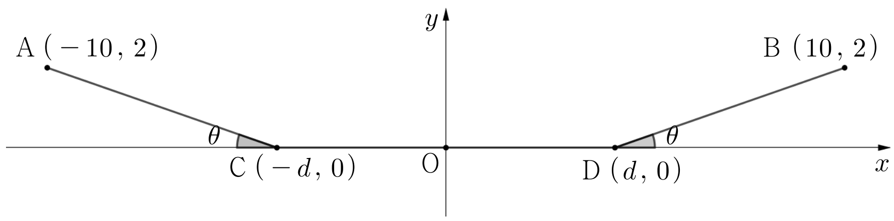
그러므로 점 D의 좌표는 $\left(\frac{l}{2}, 0\right)$이고 점 C의 좌표는 $\left(-\frac{l}{2}, 0\right)$이다. 따라서 점 C와 점 D는 항상 원점에 대하여 대칭이다.

[1-3] [1-2]에 의해서 비용 $\overline{\mathrm{AC}}+k\overline{\mathrm{CD}}+\overline{\mathrm{DB}}$를 최소가 되게 하는 점 C와 점 D는 항상 원점에 대하여 대칭이고 점 D의 x좌표 d는 $d\ge 0$이어야 한다. 직선 BD와 x축이 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$라 하자. 그러면

$$f_k(\theta)=\overline{\mathrm{AC}}+k\overline{\mathrm{CD}}+\overline{\mathrm{DB}}=2\left\{\frac{2}{\sin\theta}+k\left(10-\frac{2}{\tan\theta}\right)\right\}=4\left(\frac{1}{\sin\theta}+5k-\frac{k}{\tan\theta}\right),$$

$$f_k'(\theta)=4\left(-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}+\frac{k\sec^2\theta}{\tan^2\theta}\right)=4\left(-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}+\frac{k}{\sin^2\theta}\right)$$

이다. 여기서 $0<k\le 1$이므로 $\cos\theta_0=k\left(0\le\theta_0\le\frac{\pi}{2}\right)$인 θ_0가 존재한다. 또한, $k=1$이면 $f_k'(\theta)\ge 0$이고 $0<k<1$이면 $\theta<\theta_0$일 때 $f_k'(\theta)<0$이고 $\theta>\theta_0$일 때 $f_k'(\theta)>0$이다. 따라서 $\theta=\theta_0$일 때 $f_k(\theta)$가 최솟값을 가진다. 그런데 $d\ge 0$이어야하므로 $\cos\theta\ge\frac{10}{\sqrt{104}}=\frac{10}{2\sqrt{26}}=\frac{5\sqrt{26}}{26}$이어야 한다. 따라서 $k=\frac{5\sqrt{26}}{26}$인 순간부터 점 C와 점 D는 움직이기 시작한다.



문제2.

[2-1] 임의의 점 (x, y)가 영역 S에 속한다고 하자. 그러면 $|y|>x^2$이고, 시행 (P)를 행하면 (x^2+2my, y)로 바뀌며, 여기서 m은 0이 아닌 정수이다. 그러므로 $|y|>x^2\ge 0$이라서 $|y|>0$이다. 또한, 삼각부등식, $x^2\ge 0$, $|y|>x^2$, $|2my|=|2m||y|$, $|m|\ge 1$ 등을 이용하면, 다음과 같이

$$\begin{aligned}|x^2+2my| &\ge |2my|-|x^2|=|2my|-x^2\\ &>|2my|-|y|=(|2m|-1)|y|\\ &\ge |y|\end{aligned}$$

$|x^2+2my|>|y|$를 이끌어 낼 수 있다. 따라서 점 (x^2+2my, y)는 영역 T에 속한다.

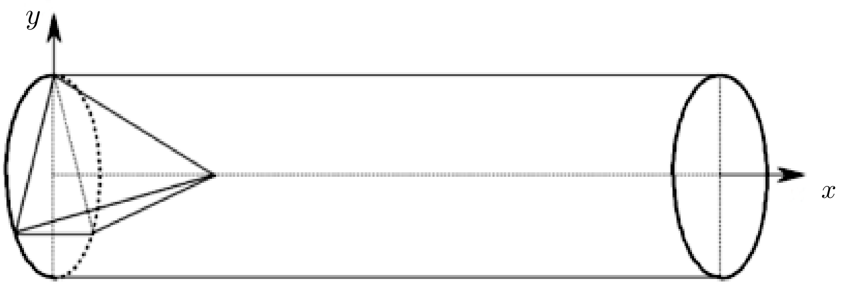
[2-2] 우선 [2-1]과 같은 방법으로, 영역 T에 속하는 점 (x, y)에 대하여 시행 (Q)를 행하여 얻어지는 점은 항상 영역 S에 속하게 됨을 보이자.
임의의 점 (x, y)가 영역 T에 속한다고 하자. 그러면 $0<|y|<|x|$이고, 시행 (Q)를 행하면 $(\sqrt{|x|},\ y+2nx)$로 바뀌며, 여기서 n은 0이 아닌 정수이다. 그러므로

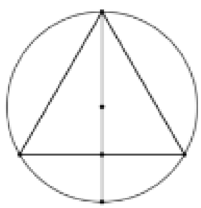
$$
\begin{aligned}
|y+2nx| &\geq |2nx| - |y| \\
&> |2nx| - |x| \\
&= (|2m|-1)|x| \\
&\geq |x| \\
&= (\sqrt{\lceil x \rceil})^2
\end{aligned}
$$

즉, $|y+2nx| > (\sqrt{\lceil x \rceil})^2$ 이다. 따라서 점 $(\sqrt{\lceil x \rceil},\ y+2nx)$는 영역 S에 속한다. 한편, 점 $(1,0)$은 시행 (Q)에 의해서 점 $(1,2n)$으로 옮겨지고, 2-1에 의해서 점 $(1,2n)$은 영역 S에 속하므로 시행 (P)를 행하여 얻어지는 점 $(1+4mn,2n)$은 영역 T에 속한다. 단, 여기서 n,m은 0이 아닌 정수이다. 다시 위의 결과에 의해서 $(1+4mn,2n)$은 시행 (Q)에 의해서 영역 S에 속하는 점으로 이동한다. 이렇게 2-1과 위의 결과를 번갈아 적용하면, 점 $(1,2n)$은 시행 (P)에 의해서 영역 T에 속하는 점으로 이동했다가 다시 시행 (Q)에 의해서 영역 S에 속하는 점으로 이동하는 것을 반복한다. 따라서 시행이 행해질 때마다 얻어지는 점은 영역 S 또는 영역 T에 속한다. 그런데, $(1,2n) \neq (1,0)$이고 점 $(1,0)$은 영역 S 와 영역 T 어디에도 속하지 않는다. 따라서 점 $(1,0)$은 되돌이점이 아니다.

문제 3.

[3-1] 입체도형 U는 반지름의 길이가 1인 원을 밑면으로 하고 높이가 10인 원기둥이다. 그러므로 한 면이 yz평면에 있으면서 입체 U에 포함된 정사면체가 최대 크기가 되기 위해서는 정사면체의 밑면이 원기둥의 밑면에 내접해야 한다. 이때 원기둥의 밑면인 원의 중심이 정사면체의 한 면인 정삼각형의 무게중심이므로 구하고자 하는 정사면체의 한 변의 길이가 $\sqrt{3}$ 이다.





[3-2] 입체 V에 포함된 정사면체 중 그 한 면이 yz평면에 있고 크기가 가장 큰 사면체를 정사면체 ABCD 라고 하자. 여기서 일반성을 잃지 않고, 정삼각형 ABC 가 yz평면에

있고 선분 AD 가 xy 평면에 있다고 할 수 있다. 그러면 입체도형 V가 영역 S를 x축의 둘레로 회전시켜 얻은 입체도형이고, 정삼각형 ABC 의 무게중심이 입체도형 V의 밑면인 원의 중심 원점 O 와 일치해야 하며, 점 D 가 정삼각형 ABC 의 각 꼭짓점에서 같은 거리에 있어야 하므로 점 D 는 x축 상에 위치해야 한다. 또한 직선 AD 는 xy 평면 상에서 $y=2+\cos x$ 와 접해야 한다. 정사면체 ABCD 의 한 변의 길이를 a, 선분 BC 의 중점을 M 이라 두면

$$\overline{\mathrm{AM}}=\frac{\sqrt{3}}{2}a,\ \overline{\mathrm{AO}}=\frac{\sqrt{3}}{3}a,\ \overline{\mathrm{DO}}=\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$$

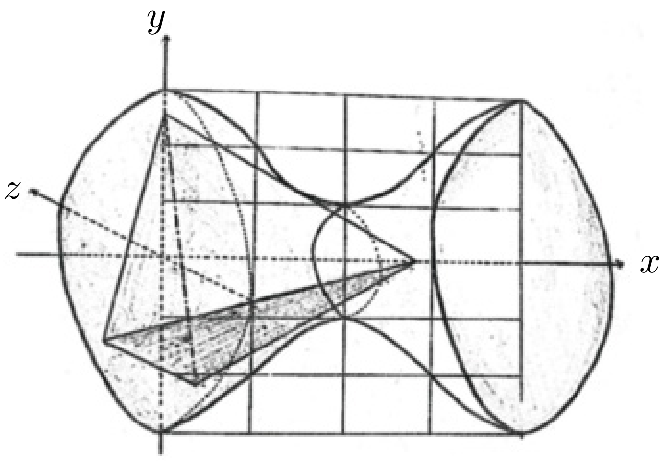
이다. 이제 xy 평면 상에서 고려하면, 직선 AD 의 기울기는 $-\frac{\overline{\mathrm{AO}}}{\overline{\mathrm{DO}}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

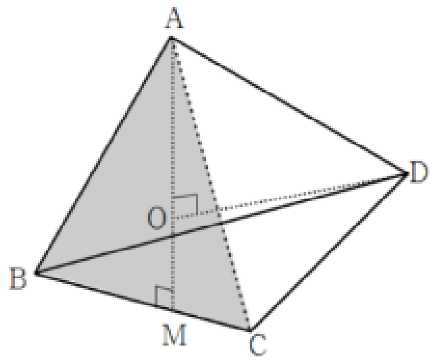
또한, 곡선 $y=2+\cos x$ 는 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 일 때 위로 볼록이고, $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ 에서 아래로 볼록이며 $y'=-\sin x$ 이다. 그러므로 직선 AD 와 곡선 $y=2+\cos x$ 의 접접은 $\left(\frac{3}{4}\pi,\ 2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 이다. 따라서 직선 AD 의 방정식은 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)+2-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이고 직선 AD 의 x절편은 $2\sqrt{2}-1+\frac{3}{4}\pi$ 이다. 그러므로 정사면체 ABCD 에서

$$2\sqrt{2}-1+\frac{3}{4}\pi=\overline{\mathrm{DO}}=\frac{\sqrt{6}}{3}a,$$

$$a=2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{3\sqrt{6}}{8}\pi$$

이다. 따라서 구하고자 하는 값은 $2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{3\sqrt{6}}{8}\pi$ 이다.

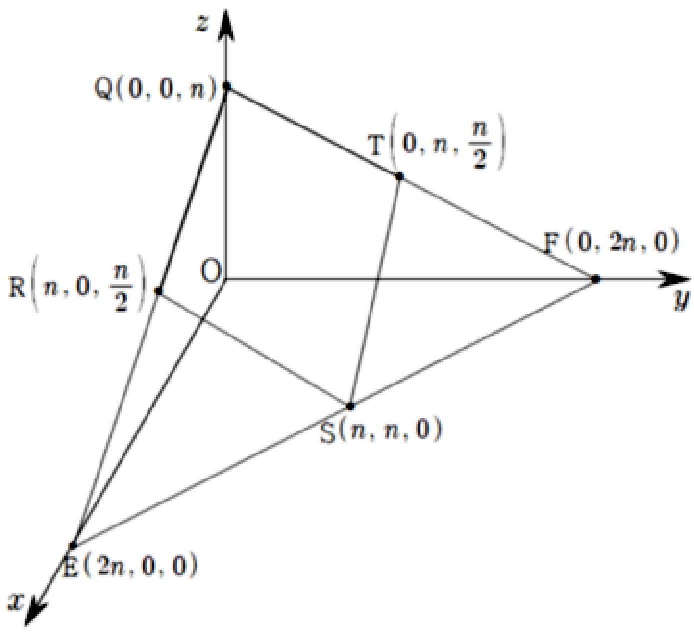




문제4.

[4-1] 평면 P_n은 세 점 $\mathrm{E}(2n,0,0)$, $\mathrm{F}(0,2n,0)$, $\mathrm{Q}(0,0,n)$을 지나는 평면이다. $P_n : x+y+2z=2n$과 평면 $x-y-2z=0$의 교선을 구하기 위해서 두 식 $x+y+2z=2n$과 $x-y-2z=0$에 $y=0$을 대입하여 연립방정식을 풀면 $x=n$, $z=\frac{n}{2}$이다. 또한, $z=0$을 대입하여 연립방정식을 풀면 $x=n$, $y=n$이다. 그러므로 교선 l_1은 두 점 $\mathrm{R}\left(n,0,\frac{n}{2}\right)$, $\mathrm{S}(n,n,0)$을 지나는 직선이다.

마찬가지 방법으로, 교선 l_2는 두 점 $\mathrm{T}\left(0,n,\frac{n}{2}\right)$, $\mathrm{S}(n,n,0)$을 지나는 직선, 교선 l_3는 두 점 $\mathrm{R}\left(n,0,\frac{n}{2}\right)$, $\mathrm{Q}(0,0,n)$을 지나는 직선, 교선 l_4는 두 점 $\mathrm{T}\left(0,n,\frac{n}{2}\right)$, $\mathrm{Q}(0,0,n)$을 지나는 직선임을 알 수 있다.

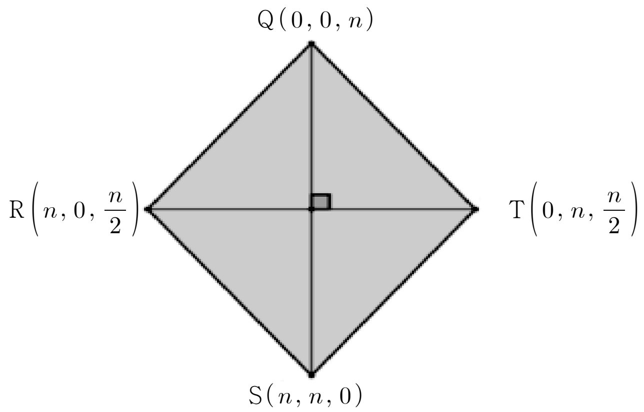


한편, $\overrightarrow{\mathrm{QS}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RT}}=(n,n,-n)\cdot(-n,n,0)=0$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{QS}}$, $\overrightarrow{\mathrm{RT}}$는 서로 수직이다. 따라서 교선 l_1, l_2, l_3, l_4로 이루어진 사각형의 넓이 A_n의 값은

$$A_n=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{QS}}||\overrightarrow{\mathrm{RT}}|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}n\cdot\sqrt{2}n=\frac{\sqrt{6}}{2}n^2$$

이다.

[4-2] 4개의 교선 l_1, l_2, l_3, l_4로 이루어진 사각형 QRST에서 선분 RT의 중점과 선분 QS의 중점이 $\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right)$으로 일치하고 $\overrightarrow{\mathrm{QS}}$, $\overrightarrow{\mathrm{RT}}$는 서로 수직이므로 사각형 QRST는 마름모이다.



이제, 각 좌표가 모두 정수인 점을 격자점이라 칭하고 짝수, 홀수의 개념을 정수로 확장하여 $2a+1$(a는 정수) 형태의 정수를 홀수, $2a$(a는 정수) 형태의 정수를 짝수라 칭하자. 그러면 $\overrightarrow{RS}=\left(0, n, -\frac{n}{2}\right)$, $\overrightarrow{RQ}=\left(-n, 0, \frac{n}{2}\right)$이고

$$\left(n, 0, \frac{n}{2}\right)+\left(0, k, -\frac{k}{2}\right)+\left(-l, 0, \frac{l}{2}\right)=\left(n-l, k, \frac{n}{2}-\frac{k}{2}+\frac{l}{2}\right)$$

이므로 사각형 QRST의 내부와 경계에 있는 격자점은

$\left(n-l, k, \frac{n}{2}-\frac{k}{2}+\frac{l}{2}\right)$ $(k=0, 1, 2, \cdots, n;\ l=0, 1, 2, \cdots, n;\ n-k+l$은 짝수$)$

의 형태이다. 따라서

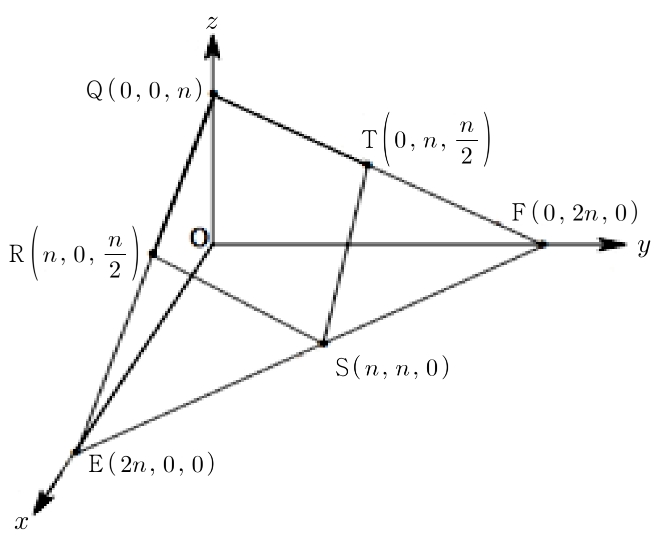
i) n이 짝수일 때

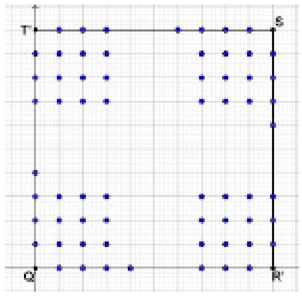
$$S_n=\left(\frac{n}{2}+1\right)^2+\left(\frac{n}{2}\right)^2=\frac{1}{2}n^2+n+1.$$

ii) n이 홀수일 때

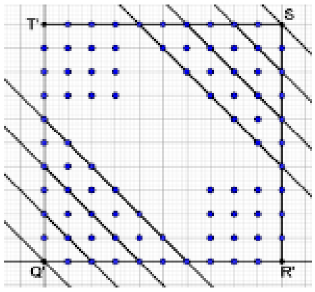
$$S_n=2\left(\frac{n+1}{2}\right)^2=\frac{(n+1)^2}{2}.$$

(다른 풀이)





4개의 교선 l_1, l_2, l_3, l_4로 이루어진 사각형 QRST의 xy평면으로 정사영 Q′R′ST′를 생각해 보자. $\mathrm{Q}'=(0,0,0)$, $\mathrm{R}'=(n,0,0)$, $\mathrm{T}'=(0,n,0)$이고, 사각형 QRST의 내부(경계 포함)에 있는 점들 중 각 좌표가 모두 정수인 점을 정사영시키면 사각형 Q′R′ST′의 내부(경계 포함)에 있으면서 각 좌표가 모두 정수인 점이 된다.



이제 사각형 QRST는 정사각형 Q′R′ST′에서 점 Q′를 n만큼, 두 점 R′, T′를 $\frac{n}{2}$만큼 z축의 양의 방향으로 평행이동 한 것과 같다. 따라서 옆의 그림과 같이 n개의 직선 위에 있는 점만 z좌표가 정수가 된다.

1) n이 홀수인 경우

$$S_n = 1+3+\cdots+n+n+\cdots+3+1$$
$$=(n+1)\times\frac{n+1}{4}\times 2$$
$$=\frac{(n+1)^2}{2}$$

2) n이 짝수인 경우

$$S_n = 1+3+\cdots+(n-1)+(n+1)+(n-1)+\cdots+3+1$$
$$=n\times\frac{n}{4}\times 2+(n+1)$$
$$=\frac{n^2}{2}+n+1$$

[4-3] 각각 [4-1]과 [4-2]에 의해서

$$A_n=\frac{\sqrt{6}}{2}n^2,\quad S_n=\begin{cases}\frac{1}{2}n^2+n+1 & (n\text{이 짝수일 때})\\ \frac{(n+1)^2}{2} & (n\text{이 홀수일 때})\end{cases}$$

이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{A_n}=\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$ 이다.

02 2020학년도 서울대 일반전형(자연) 대비 모의

핵심개념 및 용어	답변준비시간 및 면접시간	모집단위
원소, 집합의 포함관계, 집합의 연산, 삼각형의 내심, 삼각비 평면의 방정식, 확률과 극한	답변준비시간: 45분 내외 면접시간: 15분 내외	수리과학부, 통계학부, 공과대학, 조경시스템공학부, 바이오시스템소재학부, 수학교육과, 자유전공학부

문제 1.

p는 소수, n은 p의 배수라 할 때,

$N=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$,

$A=\{x \mid x \in N,\ x$는 p의 배수$\}$,

$B=\{x \mid x \in N,\ n$을 x로 나눌 때, 나머지가 p의 배수 또는 $0\}$

$C=B \cap A^c$ **라 하자. (단, A^c는 A의 여집합)**

[1-1] $A \subset B$ 임을 보이시오.

[1-2] $C \subset \left\{x \mid x \in N,\ \ x \le \dfrac{n}{p}\right\}$ 임을 보이시오.

[1-3] $p=5,\ n=95$일 때, 집합 C의 원소를 모두 구하시오.

문제 2.

좌표평면 위에 세 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$, $\mathrm{B}(-5,\ 0)$, $\mathrm{C}(5,\ 0)$가 있다. A의 y좌표 b는 양수이고, 삼각형 ABC는

(가) $\dfrac{\cos C}{\cos B}=\dfrac{\sin B}{\sin C}$ (나) $25\sin(\mathrm{B}-\mathrm{C})=7$

을 만족한다.

[2-1] 삼각형 ABC는 직각삼각형임을 보이고, $\cos\mathrm{C}$를 구하시오.

[2-2] 삼각형 ABC의 내심의 좌표를 구하시오.

[2-3] 점 A의 좌표 $(a,\ b)$를 구하시오.

문제 3.

밑면은 xy평면의 원점을 중심으로 하고 반지름이 1인 원이고 높이가 1인 직원뿔 C가 있다. 또, 두 점 $(-1,\ 0,\ 0)$과 $(0,\ 0,\ p)$를 지나고 y축에 평행한 평면 α가 원뿔 C를 자르고 있다. (단, $0 < p < 1$)

[3-1] 평면 α의 방정식을 구하시오.

[3-2] 평면 α에 의해 원뿔 C가 잘려진 단면의 넓이를 구하시오.

[3-3] 평면 α가 원뿔 C의 부피를 2등분하고 있을 때, p의 값을 구하시오.

문제 4.

A 주머니에 빨간 공 1개, 흰 공 1개, B 주머니에도 빨간 공 1개, 흰 공 1개가 들어있다. A 주머니로부터 임의로 1개의 공을 취하여 B 주머니에 넣고, 계속하여 B 주머니로부터 임의로 1개의 공을 취하여 A 주머니에 넣는다. 이와 같은 일을 1번의 시행이라 하자. A 주머니가 같은 색의 공이 되든지, 혹은 시행의 횟수가 n이 되면 시행을 종료한다고 하자. (단, n은 1보다 큰 자연수)

[4-1] k번의 시행 만에 종료될 확률 P_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$을 구하시오.

[4-2] 시행이 k번 만에 종료될 때, 그 때의 득점을 a^k라 하자. 득점의 기댓값 E_n을 구하시오. (단, a는 실수)

[4-3] $|a| \le 1$일 때, $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}_n$을 구하시오.

핵심개념 및 용어	답변준비시간 및 면접시간	모집단위
적분, 연속함수의 성질 수열의 극한 기댓값과 분산 이차곡선의 방정식	답변준비시간: 45분 내외 면접시간: 15분 내외	수리과학부, 통계학부, 공과대학, 조경시스템공학부, 바이오시스템소재학부, 수학교육과, 자유전공학부

문제 5.

[5-1] $f(x)$는 $0 \le x \le 1$에서 정의된 연속함수이고, $\int_0^1 (1-x)f(x)\,dx = 0$을 만족한다고 할 때,

$$\int_0^a f(x)\,dx = 0$$

이 되는 $a\,(0 < a < 1)$가 존재함을 보이시오.

삼차함수 $f(x) = -4x^3 + 3x^2$에 대하여,

$$f_1(x) = f(x) + \int_0^c f(t)dt, \quad f_2(x) = f(x) + \int_0^c f_1(t)dt$$ **이고**

$$f_n(x) = f(x) + \int_0^c f_{n-1}(t)\,dt \quad (n = 3,\ 4,\ \cdots)$$

로 정의된다. (단, $0 < c < 1$, c는 상수)

[5-2] 함수 $f_n(x)$를 구하시오.

[5-3] $f_n(x)$에 대하여, $0 < x < 1$에서 $f_n(x) = 0$을 만족하는 x가 오직 한 개 존재함을 보이시오.

문제 6.

함수 $f(x) = \ln x + a$ (a는 상수)에 대하여 다음 물음에 답하시오.

[6-1] k를 양의 상수라 하자. $s \geq t \geq k$를 만족하는 임의의 s, t에 대하여,
$f(s) - f(t) \leq \frac{1}{k}(s-t)$임을 보이시오.

[6-2] 방정식 $f(x) = x$가 2개의 서로 다른 해 α, β ($\alpha < \beta$)를 가질 a의 범위를 구하시오.
또, 이때 $\alpha \leq x \leq \beta$이면 $f(x) \geq x$임을 보이시오. (단, $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$)

[6-3] [6-2]의 a에 대하여, 실수 b가 $\alpha \leq b \leq \beta$를 만족할 때, 수열 $\{b_n\}$을
$b_1 = b$, $b_{n+1} = f(b_n)$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$)라 정의한다.
이때, 다음의 (1) ~ (4)가 성립함을 보이시오.

(1) $a \leq b_n \leq \beta$

(2) $b_n \leq b_{n+1}$

(3) $\beta - b_n \leq \left(\frac{1}{b}\right)^{n-1}(\beta - b)$

(4) $1 < b \leq \beta$일 때, $\lim_{n \to \infty} b_n = \beta$

문제 7.

확률변수 X가 $1,\ 2,\ \cdots,\ n$의 값을 취하고, $\mathrm{P}(X=k)=\dfrac{1}{2^k}\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$이다. (단, n은 4이상의 자연수)

[7-1] $\mathrm{P}(X=n)$을 구하고, $\mathrm{P}(X=n)<\dfrac{2}{(n-1)(n-2)}$임을 보이시오.

[7-2] $a_n=\mathrm{E}(X)$라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하시오.

[7-3] $b_n=\mathrm{V}(X)$라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$의 값을 구하시오.

문제 8. 점 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 2)$를 중심으로 하고 반지름이 2인 구면 S가 있다.

[8-1] 구면 S 위의 점 $\mathrm{N}(0,\ 0,\ 4)$를 지나 벡터 $(a,\ b,\ -1)$에 평행한 직선을 l이라 한다. 직선 l이 S와 만나는 N이외의 교점을 Q라 할 때, 직선 l과 xy평면과의 교점 R의 좌표와 점 Q의 좌표 를 구하시오.

[8-2] 구면 S와 평면 $y=1$의 교선 C 위를 점 Q가 움직일 때, 점 $\mathrm{N}(0,\ 0,\ 4)$를 지나 벡터 $(a,\ b,\ -1)$에 평행한 직선 l과 xy평면과의 교점 R의 자취를 구하시오.

[8-3] 구면 S 와 평면 $x=\sqrt{2}$의 교선 위를 움직이는 점 T에 대하여, 점 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 2)$와 T를 지나는 직선 PT와 xy 평면과의 교점 U의 자취를 구하시오.

예시 답안

문제 1. n을 x로 나눌 때의 몫을 q, 나머지를 r라 하면

$n = xq + r$ $\quad(q,\ r$은 음이 아닌 정수이고, $r < x)$

[1–1] $x \in A$ 이면 x는 p의 배수이고 n도 p의 배수이므로 r도 p의 배수 또는 0이다.

$\therefore\ x \in B$

따라서 $A \subset B$

[1–2] $n = xq + r$의 양변을 소수 p로 나누면

$$\frac{n}{p} = \frac{xq}{p} + \frac{r}{p}$$

$p > 0$이므로 $\dfrac{n}{p} \geq \dfrac{xq}{p}$

$x \in C$라 하면 $x \in B$에서 r은 p의 배수 또는 0이므로 $\dfrac{r}{p}$은 정수이다.

n은 p의 배수이므로 $\dfrac{n}{p}$도 정수이다.

따라서 $\dfrac{xq}{p}$도 정수가 된다.

또한 $x \in A^c$이므로 p의 배수가 아니다.

따라서 q가 p의 배수가 된다.

또 $xlen$이므로 $q \geq 1$ $\qquad \therefore\ \dfrac{q}{p} \geq 1$

즉 $\dfrac{n}{p} \geq \dfrac{q}{p}x \geq x$

$\therefore\ \ x \in \left\{x \mid x \in N,\ x \leq \dfrac{n}{p}\right\}$ 즉 $C \subset \left\{x \mid x \in N,\ x \leq \dfrac{n}{p}\right\}$

[1–3] $\dfrac{n}{p} = \dfrac{95}{5} = 19$이므로 [1–2]에서

$C \subset \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 19\}$

$x \in C$이면 $x \in A^c$이므로 p의 배수 (즉, 5의 배수)는 제외된다.

$95 = xq + r$에 있어서 $x \in B$이므로

$r = 0,\ 5,\ 10,\ 15$ 중 어느 것이 된다. $(x \leq 19$ 이므로 $r < 19)$

$r = 0$일 때 95의 약수로 $x = 1,\ 19$

$r = 5$일 때 $x \geq 6$인 90의 약수로 $x = 6,\ 9,\ 18$

$r = 10$일 때 $x \geq 11$인 85의 약수로 $x = 17$

$r = 15$일 때 $x \geq 16$인 80의 약수로 $x = 16$

$\therefore\ 1,\ 6,\ 9,\ 16,\ 17,\ 18,\ 19$

문제 2.

[2-1] ㈎에서 $\cos C\sin C = \sin B\cos B$, $\sin 2C - \sin 2B = 0$

$\therefore\ \cos(B+C)\sin(B-C) = 0$

㈏에서 $\sin(B-C) \neq 0$이므로 $\cos(B+C) = 0$

$0 < B+C < \pi$이므로 $B+C = \dfrac{\pi}{2}$ ……… ①

따라서 $A = \pi - (B+C) = \dfrac{\pi}{2}$

즉, $\triangle ABC$는 $\angle A$가 직각인 직각삼각형이다.

또 ㈏에서 $\sin(B-C) = \dfrac{7}{25}$

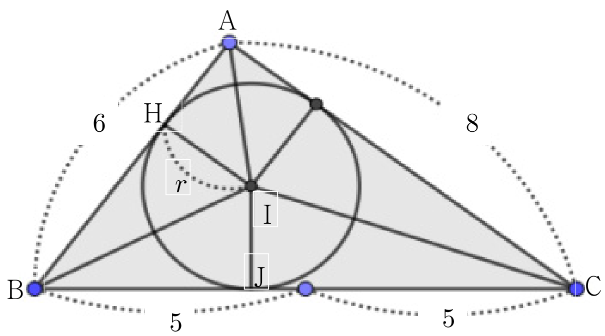
①에서 $B = \dfrac{\pi}{2} - C$ 이므로

$\sin(B-C) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 2C\right) = \dfrac{7}{25}$, $\quad\therefore\ \cos 2C = \dfrac{7}{25}$

$2\cos^2 C - 1 = \dfrac{7}{25}$ $\quad\therefore\ \cos^2 C = \dfrac{16}{25}$

①에서 $0 < C < \dfrac{\pi}{2}$이므로 $\cos C = \dfrac{4}{5}$

[2-2]



$B(-5,\ 0)$, $C(-5,\ 0)$에서 $\overline{BC} = 10$,

$\cos C = \dfrac{4}{5}$이므로 $\overline{AC} = 8$, $\overline{AB} = 6$

$\triangle ABC$의 넓이를 S, 내접원의 반지름을 r이라 하면

$S = \dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 8 = \dfrac{1}{2}r(6+8+10)$ $\quad\therefore\ r = 2$

I가 내심이므로 $\angle HAI = \dfrac{\pi}{4}$

$\therefore\ \triangle AHI$는 직각이등변삼각형

$\overline{AH} = \overline{HI} = 2$, $\quad\therefore\ \overline{BH} = 4$

따라서 $\overline{BJ} = \overline{BH} = 4$, $\overline{IJ} = r = 2$이므로 $J(-1,\ 0)$

$\therefore\ I(-1,\ 2)$

[2-3] $\triangle ABC$는 $\angle A$가 직각인 직각삼각형이고 $\cos C = \frac{4}{5}$이므로

$\cos B = \cos\left(\frac{\pi}{2} - C\right) = \sin C = \frac{3}{5}$

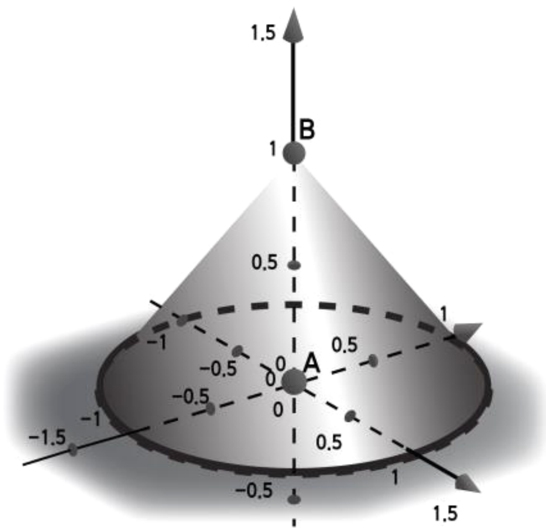
따라서 점 A의 x좌표는 $-5 + 6\cos B = -5 + 6\cdot\frac{3}{5} = -\frac{7}{5}$

점 A의 y좌표는 $0 + 6\sin B = 6\cdot\frac{4}{5} = \frac{24}{5}$

$\therefore\ A\left(-\frac{7}{5},\ \frac{24}{5}\right)$

문제 3.

[3-1]



평면 α는 y축에 평행하므로 평면 α의 법선벡터는 $(a,\ 0,\ c)$이다.

또 평면 α는 점 $A(-1,\ 0,\ 0)$을 지나므로

평면방정식은

$a(x+1) + cz = 0$

또 평면 α는 점 $(0,\ 0,\ p)$를 지나므로

$a(0+1) + cp = 0$

$\therefore\ a = -cp$ 즉, $px - z + p = 0$

[3-2] 평면 α와 원주 C의 교선의 방정식은 연립방정식

$x^2 + y^2 = (1-z)^2,\ px - z + p = 0$로 표시된다.

이것의 xy평면 위로의 정사영은 위의 두 방정식에서

$z = px + p,\ x^2 + y^2 = \{1 - (px + p)\}^2$

$\therefore\ (1+p)^2\left(x + \frac{p}{1+p}\right)^2 + \frac{1+p}{1-p}y^2 = 1,\quad (1+p)^2 > 0,\ \frac{1+p}{1-p} > 0$

이 타원의 장축, 단축의 길이는 각각 $\dfrac{2}{1+p}$, $2\sqrt{\dfrac{1-p}{1+p}}$ 이므로 넓이는 S는

$$S=\frac{\pi}{1+p}\sqrt{\frac{1-p}{1+p}}$$

한편 xy평면과 평면 α가 이루는 각을 θ $\left(0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하자.

xy평면의 법선벡터 $(0,\ 0,\ 1)$와 평면 α의 법선벡터 $(p,\ 0,\ -1)$이 이루는

각 ϕ $(0\le\phi\le\pi)$에 대하여 $\cos\phi=-\dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}}<0$ 에서 $\theta=\pi-\phi$

즉 $\cos\theta=\cos(\pi-\phi)=-\cos\phi=\dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}}$

따라서 구하는 타원의 넓이를 S'라 하면 $S=S'\cos\theta$에서

$$\frac{\pi}{1+p}\sqrt{\frac{1-p}{1+p}}=S'\cdot\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\qquad\therefore\ S'=\frac{\pi\sqrt{1-p^4}}{(1+p)^2}$$

[3-3] 원주 C가 평면 α에 의하여 두 부분으로 나누어질 때 원주의 꼭짓점을 갖는 부분의 입체를 D라 하자.

입체 D의 부피 V는

$$V=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$$

한편 입체 높이 h는 정점 $(0,\ 0,\ 1)$에서 평면 α까지의 거리이므로 $h=\dfrac{1-p}{\sqrt{p^2+1}}$

따라서 입체 D의 부피 V는

$$V=\frac{1}{3}S'\cdot h=\frac{1}{3}\frac{\pi\sqrt{1-p^4}}{(1+p)^2}\cdot\frac{1-p}{\sqrt{p^2+1}}=\frac{\pi}{3}\left(\frac{1-p}{1+p}\right)^{\frac{3}{2}}$$

즉 $\dfrac{\pi}{3}\left(\dfrac{1-p}{1+p}\right)^{\frac{3}{2}}=\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{1-p}{1+p}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$ $\qquad\therefore\ p=\dfrac{\sqrt[3]{4}-1}{\sqrt[3]{4}+1}$

문제 4.

[4-1]

i) $1\le k\le n-1$일 때

p_k는 k번째에 A 주머니의 공의 색이 같아질 확률이므로 첫 번째부터 $k-1$번째까지는 A 주머니로부터 뽑은 공과 같은 색의 공을 B 주머니에서 뽑아야 한다.

두 주머니로부터 같은 색의 공을 뽑을 확률은 $1\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}$ 이다.

$$\therefore\ p_k=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$$

ii) $k=n$일 때

$n-1$번째까지는 두 주머니에서 같은 색의 공을 뽑으면 n번째에는 끝나게 되므로

$$p_k=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$p_k=\begin{cases}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} & (1\le k\le n-1)\\ \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} & (k=n)\end{cases}$$

[4-2] $\mathrm{E}_n=\sum_{k=1}^{n}a^kp_k=\sum_{k=1}^{n-1}a^k\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}+a^n\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\frac{a}{3}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2a}{3}\right)^{k-1}+a^n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

i) $\frac{2a}{3}\neq 1$ 즉, $a\neq\frac{3}{2}$일 때

$$\mathrm{E}_n=\frac{a}{3}\left\{\frac{1-\left(\frac{2a}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{2}{3}a}\right\}+a^n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\frac{a}{3-2a}\left\{1-\left(\frac{2a}{3}\right)^{n-1}+(3-2a)\left(\frac{2a}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

$$\therefore\quad \mathrm{E}_n=\frac{a}{3-2a}\left\{1-\left(\frac{2a}{3}\right)^{n-1}+(3-2a)\left(\frac{2a}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

ii) $\frac{2a}{3}=1$ 즉, $a=\frac{3}{2}$일 때

$$\mathrm{E}_n=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}(n-1)+\left(\frac{3}{2}\right)^n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\frac{n-1}{2}+\frac{3}{2}=\frac{n+2}{2}$$

[4-3] $|a|\le 1$이므로 $a\neq\frac{3}{2}$이고 $\left|\frac{2a}{3}\right|\le\frac{2}{3}<1\quad\therefore\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2a}{3}\right)^{n-1}=0$

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{3-2a}\left\{1+2(1-a)\left(\frac{2a}{3}\right)^{n-1}\right\}=\frac{a}{3-2a}$$

문제 5.

[5-1] $S(x)=\int_0^x f(t)\,dt\ \ (0\le x\le 1)$로 놓으면

$S'(x)=f(x),\ S(0)=0$

$$\begin{aligned}\therefore\ \int_0^1(1-x)f(x)\,dx&=\int_0^1(1-x)S'(x)\,dx\\&=\left[(1-x)S(x)\right]_0^1+\int_0^1 S(x)\,dx\\&=-S(0)+\int_0^1 S(x)\,dx=\int_0^1 S(x)\,dx\end{aligned}$$

문제의 조건에서 $\int_0^1(1-x)f(x)\,dx=0$이므로

$$\int_0^1 S(x)\,dx=0\quad\cdots\cdots\cdots\quad(1)$$

$0<x<1$에서 항상 $S(x)>0$이거나 항상 $S(x)<0$이면

$\int_0^1 S(x)\,dx > 0$ 또는 $\int_0^1 S(x)\,dx < 0$이 되어 (1)에 모순이다.

$\therefore\ S(a) = 0\ \ (0 < a < 1)$이 되는 a가 존재해야 한다.

즉, $\int_0^a f(t)\,dt = 0$이 되는 a가 $0 < a < 1$의 범위에서 적어도 하나 존재한다.

[5-2] $\int_0^c f_{n-1}(t)\,dt = g_n(c)\ \ (n = 2,\ 3,\ \cdots)$라 하자.

$f_n(x) = f(x) + g_n(c)$이므로

$$g_{n+1}(c) = \int_0^c f_n(t)\,dt = \int_0^c (f(t) + g_n(c))\,dt$$

$$= \left[-t^4 + t^3 + g_n(c)\cdot t\right]_0^c$$

$$= -c^4 + c^3 + g_n(c)\cdot c$$

$\therefore\ g_{n+1}(c) - c^3 = c\cdot(g_n(c) - c^3)$

$\therefore\ g_n(c) - c^3 = (g_2(c) - c^3)\cdot c^{n-2}$

그런데, $g_2(c) = \int_0^c f_1(t)\,dt = \int_0^c \left(f(t) + \int_0^c f(t)\,dt\right) dt$

$$= \int_0^c (-4t^3 + 3t^2 - c^4 + c^3)\ dt$$

$$= -c^4 + c^3 - c^5 + c^4 \ = c^3(1 - c^2)$$

이므로 $g_n(c) - c^3 = -c^5\cdot c^{n-2}$

$\therefore\ g_n(c) = c^3(1 - c^n)\ \ (n = 2,\ 3,\ \cdots)$

$\therefore\ f_n(x) = f(x) + g_n(c) = -4x^3 + 3x^2 + c^3(1 - c^n)\ \ (n = 2,\ 3,\ \cdots)$

이것은 $n = 1$일 때에도 성립한다.

$\therefore\ f_n(x) = -4x^3 + 3x^2 + c^3(1 - c^n)$

[5-3] $f_n{}'(x) = -12x^2 + 6x = -12x\left(x - \frac{1}{2}\right)$

극솟값 $f_n(0) = c^3(1 - c^n) > 0\ \ (\because\ 0 < c < 1)$이므로 그래프의 개형에서

$f_n(x) = 0$은 오직 한 개의 실근을 가진다.

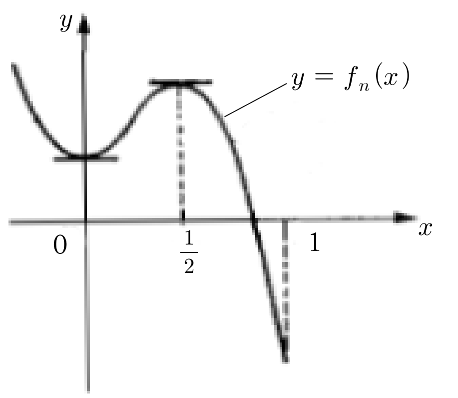
$f_n(0) = c^3(1 - c^n) > 0$

$f_n(1) = c^3(1 - c^n) - 1 < 0$

따라서 중간값의 정리에 의해

$f_n(x) = 0,\quad 0 < x < 1$

을 만족하는 x가 오직 한 개 존재한다.



문제 6.

[6-1] $f'(x) = \dfrac{1}{x}$이므로

$s \neq t$일 때 평균값의 정리에서 $s > p > t$가 되는 p가 존재하여

$$\frac{f(s)-f(t)}{s-t} = \frac{1}{p}$$

$p > t \geq k > 0$로부터 $\dfrac{1}{p} < \dfrac{1}{k}$ $\quad\therefore\ \dfrac{f(s)-f(t)}{s-t} < \dfrac{1}{k}$

$s-t > 0$에서 $f(s)-f(t) < \dfrac{1}{k}(s-t)$

$s = t$일 때 등호가 성립한다.

따라서, $f(s)-f(t) \leq \dfrac{1}{k}(s-t)$

[6-2] $x = \ln x + a$, $x - \ln x = a$에서 $g(x) = x - \ln x$로 놓으면

$g'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ $\quad\therefore\ g'(x) = 0$이면 $x = 1$

$\displaystyle\lim_{x\to 0+} g(x) = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

따라서, $g(x)$는 $x = 1$에서 극소(최소)이고 최솟값 1을 갖는다.

$\therefore\ a > 1$

또한, $\alpha \leq x \leq \beta$일 때 $g(x) \leq a$ $\quad\therefore\ x - \ln x \leq a$

$\ln x + a \geq x$ 즉 $f(x) \geq x$

[6-3]

(1) i) $n = 1$일 때, $a \leq b_1 = b < \beta$로 성립한다.

ii) $\alpha \leq b_i \leq \beta(1 \leq i \leq k)$가 성립한다고 가정하면

$\alpha = f(\alpha) = \ln\alpha + a$를 이용하여

$b_{k+1} - \alpha = f(b_k) - \alpha = \ln b_k + a - (\ln\alpha + a) = \ln b_k - \ln\alpha$

$\alpha \leq b_k$로부터 $\ln\alpha \leq \ln b_k$ $\quad\therefore\ b_{k+1} - \alpha \geq 0$ ……… (1)

$\beta - b_{k+1} = f(\beta) - f(b_k) = \ln\beta + a - (\ln b_k + a) = \ln\beta - \ln b_k \geq 0$ ……… (2)

(1), (2)에서 $\alpha \leq b_{k+1} \leq \beta$

i), ii)에 의해서, 임의의 자연수 n에 대하여 $\alpha \leq b_k \leq \beta$

(2) (1)과 [6-2]로부터 $b_n \leq f(b_n) = b_{n+1}$

(3) $f(\beta) = \beta$, $f(b_{n-1}) = b_n$

또한 (1), (2)에서 $\beta \geq \cdots \geq b_k \geq b_{k-1} \geq \cdots \geq b$가 되므로 [6-1]에 의해서

$$\beta - b_n \leq \frac{1}{b}(\beta - b_{n-1}) \leq \cdots \leq \left(\frac{1}{b}\right)^{n-1}(\beta - b)$$

(4) $1 < b \le \beta$일 때 (3)에서

$$0 \le \lim_{n\to\infty}(\beta - b_n) \le \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b}\right)^{n-1}(\beta - b) = 0 \qquad \therefore \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$$

문제 7.

[7-1] $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^k} + \mathrm{P}(X=n) = 1$이므로 $\displaystyle\mathrm{P}(X=n) = 1 - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^k} = 1 - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = \frac{1}{2^{n-1}}$

또한, $n \ge 4$로부터

$$2^{n-1} = (1+1)^{n-1} = {}_{n-1}C_0 + {}_{n-1}C_1 + {}_{n-1}C_2 + \cdots + {}_{n-1}C_{n-1}$$

$$= 1 + (n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \cdots\cdots + 1 > \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{2}{(n-1)(n-2)} \quad \text{즉 } \mathrm{P}(X=n) < \frac{2}{(n-1)(n-2)}$$

[7-2] $\displaystyle a_n = \mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^k} + \frac{n}{2^{n-1}}$ …… (1) 이고 (1)의 양변에 $\frac{1}{2}$을 곱하면

$$\frac{1}{2}a_n = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^{k+1}} + \frac{n}{2^n} \quad \cdots\cdots \ (2)$$

(1)−(2)에서 $\displaystyle\frac{1}{2}a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} \qquad \therefore a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left\{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} = 2$$

[7-3] $\displaystyle\mathrm{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^2}{2^k} + \frac{n^2}{2^{n-1}}$ 양변에 $\frac{1}{2}$을 곱하고 변끼리 빼면

$\displaystyle\frac{1}{2}\mathrm{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}$이 되고 다시 양변에 $\frac{1}{2}$을 곱하고 변끼리 빼면

$$\frac{1}{4}\mathrm{E}(X^2) = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2} - \frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$\therefore \mathrm{E}(X^2) = 4\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}}\right) = 6 - \frac{1}{2^{n-3}} - \frac{2n-1}{2^{n-1}}$$

[7-1]의 부등식에 의하여

$$0 < \frac{2n-1}{2^{n-1}} < \frac{2(2n-1)}{(n-1)(n-2)}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2(2n-1)}{(n-1)(n-2)} = 0$이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2^{n-1}} = 0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\mathrm{E}(X^2) = \lim_{n\to\infty}\left(6 - \frac{1}{2^{n-3}} - \frac{2n-1}{2^{n-1}}\right) = 6$$

또한 [7-2] 에서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\mathrm{E}(X) = 2$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left[\mathrm{E}(X^2) - \{\mathrm{E}(X)\}^2\right] = 6 - 2^2 = 2$$

문제 8.

[8-1] 직선 l은 점 $\mathrm{N}(0,\ 0,\ 4)$를 지나 벡터 $(a,\ b,\ -1)$에 평행이므로

i) $ab \neq 0$일 때 $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z-4}{-1}$

ii) $a=0,\ b\neq 0$일 때 $x=0,\ \dfrac{y}{b} = \dfrac{z-4}{-1}$

iii) $a\neq 0,\ b=0$일 때 $\dfrac{x}{a} = \dfrac{z-4}{-1},\ y=0$

또 $\mathrm{Q}(x,\ y,\ z)$라고 하면

$(x,\ y,\ z) = (0,\ 0,\ 4) + t(a,\ b,\ -1) = (at,\ bt,\ -t+4)$

이고 구면 $S: x^2+y^2+(z-2)^2 = 4$ …… (1) 위에 존재하므로

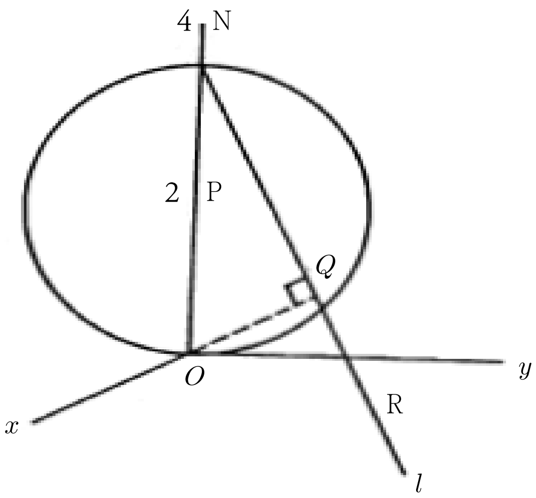
$a^2t^2 + b^2t^2 + (2-t)^2 = 4$

$\therefore\ t\{(a^2+b^2+1)t - 4\} = 0$ …… (2)

여기서 점 Q는 점 N이외의 점이므로 $t \neq 0$

$\therefore\ t = \dfrac{4}{a^2+b^2+1}$

$\therefore\ \mathrm{Q}\left(\dfrac{4a}{a^2+b^2+1},\ \dfrac{4b}{a^2+b^2+1},\ \dfrac{4(a^2+b^2)}{a^2+b^2+1}\right)$



또, 점 R은 i), ii), iii)에서 $z=0$로 하면, 어떤 경우에도 $x=4a,\ y=4b$이므로

$\mathrm{R}(4a,\ 4b,\ 0)$

이 된다.

[8-2] 점 Q가 C 위를 움직일 때

$y=1$에서

$$\frac{4b}{a^2+b^2+1}=1$$

$\therefore\ a^2+(b-2)^2=3$

$\therefore\ (4a)^2+(4b-8)^2=48$

그러므로 $\mathrm{R}(x,\ y,\ z)=(4a,\ 4b,\ 0)$이 그리는 곡선의 방정식은

원 : $x^2+(y-8)^2=48,\quad z=0$이 된다.

[8-3] (1) 식에서 $x=\sqrt{2}$로 두면

$y^2+(z-2)^2=2\quad \cdots\cdots$ (3)

따라서 구면 S와 평면 $x=\sqrt{2}$의 교선상의 움직이는 점 $\mathrm{T}(\sqrt{2},\ y,\ z)$에 대하여 (3)이 성립한다.

$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{PT}}=(\sqrt{2},\ y,\ z-2)$

가 되므로 직선 PT 상의 점 $\mathrm{U}'(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{OU}'}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{PT}}$에서

$(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=(0,\ 0,\ 2)+t(\sqrt{2},\ y,\ z-2)$

$\therefore\ \alpha=\sqrt{2}t,\ \beta=ty,\ \gamma=2+t(z-2)$

점 U는 직선 PT와 xy평면과의 교점이므로 U'에 있어서 $\gamma=0$으로서

$\sqrt{2}t=\alpha,\ ty=\beta,\ t(z-2)=-2\quad \cdots\cdots$ (4)

(4)가 $t(z-2)=-2$에서 $t\neq 0$

따라서 $\sqrt{2}t=\alpha$에서 $\alpha\neq 0$

(4)가 다른 두 식에 $t=\dfrac{\alpha}{\sqrt{2}}$를 대입하고 t를 소거하면

$\dfrac{\alpha}{\sqrt{2}}y=\beta,\ \dfrac{\alpha(z-2)}{\sqrt{2}}=-2\quad \cdots\cdots$ (5)

(3), (5)에서 $y,\ z$를 소거하면

$$\left(\frac{\sqrt{2}\beta}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{-2\sqrt{2}}{\alpha}\right)^2=2$$

$\therefore\ \alpha^2-\beta^2=4$

그러므로, 점 U가 그리는 곡선의 방정식은 $x^2-y^2=4,\ z=0$ 이다.

03 2019학년도 서울대 일반전형(인문)[2]

핵심개념 및 용어	답변준비시간 및 면접시간	모집단위
도형의 방정식, 부등식의 영역, 도함수, 접선의 방정식, 경우의 수, 확률, 등비수열의 합, 확률의 덧셈정리, 여사건, 평면좌표의 내분점, 원의 방정식, 함수, 함수의 합성, 등비수열, 등비수열의 합	답변준비시간: 30분 내외 면접시간: 15분 내외	경제학부, 경영대학, 농경제사회학부, 소비자아동학부, 의류학과, 자유전공학부

문제 1.

[1-1] 좌표평면 위의 영역

$$\left\{(x,\, y) \mid -2 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \sqrt{3}\,(|x|-1)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

에 속하고 한 변이 x축 위에 있는 정삼각형이 가질 수 있는 한 변의 길이의 최댓값을 구하시오.

문제 2. 수직선 위의 원점에 있는 점 A에 대하여 다음과 같이 시행을 반복한다.

> n번째 시행에서, 점 A는 현재 위치에 그대로 있거나, 양의 방향으로 $1+\left(\frac{1}{3}\right)^n$만큼 움직이거나, 음의 방향으로 $1+\left(\frac{1}{3}\right)^n$만큼 움직인다. 이때, 각 경우가 일어날 확률은 $\frac{1}{3}$로 모두 같다. (단, $n \ge 1$)

[2-1] 3번째 시행을 한 후에 점 A가 정수에 놓일 확률을 구하시오.

[2-2] 100번째 시행을 한 후에 점 A가 원점에 있을 확률을 구하시오.

[2-4] 좌표평면 위의 원점에 있는 점 B에 대하여 다음과 같이 시행을 반복한다.

> n번째 시행에서, 점 B는 현재 위치에 그대로 있거나, 동서남북 중 한 방향으로 $1+\left(\frac{1}{3}\right)^n$만큼 움직인다. 이때 각 경우가 일어날 확률은 $\frac{1}{5}$로 모두 같다. (단, $n \ge 1$)

100번째 시행을 한 후에 점 B가 제1사분면 위에 있을 확률을 구하시오.

---

2) 서울대학교 홈페이지

문제 3.

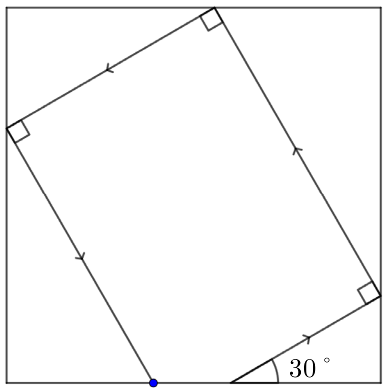
[3-1] 좌표평면에서 중심이 점 $(-3,0)$이고 반지름의 길이가 1인 원 C_1 위에서 움직이는 점 A와 좌표평면위의 고정된 점 $\mathrm{B}(b_1, b_2)$가 있을 때, 두 점 A와 B의 중점 $\mathrm{P}(x, y)$가 그리는 도형의 방정식을 구하시오.

[3-2] 좌표평면에서 두 원 C_1과 C_2는 각각 중심이 점 $(-3,0)$, 점 $(3,0)$이고 반지름의 길이가 모두 1이라고 하자. 원 C_1 위의 점 A와 원 C_2 위의 점 B가 각각 점 $(-3,1)$, $(3,1)$에 위치해 있다. 이제 두 점 A와 B가 각각 원 C_1과 원 C_2 위를 같은 빠르기로 시계방향으로 움직일 때, 점 A와 점 B의 중점 $\mathrm{P}(x, y)$가 그리는 도형의 방정식을 구하시오.

[3-3] 문제 3-2 에서와 같은 원 C_1 위의 각 점 S와 원 C_2 위의 각 T점의 중점 $\mathrm{P}(x, y)$가 그리는 도형의 넓이를 구하시오.

문제 4. 로봇청소기가 좌표평면 위의 정사각형 $\{(x, y) | 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ 모양의 방 내부를 청소하고 있다. 이 청소기는 경계를 만나기 전에는 직선으로 이동하고, 경계를 만나는 순간 정사각형 내부를 향하도록 90° 회전한 후 다시 직선을 따라 이동한다. (단, 로봇청소기는 점으로 간주한다.)

[4-1] $0<x<1$인 실수 x에 대하여 점 $(x, 0)$에서 오른쪽 위 30° 방향으로 출발한 로봇청소기가 x축으로 처음 돌아온 점을 $(f(x), 0)$으로 정의하자. 이때, 함수 f를 구하시오.



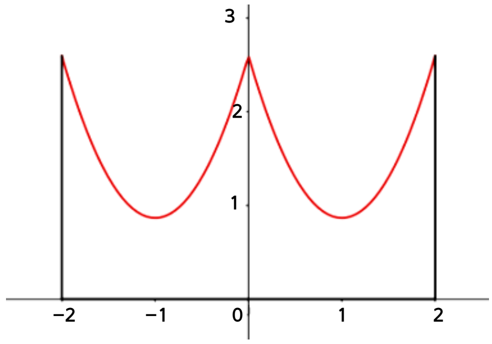
[4-2] 문제 4-1에서 구한 함수 f에 대하여, $(f \circ f \circ f)(x) = x$를 만족하는 실수 x를 모두 구하시오.

[4-3] 구간 $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$에서 함수 f의 최솟값과 최댓값을 각각 a_1, b_1이라고 하자. 마찬가지로 n이 자연수일 때 구간 $[a_n, b_n]$에서 함수 f의 최솟값과 최댓값을 각각 a_{n+1}, b_{n+1}이라고 하자. 이때 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n)$의 값을 구하시오.

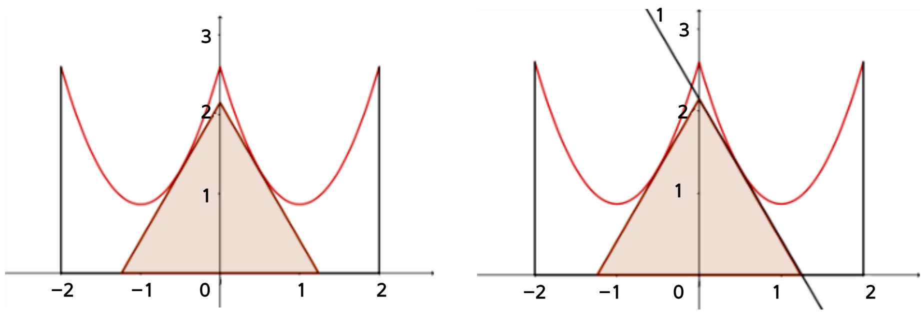
예시 답안

문제 1.

[1-1] 영역 $\left\{(x,\ y)\mid -2 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \sqrt{3}\,(|x|-1)^2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$을 A라 하자. 영역 A를 좌표 평면위에 나타내면 그림과 같다.



따라서 영역 A에 속하고 한 변이 x축 위에 있는 정삼각형 중 한 변의 길이가 최대가 되는 경우는 아래 그림과 같다.



먼저, 곡선 $y = \sqrt{3}\,(x-1)^2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$와 접하고 기울기가 $-\sqrt{3}$인 직선의 방정식을 구해 보자.

기울기가 $-\sqrt{3}$이고 x축과 $(a,\ 0)$에서 만나는 직선의 방정식은 $y = -\sqrt{3}\,(x-a)$이므로

$$\sqrt{3}\,(x-1)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}\,(x-a)$$

$$(x-1)^2 + \frac{1}{2} = -x + a$$

$$x^2 - x + \frac{3}{2} - a = 0$$

$D = 1 - 4\left(\dfrac{3}{2} - a\right) = 0$에서 $a = \dfrac{5}{4}$이다.

따라서 정삼각형의 한 변의 길이의 최댓값은 $\dfrac{5}{2}$이다.

문제 2.

[2-1] 자연수 $n\,(n=1,\,2,\,3)$에 대하여 양의 방향으로 $1+\left(\frac{1}{3}\right)^n$만큼 움직이거나, 음의 방향으로 $1+\left(\frac{1}{3}\right)^n$만큼 움직이면 정수가 될 수 없으므로 3번의 시행 모두 현재 위치에 그대로 있어야 한다. 따라서 3번째 시행을 한 후에 점 A가 정수에 놓일 확률은 $\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$이다.

[2-2] 모든 자연수 n에 대하여

$$1>\left(\frac{1}{3}\right)^n>\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k$$

이므로 집합 $X=\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n \mid n=1,2,3,\cdots,100\right\}$의 모든 원소는 집합 X의 임의의 나머지 원소들의 합이나 차로 표현할 수 없다. 즉, 집합 X의 각기 다른 임의의 원소들을 더하거나 뺀 값은 0이 될 수 없다. 그러므로 점 A를 양의 방향으로 $1+\left(\frac{1}{3}\right)^n$만큼 움직이거나, 음의 방향으로 $1+\left(\frac{1}{3}\right)^n$만큼 움직이면 원점에 있을 수 없다.

따라서 100번째 시행을 한 후에 점 A가 원점에 있기 위해서는 100번의 시행 모두 현재 위치에 그대로 있어야 한다. 그러므로 100번째 시행을 한 후에 점 A가 원점에 있을 확률은 $\left(\frac{1}{3}\right)^{100}$이다.

[2-3] 100번째 시행을 한 후에 점 A가 양의 실수에 놓일 확률과 음의 실수에 놓일 확률은 같다. 따라서 점 A가 원점에 있을 확률을 제외한 나머지 확률의 절반이다.
그러므로 100번째 시행을 한 후에 점 A가 양의 실수에 놓일 확률은

$$\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{100}}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{100}$$

이다.

[2-4] 모든 자연수 n에 대하여

$$1>\left(\frac{1}{5}\right)^n>\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n=\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^k$$

이므로 집합 $X=\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^n \mid n=1,2,3,\cdots,100\right\}$의 모든 원소는 집합 X의 임의의 나머지 원소들의 합이나 차로 표현할 수 없다. 즉, 집합 X의 임의의 각기 다른 원소들을 더하거나 뺀 값은 0이 될 수 없다. 따라서 점 B는 동서 중 한 방향으로 한번이라도 $1+\left(\frac{1}{3}\right)^n$만큼 움직이면 y축 위에 위치할 수 없고 남북 중 한 방향으로 한번이라도

$1+\left(\frac{1}{3}\right)^n$ 만큼 움직이면 x축 위에 위치할 수 없다. 그러므로 점 B가 x축 위에 위치하려면 현재 위치에 있거나 동서 방향으로만 움직여야 한다. 따라서 점 B가 x축에 위치할 확률과 y축에 위치할 확률은 $\left(\frac{3}{5}\right)^{100}$으로 같고 점 B가 원점에 위치할 확률은 $\left(\frac{1}{5}\right)^{100}$이다. 그러므로 점 B가 x축 또는 y축 위에 위치할 확률은

$$2\left(\frac{3}{5}\right)^{100}-\left(\frac{1}{5}\right)^{100}$$

이다. 한편 각 시행마다 동서남북으로 움직이는 확률이 각각 $\frac{1}{5}$로 동일하므로 100번째 시행을 한 후에 점 B가 각 사분면에 위치할 확률도 서로 같다. 따라서 100번째 시행을 한 후에 점 B가 제1사분면 위에 있을 확률은

$$\frac{1}{4}\left[1-\left\{2\left(\frac{3}{5}\right)^{100}-\left(\frac{1}{5}\right)^{100}\right\}\right]=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{100}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{100}$$

이다.

문제 3.

[3-1] 점 A의 좌표를 (a_1, a_2)라 하면 $(a_1+3)^2+a_2^2=1$이고, A와 B의 중점 $\mathrm{P}(x, y)$의 좌표는 $\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}\right)$이다.

$$x=\frac{a_1+b_1}{2},\ y=\frac{a_2+b_2}{2}$$

에서

$$a_1=2x-b_1,\ a_2=2y-b_2$$

이고 $(a_1+3)^2+a_2^2=1$에 대입하여 정리하면

$$\left(x-\frac{b_1-3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b_2}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

이다.

[3-2] $(-3, 0)=\mathrm{O}_1$, $(3, 0)=\mathrm{O}_2$라 하자. 직선 $\mathrm{O}_1\mathrm{A}$와 y축이 이루는 각을 $\theta\, 0\le\theta<2\pi)$라 하면 직선 $\mathrm{O}_2\mathrm{B}$와 y축이 이루는 각도 θ이므로 두 점 A와 B의 좌표는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathrm{A}=(-3-\sin\theta, \cos\theta),\ \mathrm{B}=(3-\sin\theta, \cos\theta)$$

따라서 점 A와 점 B의 중점 $\mathrm{P}(x, y)$의 좌표는 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(x, y)=(-\sin\theta, \cos\theta)$$

그러므로 점 $\mathrm{P}(x, y)$가 나타내는 도형의 방정식은

$$x^2+y^2=1$$

이다.

[3-3] $(-3, 0)=\mathrm{O}_1$, $(3, 0)=\mathrm{O}_2$라 하자. 직선 $\mathrm{O}_1\mathrm{A}$와 y축이 이루는 각을 $\theta_1(0\le\theta_1<2\pi)$,

직선 O_2B와 y축이 이루는 각을 $\theta_2\,(0 \le \theta_2 < 2\pi)$라 하면, 두 점 A와 B의 좌표는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A = (-3-\sin\theta_1,\ \cos\theta_1),\ \ B = (3-\sin\theta_2,\ \cos\theta_2)$$

따라서 점 A와 점 B의 중점 $P(x, y)$의 좌표는 다음과 같다.

$$P(x, y) = \left(-\frac{\sin\theta_1+\sin\theta_2}{2},\ \frac{\cos\theta_1+\cos\theta_2}{2}\right)$$

$x = -\dfrac{\sin\theta_1+\sin\theta_2}{2},\ y = \dfrac{\cos\theta_1+\cos\theta_2}{2}$ 에서

$$\sin\theta_1+\sin\theta_2 = -2x,\ \cos\theta_1+\cos\theta_2 = 2y$$

$$\begin{aligned} 4x^2+4y^2 &= \left(\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2+2\sin\theta_1\sin\theta_2\right)+\left(\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+2\cos\theta_1\cos\theta_2\right) \\ &= 2+2\left(\sin\theta_1\sin\theta_2+\cos\theta_1\cos\theta_2\right) \\ &= 2+2\cos(\theta_1-\theta_2) \end{aligned}$$

한편, $-1 \le \cos(\theta_1-\theta_2) \le 1$이고 $0 \le 2+2\cos(\theta_1-\theta_2) \le 4$이므로 $0 \le 4x^2+4y^2 \le 4$에서 $0 \le x^2+y^2 \le 1$이다.

그러므로 점 $P(x, y)$가 그리는 도형의 넓이는 π이다.

(다른 풀이)

원 C_2 위의 임의의 점 $B(a, b)$와 원 C_1 위에서 움직이는 점 S에 대하여, 점 B를 고정한 채로 두 점 S와 B의 중점이 그리는 도형의 방정식을 문제 3-1을 적용하여 구해보면

$$\left(x-\frac{a-3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

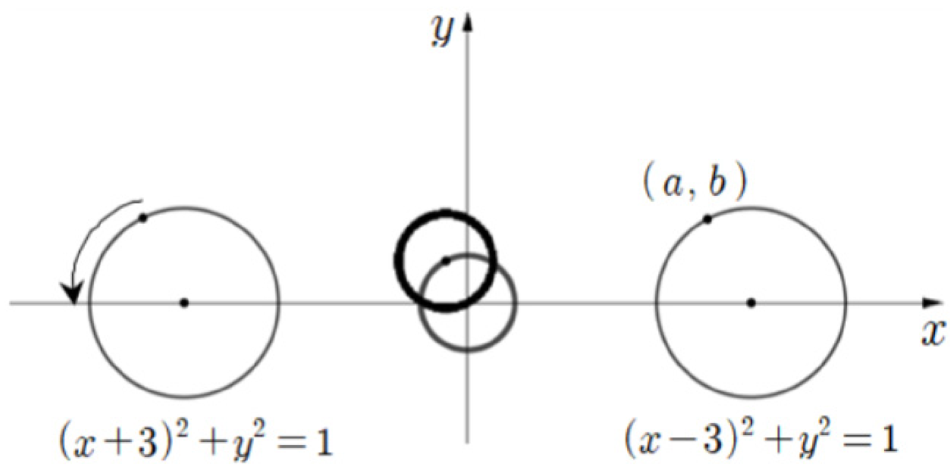
이다.

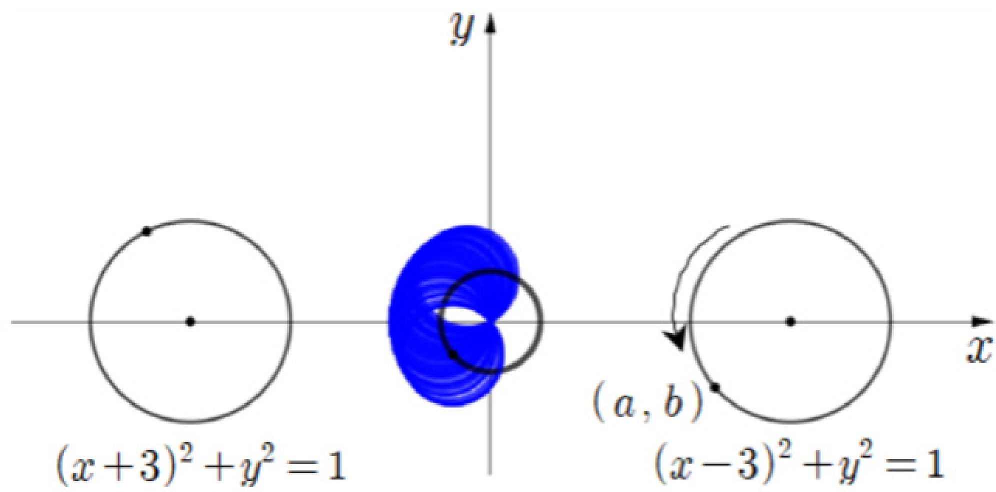
이제, 점 $B(a, b)$가 원 C_2 위에서 움직일 때 원 $\left(x-\dfrac{a-3}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{b}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$의 중심 $\left(\dfrac{a-3}{2},\ \dfrac{b}{2}\right)$이 그리는 도형의 방정식을 구해보자. $X = \dfrac{a-3}{2},\ Y = \dfrac{b}{2}$라고 두면 $a-3 = 2X,\ b = 2Y$이고 $(a-3)^2+b^2 = 1$이므로

$$(2X)^2+(2Y)^2 = 1,\ X^2+Y^2 = \frac{1}{4}$$

이다. 따라서 중심 $\left(\dfrac{a-3}{2},\ \dfrac{b}{2}\right)$이 그리는 도형은 중심이 원점이고 반지름이 $\dfrac{1}{2}$인 원이다.

그러므로 원 C_1 위의 각 점 S와 원 C_2 위의 각 T점의 중점 $P(x, y)$가 그리는 도형은 중심이 원 $x^2+y^2 = \dfrac{1}{4}$의 원주 위를 움직일 때 반지름이 $\dfrac{1}{2}$인 원이 그리는 도형이다. 따라서 그 도형은 원 $x^2+y^2 = 1$과 그 내부이므로 구하고자 하는 넓이는 π이다.





문제 4.

[4-1] $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}x=\frac{x}{9}+\frac{4(\sqrt{3}-1)}{9}$

[4-2] $f(x)=ax+b\,(a=\frac{1}{9},\ b=\frac{4(\sqrt{3}-1)}{9})$라 하면

$$(f\circ f\circ f)(x)=a(a(ax+b)+b)+b=a^3x+a^2b+ab+b$$

이고, $(f\circ f\circ f)(x)=x$ 에서 $a^3x+a^2b+ab+b=x$ 를 정리하면

$$x=\frac{b(a^2+a+1)}{1-a^3}=\frac{b}{1-a}=\frac{\frac{4(\sqrt{3}-1)}{9}}{\frac{1}{9}}=4(\sqrt{3}-1)\}$$

이다.

[4-3] 모든 자연수 n에 대하여 $a_1 = f\left(\frac{1}{3}\right)$, $b_1 = f\left(\frac{2}{3}\right)$, $a_{n+1} = f(a_n)$, $b_{n+1} = f(b_n)$이다.

따라서 $b_{n+1} - a_{n+1} = f(b_n) - f(a_n) = \frac{1}{9}(b_n - a_n)$, $b_1 - a_1 = \frac{1}{9}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}$ 이다.

그러므로

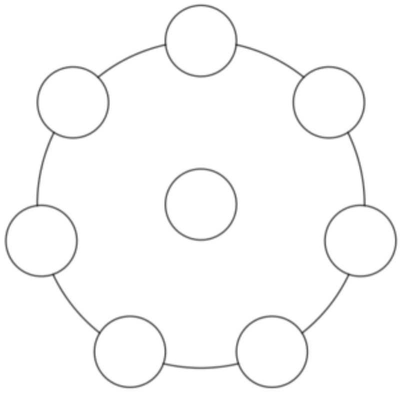
$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) = \frac{\frac{1}{27}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{24}$$

이다.

04 2019학년도 서울대 일반전형(인문) 대비 모의

문제 1.

A반, B반, C반에서는 각각 2명씩, D반, E반에서는 각각 1명씩 모두 8명이 운동장에 모여 그림과 같이 7명이 커다란 원의 둘레에 서서 술래로 지목된 중심부에 있는 1명이 돌리는 줄을 뛰어넘는 놀이를 하려고 한다. 또한, 같은 반 학생끼리는 이웃하지 않도록 8명의 자리를 정한다고 한다. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 경우로 본다.)



[1-1] 술래가 A반의 학생 중 1명이면서 조건을 만족하도록 8명의 자리를 정하는 모든 경우의 수를 구하시오.

[1-2] 조건을 만족하도록 8명의 자리를 정하는 모든 경우의 수를 구하시오.

문제 2.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$ 의 값이 존재하고 그 값을 e로 나타낸다.

[2-1] $2 < e < 3$임을 증명하시오.

[2-2] e가 무리수임을 증명하시오.

문제 3.

[3-1] 1부터 5번까지 번호가 적혀 있는 5개의 상자가 있다. k번이 적힌 상자에는 k개의 흰 공과 $(10-k)$개의 검은 공이 들어 있다. 상자 하나를 임의로 선택하여 한 개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 공이 흰 공이었을 때 선택한 상자가 4번이 적힌 상자일 확률을 구하시오. (단, $k=1,2,3,4,5$)

[3-2] 자연수 n에 대하여 $x+2y=n$을 만족하는 음이 아닌 정수쌍 $(x,\ y)$의 개수를 a_n이라 할 때,

$$a_n = \frac{n+1}{2} + \frac{1}{4}\{1+(-1)^n\}$$

임을 수학적 귀납법으로 증명하시오.

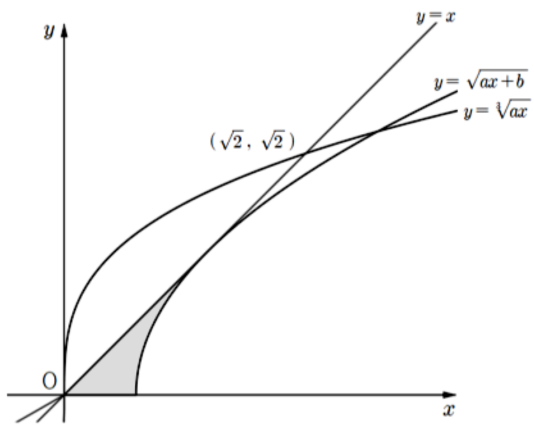
※ 수학적 귀납법 : 모든 자연수 n에 관한 명제 $P(n)$에 대하여, 다음의 ⅰ), ⅱ)가 만족되면 모든 자연수 n에 대하여 $P(n)$이 성립한다.

ⅰ) $n=1$과 $n=2$일 때 명제 $P(n)$이 성립한다.

ⅱ) $n=k$과 $n=k+1$일 때 명제 $P(n)$이 성립한다고 가정하면, $n=k+2$일 때도 성립한다.

문제 4.

[4-1] 그림과 같이 무리함수 $y=\sqrt[3]{ax}\ (a>0)$의 그래프가 직선 $y=x$와 점 $(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$에서 만나고, 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}\ (b<0)$의 그래프가 직선 $y=x$와 접할 때, x축, 직선 $y=x$, 곡선 $y=\sqrt{ax+b}$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.



[4-2] 구간 $[a,\ \infty)$에서 사차함수 $f(x)=3x^4+8x^3+24x^2+36x+16$의 역함수 $g(x)$가 존재하도록 하는 가장 작은 a를 구하시오. 이때 정적분 $\int_a^{16} g(x)\,dx$의 값도 구하시오.(단, 함수 $f(x)$의 공역은 $\{f(x)\,|\,x \geq a\}$이다.)

예시 답안

문제 1.

A반 학생을 a_1, a_2, B반 학생을 b_1, b_2, C반 학생을 c_1, c_2, D반, E반 학생을 각각 d, e라 하자.

[1−1]

가운데에 들어갈 학생을 선택하는 경우의 수는 2이다.
사건 B : B반 학생이 이웃하는 경우
사건 C : C반 학생이 이웃하는 경우
라 하자.

$$\begin{aligned} n\left(B^C \cap C^C\right) &= n\left((B \cup C)^C\right) = n(S) - n(B \cup C) \\ &= n(S) - \{n(B) + n(C) - n(B \cap C)\} \\ &= 2 \times 6! - \left(2 \times 5! \times 2 \times 2 - 2 \times 4! \times 2^2\right) \\ &= 672 \end{aligned}$$

[1−2]

술래가 B반의 학생 중 1명 일 때의 경우의 수, 술래가 C반의 학생 중 1명 일 때의 경우의 수, 술래가 A반의 학생 중 1명 일 때의 경우의 수는 모두 같다. 그 경우의 수는 [1−1] 에 의해서 각각 672이다.
d가 술래일 때의 경우의 수와 e가 술래일 때의 경우의 수도 같다. 또한, 이상에서 언급한 경우의 수를 모두 합한 것이 구하고자 하는 경우의 수이다.
이제 d가 술래일 때의 경우의 수를 구하자. d가 술래일 때,
사건 A : A반 학생이 이웃하는 경우
사건 B : B반 학생이 이웃하는 경우
사건 C : C반 학생이 이웃하는 경우
라 하자.

$$\begin{aligned} n\left(A^C \cap B^C \cap C^C\right) &= n\left((A \cup B \cup C)^C\right) = n(S) - n(A \cup B \cup C) \\ &= n(S) - \{3n(A) - 3n(A \cap B) + n(A \cap B \cap C)\} \\ &= 6! - \left(3 \times 5! \times 2 - 3 \times 4! \times 2^2 + 3! \times 2^3\right) \\ &= 240 \end{aligned}$$

따라서 구하고자 하는 경우의 수는 $3 \times 672 + 2 \times 240 = 2496$ 이다.

문제2.

[2-1] 임의의 자연수 $n \geq 3$에 대해서 $n! \geq 4^{n-2}$이므로

$$\begin{aligned} 2 = 1 + \frac{1}{1!} &< 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots \\ &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^{n-2}} + \cdots \\ &= 2 + \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 3 \end{aligned}$$

[2-2] $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$ 가 유리수라 가정하면

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = \frac{p}{q} \quad (p,\, q\text{는 서로소인 자연수})$$

로 둘 수 있다. [2-1]에서 $2 < e < 3$이므로 e는 자연수는 아니다. 따라서 $q \geq 2$이다. 양변에 $q!$을 곱하여 정리하면

$$\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots\right) \cdot q! = \frac{p}{q} \cdot q!$$

좌변은

$$\{q! + q! + (3 \cdot 4 \cdots q) + (4 \cdot 5 \cdots q) + \cdots + ((q-1) \cdot q) + q + 1\} + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots$$

이고, 여기서

$$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots < \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots = \frac{1}{2}$$

이므로 정수가 될 수 없다. 한편, 우변의 값은 $p \cdot (q-1)!$이므로 정수이며 이는 모순이다.

따라서 $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$ 는 무리수이다.

문제 3.

[3-1]

k번째 상자가 선택되는 사건을 A_k라 하고, 흰 공이 나오는 사건을 B라 하면

$$P(A_k) = \frac{1}{5},\, P(B \mid A_k) = \frac{k}{10} \ (k = 1, 2, 3, 4, 5)$$

A_k는 서로 배반사건이므로

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{k=1}^{5} P(A_k \cap B) = \sum_{k=1}^{5} P(A_k) \cdot P(B \mid A_k) \\ &= \sum_{k=1}^{5} \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{k}{10}\right) = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

따라서, $P(A_4 \mid B) = \dfrac{P(A_4 \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A_4) \cdot P(B \mid A_4)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{10}}{\frac{3}{10}} = \dfrac{4}{15}$

[3-2]

$n=1$ 일 때, $x+2y=1$ 의 음이 아닌 정수쌍은 $(1,0)$ 뿐이므로 $a_1=\frac{1+1}{2}+\frac{1}{4}\{1+(-1)^1\}=1$ (성립)

$n=2$ 일 때, $x+2y=2$ 의 음이 아닌 정수쌍은 $(2,0),(0,1)$ 이므로

$a_2=\frac{2+1}{2}+\frac{1}{4}\{1+(-1)^2\}=2$ (성립)

$n=k$ 일 때와 $n=k+1$ 일 때 위 식이 성립한다고 가정하자.

$n=k+2$ 일 때, $x+2y=k+2$ 의 정수쌍은

$y=0$ 일 때 $(k+2,0)$ 이고 $y\geq 1$ 일 때 정수쌍의 개수는 $x+2(y-1)=k$ 의 정수쌍의 개수가 같다.($\because y\geq 1$ 일때 $y-1$ 은 음이 아닌 정수가 되고 $x+2y=k+2$ 를 만족한다)

그리고 $x+2(y-1)=k$ (x 와 $y-1$ 은 음이 아닌 정수)를 만족하는 정수쌍은 a_k 개다.

따라서 $a_{k+2}=a_k+1=\frac{k+1}{2}+\frac{1}{4}\{1+(-1)^k\}+1$

$=\frac{(k+2)+1}{2}+\frac{1}{4}\{1+(-1)^{k+2}\}$ 가 성립한다.

따라서, 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

※ $n=k+2$ 일 때, 정수쌍의 개수는 $n=k$ 와 관련이 있으므로 $n=k$ 일 때와 $n=k+1$ 일 때 성립함을 가정하였고, $n=1$ 과 $n=2$ 일 때 모두 성립함을 보여야 한다.

문제4.

[4-1]

무리함수 $y=\sqrt[3]{ax}$ $(a>0)$ 의 그래프가 직선 $y=x$ 와 점 $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ 에서 만나므로 $a=2$ 이다. 또한, $y=\sqrt{ax+b}$ $(b<0)$ 의 그래프가 직선 $y=x$ 와 접하므로

$$\sqrt{2x+b}=x,\ 2x+b=x^2,\ x^2-2x-b=0 \cdots\cdots ㉠$$

에서 $\frac{D}{4}=1+b=0$, $b=-1$ 이다. 더 나아가, ㉠에서 $x^2-2x+1=(x-1)^2=0$ 이므로 접점의 좌표는 $(1,1)$ 이다. 한편, $y=x$ 에서 $x=y$ 이고, $y=\sqrt{2x-1}$ 에서 $y^2=2x-1$, $x=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}$ 이므로 구하는 넓이는

$$\int_0^1\left\{\left(\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}\right)-y\right\}dy=\left[\frac{1}{6}y^3+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}y^2\right]_0^1=\frac{1}{6}$$

이다.

[4-2]

$$f(x)=3x^4+8x^3+24x^2+36x+16$$

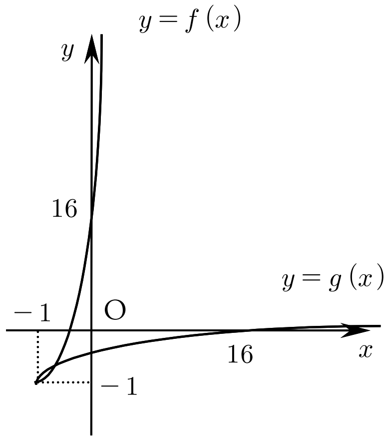
$$f'(x)=12x^3+24x^2+48x+36$$
$$=12(x+1)(x^2+x+3)$$

구간 $[a,\infty)$ 에서 사차함수 $f(x)$ 의 역함수 $g(x)$ 가 존재하려면 이 구간에서 증가하여야 한다. $f'(x)=12(x+1)(x^2+x+3)$ 에서 $x\geq -1$ 이면 $f'(x)\geq 0$ 이고 $x<-1$ 이면 $f'(x)<0$ 이다. 그러므로 $a\geq -1$ 이면 구간 $[a,\infty)$ 에서 함수 $f(x)$ 가 증가하고 그 역함수가 존재할 수 있지만,

$a < -1$ 이면 구간 $[a, \infty)$ 에서 함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재할 수 없다. 따라서 가장 작은 a 는 -1 이다.

이제 정적분 $\int_{-1}^{16} g(x)\,dx$ 를 구해보자.

$$f(-1) = 3 - 8 + 24 - 36 + 16 = -1, \ f(0) = 16$$



위의 그림에서 알 수 있듯이

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{16} g(x)\,dx &= -\int_{-1}^{0} \{f(x)+1\}\,dx \\ &= -\left[\frac{3}{5}x^5 + 2x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 17x\right]_{-1}^{0} \\ &= -\frac{3}{5} + 2 - 8 + 18 - 17 \\ &= -\frac{28}{5} \end{aligned}$$

이다. 따라서 $\int_{-1}^{16} g(x)\,dx = -\frac{28}{5}$ 이다.

05 2019학년도 연세대학교 특기자전형(자연)3)

핵심개념 및 용어	답변준비시간 및 면접시간	모집단위
집합, 중복순열, 조합, 연립일차방정식, 정적분	답변준비시간: 45분 내외 면집시간: 15분 내외	이과대학, 공과대학, 생명시스템 대학

문제 1. 다음을 만족하는 집합에 대하여 물음에 답하시오.

(1) A, B, C 는 각각 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$의 부분집합이고,
$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이다.

(2) D 와 E 는 각각 집합 $\{7, 8, 9\}$의 부분집합이고, $D \cup E = \{7, 8, 9\}$이다.

(3) $n(A \cap B) = 2$, $n(A \cap C) = 1$

(4) $n(D) > n(E) \geq 1$

[1-1] 위의 조건을 만족하는 세 집합 A, B, C 를 결정하는 경우의 수를 구하시오.

[1-2] 위의 조건을 만족하는 두 집합 D, E 를 결정하는 경우의 수를 구하시오.

문제 2. 구간 $[0, 1]$에서 연속이고, 다음을 만족하며, $f(0) = 1$인 함수 $f(x)$가 존재하는가?

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 x^2 f(x)dx = 0$$

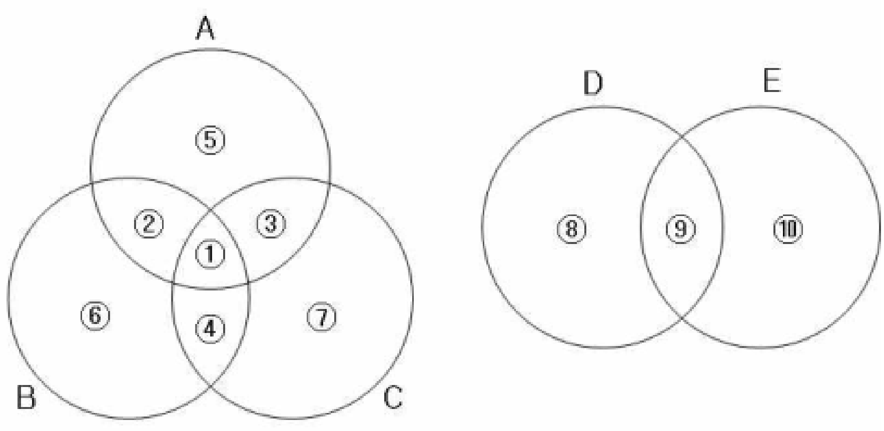
만약 존재하면 예를 하나 찾고, 그렇지 않다면 이유를 설명하시오.

3) 연세대학교 홈페이지

예시 답안

문제 1.

다음과 같은 벤 다이어그램을 생각하자.



조건 (1)과 (2)에 따르면 영역 ①~⑦ 안에 숫자 1~6을, 영역 ⑧~⑩ 안에 숫자 7~9를 넣어야 함을 알 수 있다.

[1-1]

조건 (3)을 만족해야 하므로, 영역 ①에 들어가는 숫자의 개수가 0개인 경우와 1개인 경우로 나누어 생각하면 충분하다.

영역 ①에 들어가는 숫자의 개수가 0개인 경우 : 영역 ②에 들어가는 숫자의 개수는 2개, 영역 ③에 들어가는 숫자의 개수는 1개여야 한다. 그러므로 조건을 만족하도록 숫자를 넣는 방법의 수는 ${}_6\mathrm{C}_2 \times 4 \times 4^3$ 가지이다.

영역 ①에 들어가는 숫자의 개수가 1개인 경우 : 영역 ②에 들어가는 숫자의 개수는 1개, 영역 ③에 들어가는 숫자의 개수는 0개여야 한다. 그러므로 조건을 만족하도록 숫자를 넣는 방법의 수는 $6 \times 5 \times 4^4$ 가지이다.

그러므로 모든 경우의 수는 ${}_6C_2 \times 4 \times 4^3 + 6 \times 5 \times 4^4 = 11520$ 이다.

[1-2]

숫자 7,8,9를 영역 ⑨안에 숫자를 0개, 1개, 2개 넣는 경우로 나누어 생각하면 충분하다.

영역 ⑨에 들어가는 숫자의 개수가 0개인 경우 : 조건 (5)를 만족하게 하기 위하여 영역 ⑧에는 숫자 2개, 영역 ⑩에는 숫자 하나를 넣어야 하므로 영역 ⑩에 들어갈 숫자만 결정하면 된다. 즉 3 가지이다.

영역 ⑨에 들어가는 숫자의 개수가 1개인 경우 : 조건 (5)를 만족하게 하기 위하여 영역 ⑧에는 숫자 2개, 영역 ⑩에는 0개의 숫자를 넣어야 하므로 영역 ⑨에 들어갈 숫자만 결정하면 된다. 즉 3 가지이다.

영역 ⑨에 들어가는 숫자의 개수가 2개인 경우 : 조건 (5)를 만족하게 하기 위하여 영역 ⑧에는 숫자 1개, 영역 ⑩에는 0개의 숫자를 넣어야 하므로 영역 ⑧에 들어갈 숫자만

결정하면 된다. 즉 3 가지이다.

모든 경우를 생각하면 $3+3+3=9$ 가지이다.

문제2.

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+1$ 라 두고 준 식에 대입하면

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{c}{2}+1=0$$

$$\int_0^1 xf(x)dx = \frac{a}{5}+\frac{b}{4}+\frac{c}{3}+\frac{1}{2}=0$$

$$\int_0^1 x^2 f(x)dx = \frac{a}{6}+\frac{b}{5}+\frac{c}{4}+\frac{1}{3}=0$$

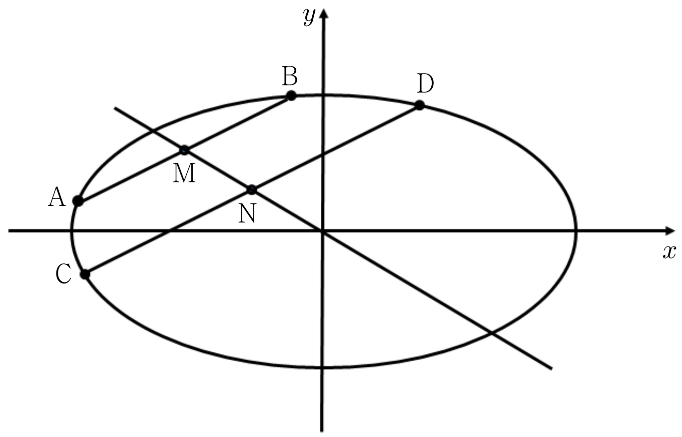
이다. 연립방정식을 풀면 $a=-20,\ b=30,\ c=-12$ 이므로 $f(x)=-20x^3+30x^2-12x+1$ 이다.

06 2019학년도 연세대학교 특기자전형 대비 모의

문항 1

(가) 타원의 단축과 장축의 교점을 타원의 중심이라 한다.

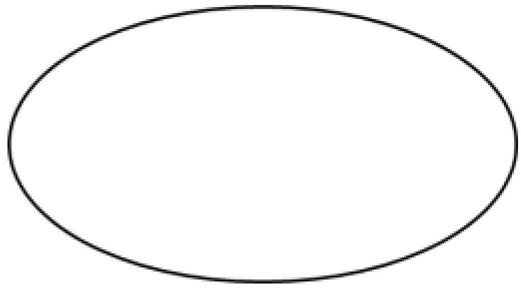
(나) 그림과 같이 두 선분 AB, CD의 중점을 M, N이라 하자. 두 선분 AB, CD가 평행하면 M, N을 지나는 직선은 타원의 중심을 지난다.



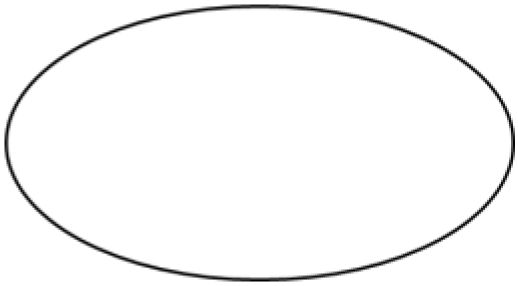
(다) 눈금이 없는 자와 컴퍼스 두 개만으로 작도하는 것을 유클리드 작도라고 한다. 정삼각형, 정사각형, 정오각형, 정육각형과 같은 정다각형을 자와 컴퍼스만으로 작도할 수 있다.

[1-1] 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a,\ b>0)$에 대하여 제시문 (나)를 증명하시오.

[1-2] 그림과 같이 타원이 주어져 있을 때, 유클리드 작도로 타원의 중심을 찾는 방법을 설명하시오.



[1-3] 그림과 같이 타원이 주어져 있을 때, 유클리드 작도로 타원의 장축과 단축을 찾는 방법을 설명하시오.



문항 2

(가) 자연수 n에 대하여 다음과 같은 전개식을 얻을 수 있고, 이것을 이항정리라고 한다.

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b^1 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n b^n$$

(나) $(a+b)^n$의 전개식에서 각 항의 계수 ${}_n\mathrm{C}_0$, ${}_n\mathrm{C}_1$, $\cdots$, ${}_n\mathrm{C}_r$, $\cdots$, ${}_n\mathrm{C}_n$을 이항계수라 하고, ${}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r$을 $(a+b)^n$의 전개식의 일반항이라고 한다.

(다) 양의 실수 r과 2 이상의 자연수 n에 대하여 $a_k = {}_nC_k r^k$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\ ,\ n)$라 두면

$(1+r)^n = \sum_{k=0}^{n} a_k$으로 나타낼 수 있다.

[2-1] $b_k = \dfrac{a_k}{a_{k-1}}$라 할 때, $b_1 > b_2 > \cdots > b_n$임을 증명하시오. (단, $r>0$)

[2-2] $\dfrac{1}{n} < r < n$ 일 때 부등식 $a_0 < a_1 < \cdots < a_{m-1} \le a_m$, $a_m > a_{m+1} > \cdots > a_n$을 만족시키는 자연수 m $(1 \le m < n)$이 존재함을 증명하시오.

[2-2] $\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^{2019} = \sum_{k=0}^{2019} a_k$으로 나타낼 때, a_0, a_1, $\cdots$, a_{2019} 중 최댓값은 a_p이다. 이때 p의 값을 구하시오.

문항 3

(가) 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음을 고려하여 그린다.

(1) 함수의 정의역과 치역 (2) 좌표축과의 교점

(3) 함수의 증가와 감소, 극대와 극소, 곡선의 오목과 볼록, 변곡점

(4) 점근선

(나) 함수 $y=2^{x-1}$과 직선 $y=x$의 교점의 개수는 2이다.

[3-1] 함수 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ $(x>0)$의 그래프의 개형을 그리시오.

[3-2] 위 [3-1]을 이용하여 방정식 $a^b=b^a$의 모든 자연수 해를 구하시오. (단, $a\neq b$)

문항 4

[4-1] 모든 실수 x에 대하여 $\cos^2 x+x^2-1\geq 0$ 임을 증명하시오.

[4-2] 위의 [4-1] 의 부등식을 사용하여 다음 부등식을 증명하시오.

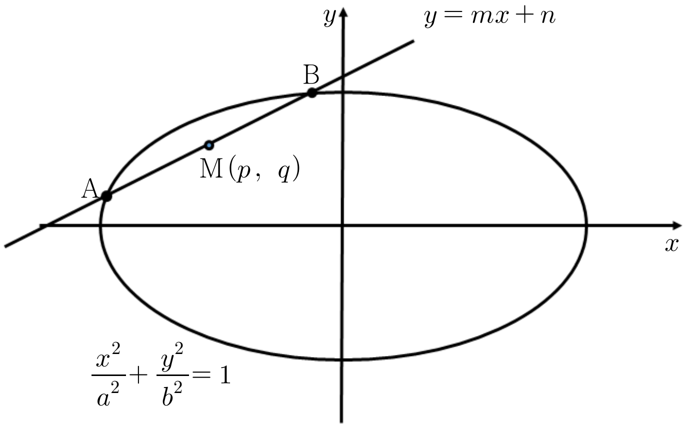
$\cos\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{1}{3}\cdots\cos\dfrac{1}{n}>\dfrac{2}{3}$ (단 , $n=2,3,4,\cdots$)

예시 답안

문항 1

[1-1]

두 직선 AB, CD 가 y축에 평행하면, 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 이 x축에 대하여 대칭이므로 M, N 을 지나는 직선은 타원의 중심을 지난다. 이제 y축에 평행하지 않은 경우를 고려하여, 타원과 두 점에서 만나는 직선의 방정식을 $y=mx+n$ 이라 하자.



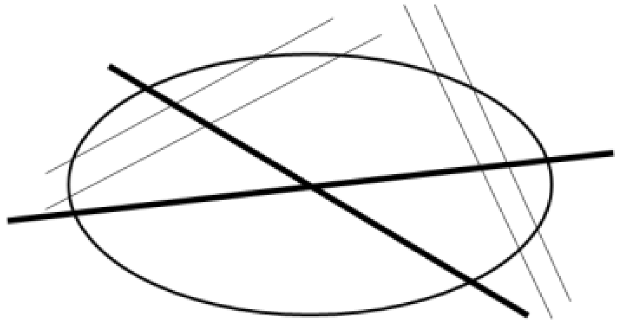
두 방정식을 연립하면 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+n)^2}{b^2}=1$, $(a^2m^2+b^2)x^2+2a^2mnx+a^2(n^2-b^2)=0$ 이 된다. 두 교점 A, B 의 x 좌표를 x_1, x_2 라 하면 $x_1+x_2=-\frac{2a^2mn}{a^2m^2+b^2}$ 이다. 두 점 A, B 의 중점을 M(p,q) 라 하면

$$p=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{a^2mn}{a^2m^2+b^2}\ ,\ q=-\frac{a^2mn}{a^2m^2+b^2}m+n=\frac{b^2n}{a^2m^2+b^2}$$

이다. p, q 의 관계식은 $q=-\frac{b^2}{a^2m}p$ 이다. a, b, m 는 상수이므로 선분 AB 의 중점은 타원의 중심을 지나는 직선 위에 있다.

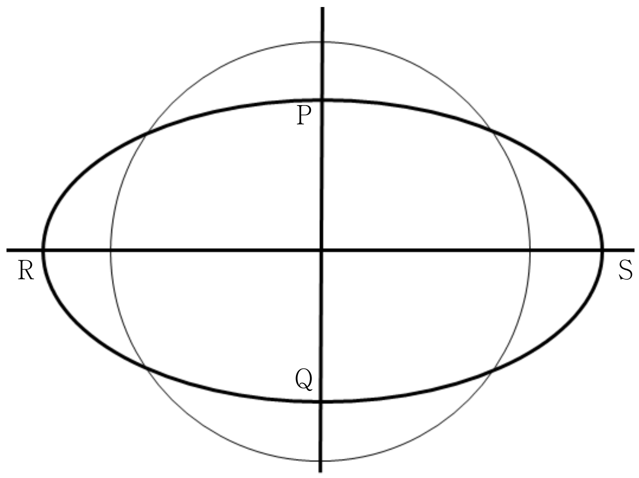
[1-2]

논제 [1-1]에 의해 임의의 평행한 두 직선의 중점을 지나는 직선은 타원의 중심을 지나므로, 두 쌍의 평행한 직선의 중점을 이은 두 직선의 교점이 바로 타원의 중심이 된다.



[1-3]

타원의 중심을 원의 중심으로 하고 타원과 서로 다른 네 점에서 만나는 원을 그린다. 네 교점은 직사각형의 네 꼭짓점이다. 직사각형의 마주보는 두 변의 중점을 지나는 직선과 타원의 교점 P, Q, R, S를 찾자. 선분 PQ와 RS 중 긴 것이 장축이고 짧은 것이 단축이다.



문항 2

[2-1]

$b_k = \dfrac{a_k}{a_{k-1}} = \dfrac{{}_nC_k r^k}{{}_nC_{k-1} r^{k-1}} = \dfrac{n-k+1}{k} r > 0 \quad (k=1,2,\cdots,n)$이고

$\dfrac{b_{k+1}}{b_k} = \dfrac{n-k}{k+1} \times \dfrac{k}{n-k+1} < 1 \quad (k=1,2,\cdots,n-1)$이므로 $b_1 > b_2 > \cdots > b_n$이다.

[2-2]

$\dfrac{1}{n} < r < n$ 이므로 $b_1 = nr > 1$, $b_n = \dfrac{r}{n} < 1$이다. 또한 [2-1]에 의해 $b_1 > b_2 > \cdots > b_n$이므로 부등식 $b_1 > b_2 > \cdots > b_m \geq 1 > b_{m+1} > \cdots > b_n$을 만족하는 자연수 $m \ (1 \leq m < n)$이 존재한다.

즉, $b_k = \dfrac{a_k}{a_{k-1}}$ 에서 부등식 $a_0 < a_1 < \cdots < a_{m-1} \le a_m$, $a_m > a_{m+1} > \cdots > a_n$ 을 만족시키는 $m \ (1 \le m < n)$ 이 존재한다.

[2-3]

$r = \dfrac{1}{2}$, $n = 2019$ 이므로 [2-2]에 의해 다음을 만족하는 자연수 $m \ (1 \le m < 2019)$ 이 존재한다.

$$b_m = \frac{2020-m}{2m} \ge 1, \ b_{m+1} = \frac{2019-m}{2(m+1)} < 1$$

$$2020 - m \ge 2m, \ 2019 - m < 2(m+1)$$

$$\frac{2017}{3} < m \le \frac{2020}{3}$$

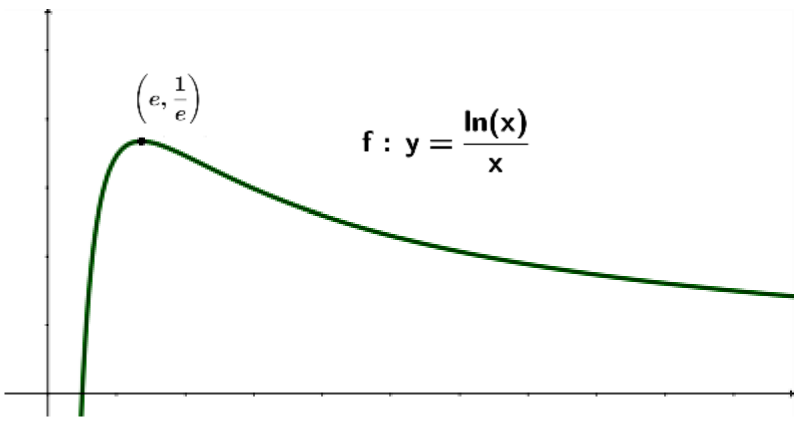
$$672.333\cdots < m \le 673.333\cdots$$

$p = 673$ 이다.

문항 3

[3-1]

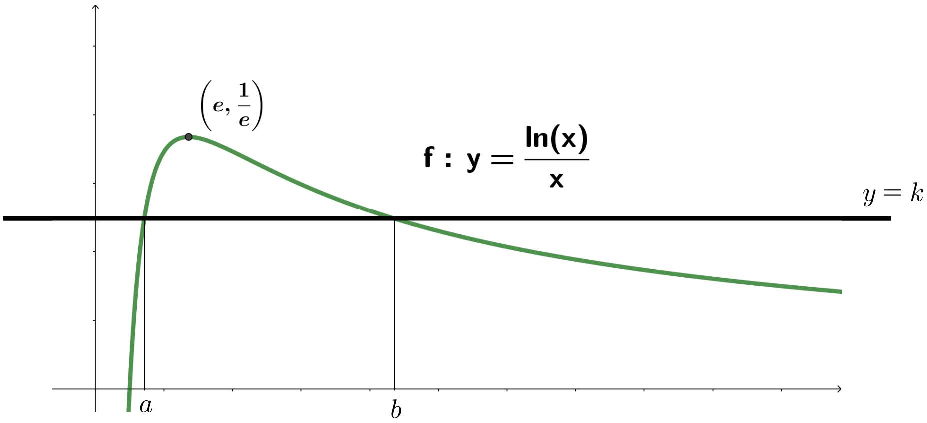
$f(x) = \dfrac{\ln x}{x} \ (x > 0)$, $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$ 이므로 $f'(x) = 0$ 에서 $x = e$ 이다. 또한, $0 < x < e$ 이면 $f'(x) > 0$ 이고 $x > e$ 이면 $f'(x) < 0$ 이다. 따라서 함수 $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} \ (x > 0)$ 의 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.



[3-2]

$a < b$ 라 가정하자. $a^b = b^a \Leftrightarrow \dfrac{\ln a}{a} = \dfrac{\ln b}{b} \Leftrightarrow f(a) = f(b)$

$f(a) = f(b) = k\left(< \dfrac{1}{e}\right)$ 라 하자.



가능한 a의 값은 1 또는 2뿐이다. 그런데 $a=1$이면 $b=1$이므로 $a \neq b$에 모순이다. 그러므로 $a=2$이고 $2^b=b^2$이다. 따라서 $b=2^m$ (m은 자연수)이므로 $2^{2^m}=2^{2m} \Leftrightarrow 2^m=2m \Leftrightarrow 2^{m-1}=m$이다. 제시문(나)에 의해 함수 $y=2^{x-1}$과 직선 $y=x$의 교점의 개수는 2이므로 $2^{m-1}=m$을 만족하는 자연수 m의 값은 1 또는 2이다.
$m=1$이면 $a=b=2$이므로 $a \neq b$에 모순이다. 그러므로 $m=2$이고 구하는 자연수 해는 $a=2$, $b=4$뿐이다.

문항 4

[4-1]
$f(x)=\cos^2 x-1+x^2$ 이라고 하면, 이 함수는 y축에 대칭이므로 $x \geq 0$ 일 때 $f(x) \geq 0$ 임을 보여 주면 된다. $f(0)=0$ 이고, $f'(x)=-2\cos x\sin x+2x=2x-\sin(2x)$ 이다. 따라서 $f'(x) \geq 0$ 을 보이면 충분하다. (혹은 $f(x)=x^2-\sin^2 x$ 이므로 $x \geq \sin x$ 임을 보이면 충분하다.) $f'(0)=0$ 이고, $f''(x)=2-2\cos(2x) \geq 0$ 이므로 $f'(x) \geq 0$ 이다.

[4-2]
[4-1] 에 의해 $\cos^2 x \geq 1-x^2$ 이므로

$$\left(\cos\frac{1}{2}\cos\frac{1}{3}\cdots\cos\frac{1}{n}\right)^2 \geq \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

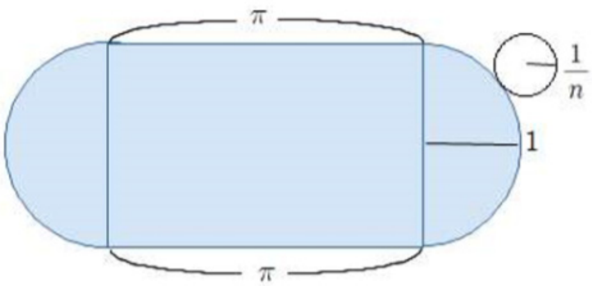
$$\geq \frac{1 \cdot 3}{2^2}\times\frac{2 \cdot 4}{3^2}\times\cdots\times\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}=\frac{n+1}{2n}>\frac{1}{2}$$

이다. 이것과 $\cos\frac{1}{k}>0$ 으로부터 $\cos\frac{1}{2}\cos\frac{1}{3}\cdots\cos\frac{1}{n}>\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{2}{3}$ (단, $n=2,3,4,\cdots$) 임을 알 수 있다.

07 2019학년도 KAIST 면접 및 구술고사4)

문항 1

반지름이 1인 반원 2개와, 가로와 세로의 길이가 각각 π, 2인 직사각형으로 이루어진 트랙(아래 그림)에 반지름이 $\frac{1}{n}$인 작은 원이 외접하여 돌고 있다.



작은 원이 트랙을 한 바퀴 돈다고 할 때, 작은 원 위에 고정된 한 점이 그리는 궤적을 생각해 보자. n은 짝수라고 하자. (총 4점)

(1) 이 궤적으로 둘러싸인 면적의 n이 무한대로 갈 때의 극한값을 구하고, 그에 대한 논리적 근거를 설명하시오.

(2) 이 궤적의 곡선의 길이를 구하고, n이 무한대로 갈 때의 극한값을 구하시오.

4) 한국과학기술원(KAIST) 홈페이지

문항 관련 내용

1. 일반정보

전형명	일반전형	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분Ⅰ, 미적분Ⅱ, 기하와 벡터
	핵심개념 및 용어	극한, 적분, 평면운동에서의 이동 거리
예상 소요 시간	10분	

2. 출제 의도

본 문제는 주어진 상황을 이해하고, 수학적인 수식으로 표현하여 극한과 적분개념을 이용하여 해결하는 능력을 평가하고자 한다.

(1) 도형의 성질을 파악하여 부등식을 세우고, 세운 식을 극한의 성질과 극한의 대소관계를 이용하여 해결할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

(2) 주어진 상황을 삼각함수를 이용하여 식을 세우고, 세운 식을 미분과 적분을 이용하여 해결할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

3. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	- 큰 트랙의 면적이 원래 트랙의 면적으로 수렴함을 설명한 경우 1점 (즉, 두 트랙 사이의 튜브면적이 0으로 수렴) - 답은 맞으나, 이에 대한 논리적인 설명이 부족한 경우는 부분점수 0.5점	1점
(2)	- 직선 구간을 돌 때 궤적의 길이 4을 계산하면 1점 - 이에 원호 구간을 돌 때 궤적의 좌표식을 구하면 추가 1점(총 2점) - 이에 원호 구간을 돌 때 궤적의 길이 및 총 길이의 극한값을 계산하면 추가 1점(총 3점) (원호 구간의 좌표식 및 길이 계산 없이 원호 구간을 돌 때 궤적의 길이가 직선 구간을 돌 때 궤적의 길이와 같다고 설명하고, 직선 구간을 돌 때 궤적의 길이 4의 4배를 하여 16을 답하면 총 2점)	3점

문항 2

1부터 6까지 모든 정수가 같은 확률로 나오는 주사위를 두 번 던져서 첫 번째에 나온 수를 a, 두 번째 던졌을 때 나온 수를 b라 하자.
이차함수 $f(x)=x^2+ax+b$를 생각하자. (총 6점)

(1) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$일 확률은 얼마인가?

(2) 동전을 던져서 앞면이 나오면 $f(x)=2019$의 두 실수해 중 큰 것을 r이라고 하고, 뒷면이 나오면 두 실수해 중 작은 것을 r이라고 하자. r의 기댓값을 구하시오.

(3) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이었다고 할 때, 점 $(t, f(t))$에서의 접선이 $(0, 0)$을 지나며 $t\geq 2$인 t가 존재할 확률은 얼마인가?

문항 관련 내용

1. 일반정보

전형명	일반전형	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	확률과 통계
	핵심개념 및 용어	판별식, 조건부확률
예상 소요 시간	10분	

2. 출제 의도

본 문제는 주어진 상황을 이해하고, 이차함수와 이차방정식의 문제 상황에 확률개념을 접목하여 외적문제해결능력을 평가하고자 한다.

(1) 이차함수의 그래프롸 x축의 교점이 존재하지 않을 조건을 찾고, 그 조건에 만족하는 a, b가 취할 수 있는 값을 찾아 확률의 정의를 적용하는 능력을 보고자 한다.

(2) 이차방정식의 근과 계수와의 관계를 활용하여 기댓값을 구하는 능력을 보고자 한다.

(2) 도함수를 활용하여 이차함수의 그래프의 접선의 방정식을 구할 수 있는지, 문제해결 상황에서 조건부확률의 정의를 정확히 이해하여 활용할 수 있는지를 보고자 한다.

3. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	- 정확한 답을 구한 경우 2점 - 계산실수를 하였으나 판별식 값이 0 이하가 되어야 함을 착안한 경우 1점	2점
(2)	- 정확한 답을 구한 경우 2점 - a, b를 고정하였을 때, 두 해의 평균이 $-\frac{a}{2}$임을 근과 계수 사이의 관계를 정확하게 이용하거나, 근의 공식을 이용하여 서술한 경우 부분점수 1점 - 부호만 틀려서 $\frac{7}{4}$라고 답하는 경우 부분점수 1점	2점
(3)	- 정확한 답을 구한 경우 2점 - 조건부 확률을 구하지 않고 $\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$을 구하거나, 혹은 12가지 경우에 $f(x) \geq 0$이면서 원점에서 그은 접선이 $x \geq 2$인 곳에서 접함을 보인 경우 부분점수 1점	2점

문항 3

(1) 한 변의 길이가 a이고 n개 $(n \geq 3)$의 변을 가진 정다각형의 넓이를 $S_n(a)$라 표기하자. 주어진 양의 정수 m에 대해 $\lim_{n \to \infty} \frac{S_{mn}(a)}{S_n(a)}$를 구하시오.

(2) 한 변의 길이가 $2\sin\left(\frac{\pi}{20}\right)$인 정이십각형을 밑면으로 하고 밑면을 포함하는 평면 밖의 한 점 Q를 꼭짓점으로 가지는 각뿔을 A라고 하자. 이 정이십각형의 꼭짓점 중 하나를 P_1이라 하고 정이십각형의 변을 따라 시계 반대 방향으로 이동할 때 만나는 꼭짓점을 각각 $\mathrm{P}_2, \cdots, \mathrm{P}_{20}$이라 표기하자. $\overline{\mathrm{QP}_1} = \sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{QP}_6} = \sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{QP}_{11}} = \sqrt{4}$일 때 A의 부피를 구하시오.
(단, 계산과정에서 나올 수 있는 삼각함수 값을 정확히 구할 필요는 없음.)
(총 5점)

문항 관련 내용

1. 일반정보

전형명	학교장추천전형, 고른기회전형	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분Ⅱ, 기하와 벡터
	핵심개념 및 용어	삼각함수의 뜻, 삼각함수의 극한, 공간좌표
예상 소요 시간	10분	

2. 출제 의도

본 문제는 주어진 조건을 이해하고, 수학적인 수식으로 표현하여 삼각함수의 뜻, 삼각함수의 극한 및 공간좌표를 이용하여 문제를 해결하는 능력을 평가하고자 한다.

(1) 정다각형의 성질과 삼각함수의 뜻을 이용하여 정다각형의 넓이를 구하고, 삼각함수의 극한의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

(2) 주어진 상황에서 좌표공간을 도입하여 각뿔 밑면의 꼭짓점의 공간좌표를 구하고, 주어진 선분의 길이로부터 좌표공간에서 두 점 사이의 거리를 이용하여 식을 세우고, 각뿔 밑면 밖에 있는 꼭짓점의 공간좌표를 구하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

3. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	- 정확한 답과 근거 제시한 경우 2점 - 넓이 $S_n(a)$를 구하고 정확한 답은 구했지만 근거를 제시하지 못한 경우 1.5점 - 넓이 $S_n(a)$를 구했을 경우 1점 - 정확한 답은 제시했지만 근거를 제시하지 못한 경우 0.5점	2점
(2)	- 정확한 답 제시한 경우 3점 - 각 뿔 A의 높이를 구했을 경우 2점 - 공간좌표나 수선의 발 등을 이용해 각뿔의 높이를 해로 가지는 식을 구했지만 계산을 하지 못한 경우 1점	3점

문항 4

$\overline{AB}=\sqrt{3}$, $\overline{BC}=4$인 직사각형 ABCD의 세 변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$의 안쪽이 거울로 되어 있어서 빛이 반사된다고 한다. 변 $\overline{DA}$의 중점을 M이라 하자. 점 A에서 변 $\overline{AB}$와 이루는 각이 θ가 되도록 빛을 직사각형 내부로 쏘았을 때 빛이 처음으로 변 $\overline{DA}$와 다시 만나게 되는 점을 P라 하자. (단, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$)

처음에는 θ가 0이면 1초당 $\frac{\sqrt{3}}{2}$의 속도로 일정하게 θ값을 증가시킨다고 하자.(총 5점)

(1) P가 처음으로 M과 같아질 때 θ는 얼마인가?

(2) θ가 $\frac{\pi}{3}$인 순간 빛이 A에서 P까지 이동한 총 거리와 선분 $\overline{AP}$의 길이를 구하시오.

(3) P가 n번째로 M과 같아질 때 P가 움직이는 속력을 a_n이라고 하자.(단, $a_n > 0$)
a_n을 구하시오.

문항 관련 내용

1. 일반정보

전형명	학교장추천전형, 고른기회전형	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅰ, 미적분Ⅰ, 미적분Ⅱ
	핵심개념 및 용어	대칭이동, 미분계수(순간변화율), 속도, 삼각함수 사이의 관계, 삼각함수의 미분
예상 소요 시간	10분	

2. 출제 의도

본 문제는 직사각형의 내부에서의 빛의 반사를 직선에 대한 대칭이동을 이용하여 빛은 직선으로 이동하는 것으로 변환하여 삼각함수의 뜻, 미분계수(순간변화율), 삼각함수의 미분을 이용하여 문제를 해결하는 능력을 평가하고자 한다.

(1),(2) 주어진 상황을 파악하고 대칭이동과 삼각함수의 뜻을 이용하여 해결할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

(3) 주어진 상황을 파악하여 대칭이동을 이용하여 빛이 도달하는 지점을 좌표평면에서 좌표로 나타내고 삼각함수의 미분을 이용하여 해결할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

3. 채점 기준

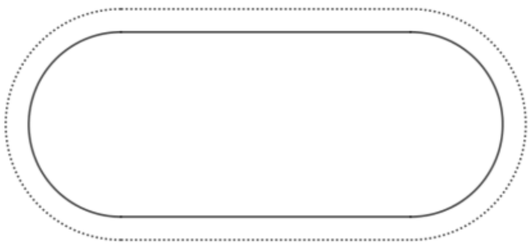
하위 문항	채점 기준	배점
(1)	- 정확한 답을 제시한 경우 1점 (비록 문제에서 $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ 라고 하였으나, θ를 30° 라고 하여도 인정)	1점
(2)	- 정확한 답을 제시한 경우 2점 - 빛이 이동한 거리 $4\sqrt{3}$, P와 A 사이의 거리 2 중 하나만 구한 경우 1점	2점
(3)	- a_n 식을 n에 관한 2차식 형태로 맞게 대답한 경우 2점 - $\tan\theta$ 미분은 잘 알고 사용하였으나, 답을 계산 실수로 틀린 경우 1점	2점

예시 답안

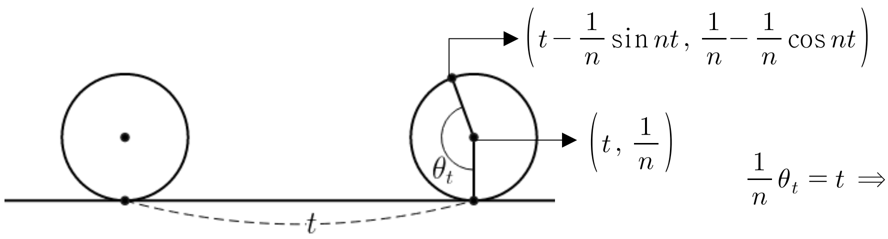
문항 1

(1) 이 궤적으로 둘러싸인 영역은 원래 트랙과 거기에서 $\frac{2}{n}$ 만큼 떨어진 트랙(점선) 사이에 존재. 따라서 그 영역의 면접 A는 원래 트랙(실선) 면적과 큰 트랙(점선)의 면적의 사이에 있다.

즉, $\pi + 2\pi \le \mathrm{A} \le \pi\left(1+\frac{2}{\mathrm{n}}\right)^2 + \pi\left(2+\frac{4}{\mathrm{n}}\right)$ 이고, 따라서 n 이 무한대로 갈 때 3π 로 수렴.



(2) 곡선 부분과 직선 부분의 길이가 모두 π 로 작은 원의 둘레($\frac{2\pi}{n}$)의 $\frac{n}{2}$ 배이고, n 은 짝수이므로, 정수배가 된다. 따라서, 작은 원 상의 고정점의 위치(각도)는 각 구간의 시작과 끝에서 제자리가 된다.



$\frac{1}{n}\theta_t = t \Rightarrow \theta_t = nt$

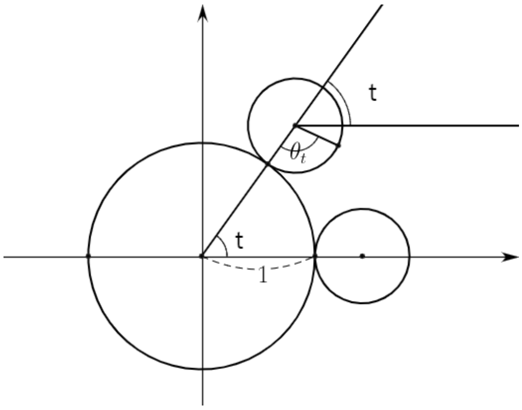
직선 위를 구르는 경우를 먼저 생각해 보면, 고정된 점이 그리는 궤적은

$$(x(t),\, y(t)) = \left(t-\frac{1}{n}\sin nt,\ \frac{1}{n}-\frac{1}{n}\cos nt\right),\ 0 \le t \le \pi$$

이므로 곡선의 길이를 구하기 위해, $(x'(t),\, y'(t)) = (1-\cos nt,\, \sin nt)$ 를 대입하여

$$\int_0^\pi \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = \int_0^\pi \sqrt{2-2\cos t}\, dt = \int_0^\pi 2\left|\sin\frac{t}{2}\right| dt = 4$$

따라서 직선구간을 구를 때의 궤적은 아래 위 합하여 8이 된다.
원호 구간을 구를 때의 궤적의 방정식을 구해보자.



$\frac{1}{n}\theta_t = t,\ \theta_t = nt$

$t+\pi+\theta_t = (n+1)t+\pi$

작은 원의 중심의 좌표는

$$\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)\cos t,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)\sin t\right),\ 0 \le t \le \pi$$

가 되고, 따라서 작은 원 위의 고정된 한 점의 좌표를 $(x(t), y(t))$라고 할 때, 작은 원의 중심이 t만큼 회전 할 때, 작은 원 자체는 nt만큼 회전하는데, 이동한 원의 중심에서 본 각도는 $nt+t$만큼 회전하게 된다. 위 그림에서 $t=0$일 때, 작은 원의 중심에서 본 고정점의 각이 π에서 시작하므로, 고정점의 (작은 원의 중심에 대한) 각은 $t+nt+\pi$가 된다. 따라서, $(\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta,\ \sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$를 이용하면), 궤적의 매개좌표는 아래와 같다.

$$x(t) = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cos t - \frac{1}{n}\cos((n+1)t),$$

$$y(t) = \left(1+\frac{1}{n}\right)\sin t - \frac{1}{n}\sin((n+1)t)$$

곡선의 길이를 구하기 위해

$$x'(t) = -\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin t + \frac{n+1}{n}\sin((n+1)t),$$

$$y'(t) = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cos t - \frac{n+1}{n}\cos((n+1)t)$$

를 계산하여 길이를 구하면,

$$\int_0^\pi \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt = \frac{n+1}{n}\int_0^\pi \sqrt{2-2\{\sin t\sin((n+1)t)+\cos t\cos((n+1)t\}}\,dt$$

$$= \frac{n+1}{n}\int_0^\pi \sqrt{2-2\cos nt}\,dt = \frac{n+1}{n}\int_0^{n\pi} \sqrt{2-2\cos t}\,\frac{1}{n}\,dt$$

$$= \frac{n+1}{n}\int_0^\pi \sqrt{2-2\cos t}\,dt = \frac{n+1}{n}2\int_0^\pi \left|\sin\frac{t}{2}\right|dt = 4\frac{n+1}{n}$$

원호 구간 2번과 직선 구간 2번을 모두 더하면 $8+8\frac{n+1}{n}$이고, 따라서 극한값은 16이다.

문항 2

(1) 2차식이 항상 0 이상이 되려면 그 판별식의 값이 0 이하가 되어야 한다. 즉, $D = a^2-4b \le 0$이어야 하므로 $a \le \sqrt{4b}$를 만족시켜야 한다. 그러한 경우의 수는 $b = 1, 2, 3, \cdots, 6$에 대하여 각각 $[\sqrt{4b}]$개씩 있다.

($[x]$: x보다 크지 않은 가장 큰 정수를 나타내는 기호)

경우의 수를 다 합하면

$$[\sqrt{4}]+[\sqrt{8}]+[\sqrt{12}]+[\sqrt{16}]+[\sqrt{20}]+[\sqrt{24}]=2+2+3+4+4+4=19$$

가 된다. 총 36개 경우 중에서 이렇게 될 확률을 구하는 것이므로, 확률은 $\frac{19}{36}$이 된다.

경우를 모두 써보면 아래와 같다.

$(a, b)=$ (1, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 3), (1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4),
(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (1, 6), (1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6)

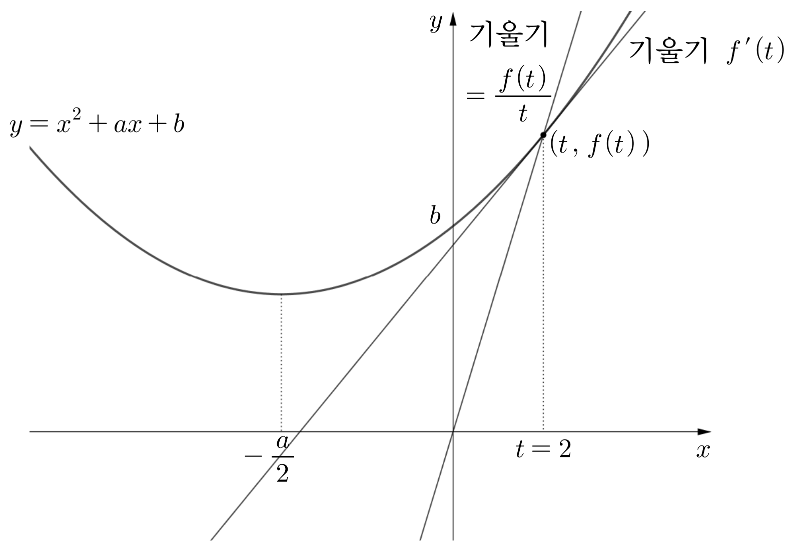
(별해) $b \geq \frac{a^2}{4}$이라는 것에 착안하여 $a=1, 2, 3, 4, 5, 6$ 각각별로 셀 수도 있음.

$a=1, 2$이면 $b=1\sim6$ / $a=3$이면 $b=3\sim6$

$a=4$이면 $b=4\sim6$ / $a=5, 6$이면 가능한 b가 없음.

(2) 근과 계수 사이의 관계를 사용하면 $f(x)=2019$의 두 해의 합은 $-a$이므로 a, b를 고정한 상황에서 r의 기댓값은 두 해의 평균인 $E[r\,|\,a, b]=-\frac{a}{2}$가 된다. a가 1~6까지 변할 수 있고 같은 확률로 나타나므로 a의 기댓값은 그 평균인 $\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=3.5$가 된다. 따라서 r의 기댓값은 $E(r)=-\frac{1}{2}\frac{7}{2}=-\frac{7}{4}=-1.75$

(3) 이 문제는 조건부 확률을 묻는 문제이다.



첫 번째 풀이 : 곡선 위의 점에서 접선의 방정식을 이용

$(t, f(t))$에서 접선의 기울기는 $f'(t)=2t+a$이다. 따라서 접선의 방정식을 써보면 $y-f(t)=(2t+a)(x-t)$가 된다. 이 접선이 y축을 만나는 지점은 $x=0$을 대입하면 $y=f(t)-t(2t+a)=t^2+at+b-(2t^2-at)=-t^2+b$임을 얻는다. 이때 $y=0$이 되려면 $-t^2+b=0$이어야 한다. 따라서 $t\geq2$가 되려면 $b\geq4$가 되어야 한다.

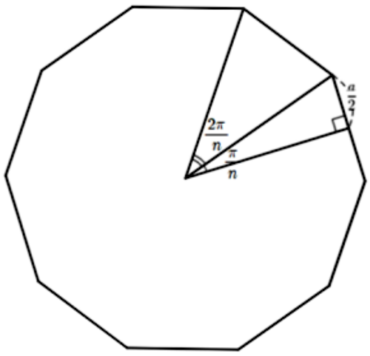
$b\geq4$이면서 $a^2-4b\leq0$인 경우는 $[\sqrt{16}]+[\sqrt{20}]+[\sqrt{24}]=4+4+4=12$가지가 있다. 따라서 이 문제가 묻는 조건부 확률, 즉 $a^2-4b\leq0$인 경우에 $b\geq4$가 될 확률은 전

체 19개 경우 중 12가지 경우이므로 $\frac{12}{19}$가 된다.

두 번째 풀이 : 원점을 지나고 이 곡선에 접하는 직선의 방정식을 찾는 방식 $(0,0)$을 지나고 $y=f(x)$에 접하는 직선을 $y=sx$라고 하자. 이 직선이 $y=f(x)$에 접해야 하므로 $f(x)=sx$라는 식의 해가 중근이 나와야 한다. 따라서 $x^2+ax+b=sx$의 판별식은 0, 즉 $(a-s)^2-4b=0$이 되어야 하고 이것을 풀면 $s=a\pm\sqrt{4b}$가 된다.
이제 s 값이 저렇게 될 때 그 중근이 $x\geq 2$가 될 조건을 구하기로 하자. 일단 $f(x)$가 항상 0 이상이라고 하였고 (1)에서 그렇게 될 조건이 $a^2\leq 4b$임을 알고 있기 때문에 $a-\sqrt{4b}\leq 0$이 된다. 그런데 원점에서 기울기가 0 이하인 직선이라면 $y=f(x)$를 만나는 곳은 $x<0$인 곳 밖에 될 수 없다. 따라서 $x\geq 2$인 곳에서 $y=sx$가 $y=f(x)$를 만나려면 $s=a+\sqrt{4b}$이어야 한다.
$x^2+ax+b=(a+\sqrt{4b})x$ 식을 풀면 $(x-\sqrt{b})^2=0$이 나와서 $x=\sqrt{b}$가 된다. (혹은 이 식을 미분하여 얻어지는 $2x+a=s$에서 x를 구할 수도 있다.)
따라서 $\sqrt{b}\geq 2$가 될 확률, 즉 $a^2-4b\leq 0$인 경우에 $b\geq 4$가 될 확률을 구하면 된다. 이제 남은 부분은 첫 번째 풀이와 같다.

문항 3

(1) 한 변의 길이가 a이고 n개의 변을 가진 정다각형을 $A_n(a)$이라고 하자. $A_n(a)$의 외접원의 중심에서 $A_n(a)$의 한 변 l에 수직으로 그은 선분의 길이는 $\dfrac{a}{2\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$이다. (아래 그림 참조)



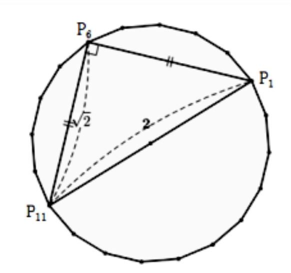
따라서 외접원의 중심과 변 l의 두 꼭짓점으로 이루어진 삼각형의 넓이는 $\dfrac{a^2}{4\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$이 된다. 다각형 $A_n(a)$은 이와 같은 n개의 삼각형으로 분할되기에 $S_n(a)=\dfrac{na^2}{4\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$을 얻게 된다. 치환 $t=\frac{1}{n}$과 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$을 이용하면

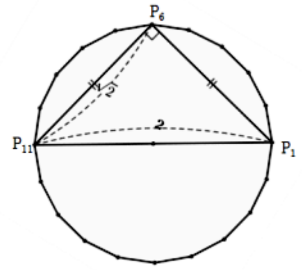
$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{mn}(a)}{S_n(a)} = m\lim_{n\to\infty}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{mn}\right)} = m\lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\,\frac{\frac{\pi t}{m}}{\frac{\pi t}{m}}\,\frac{\cos\left(\frac{\pi t}{m}\right)}{\cos\pi t} = m^2$$

이 된다.

(로피탈 정리를 적용해 $m\lim_{n\to\infty}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{mn}\right)} = m\frac{\pi\left(\frac{-1}{n^2}\right)\sec^2(0)}{\frac{\pi}{m}\left(\frac{-1}{n^2}\right)\sec^2(0)} = m^2$ 을 구해도 된다.

(2) 3차원 좌표를 도입해 다음과 같이 각뿔을 표현하자. 주어진 정다각형을 xy 평면에 놓고 외접원의 중심이 원점($=\mathrm{O}$)이 되게 하자. 변의 길이가 $2\sin\left(\frac{\pi}{20}\right)$ 이므로 외접원의 반지름은 1 이 되고 회전을 통해 꼭짓점 P_1 을 x 축에 위치시키면 P_1 의 좌표는 $\mathrm{P}_1(1, 0, 0)$ 이 된다. 각 $\mathrm{P}_1\mathrm{OP}_2$ 가 $\frac{\pi}{10}$ 이고 꼭짓점 $\mathrm{P}_6, \mathrm{P}_{11}$ 이 각각 꼭짓점 P_1 으로부터 $5, 10$ 번째에 위치하므로 이들의 좌표는 $\mathrm{P}_6 = (0, 1, 0)$, $\mathrm{P}_{11} = (-1, 0, 0)$ 가 된다. (아래 그림 참조)





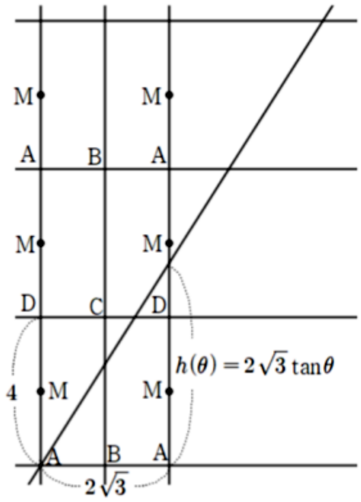
각뿔 A의 밑면 밖에 있는 꼭짓점을 $\mathrm{Q} = (x, y, z)$ 라고 하자. 주어진 세 선분의 길이가 각각 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$ 이므로 좌표를 이용한 두 점의 길이로부터 세 개의 방정식 $(x-1)^2+y^2+z^2=2$, $x^2+(y-1)^2+z^2=3$, $(x+1)^2+y^2+z^2=4$ 를 얻게 되고 이로부터 $x-y=\frac{1}{2}$, $x+y=\frac{1}{2}$ 을 얻을 수 있다. 즉 $x=\frac{1}{2}$, $y=0$ 이 된다. x, y 를 위 세 방정식 중 하나에 대입하면 $z=\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$ 을 얻게 된다. 따라서 A의 부피는

$$\begin{aligned}\frac{S_{20}\left(2\sin\left(\frac{\pi}{20}\right)\right)z}{3} &= \frac{20\left(2\sin\left(\frac{\pi}{20}\right)\right)^2}{3\cdot 4\tan\left(\frac{\pi}{20}\right)}\cdot\frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{10\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{20}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{20}\right)}\\ &= \frac{10\sqrt{7}}{3}\sin\left(\frac{\pi}{20}\right)\cos\left(\frac{\pi}{20}\right) = \frac{10\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)}{2}\\ &= \frac{5\sqrt{7}}{3}\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)\end{aligned}$$

가 된다.

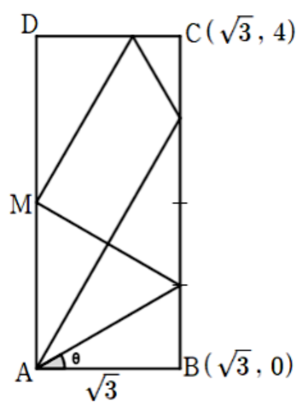
문항 4

좌표평면 위에서 A가 $(0, 0)$, B가 $(\sqrt{3}, 0)$, C가 $(\sqrt{3}, 4)$, D가 $(0, 4)$에 있다고 하자. 이 문제를 쉽게 풀기 위해서는 빛이 반사되어 움직이는 대신 빛은 직선으로 이동하고 대신 원래 그림을 그 직선으로 대칭이동 시켜서 생각하는 것이 편리하다. 그러면 결국 아래 그림처럼 $y=8$, $y=16$, $y=24$, …와 같은 직선은 직선 AB와 같아지며, $y=4$, $y=12$, $y=20$, …과 같은 직선은 직선 CD와 같아진다. 직선 BC에 대칭이동 시켜 생각하면 $x=2\sqrt{3}$은 직선 DA와 같다.



(1) 점 M은 $(0, 2)$에 위치하며 이 점은 정수 n에 대하여 $(2\sqrt{3}, 2+4n)$과 같다. x를 증가 시켰을 때 가장 먼저 만나는 점은 $(2\sqrt{3}, 2)$가 되고, 원점에서 $(2\sqrt{3}, 2)$를 잇는 직선의 기울기는 $\tan\theta = \dfrac{2}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$이 되어 $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ (혹은 30°)를 얻는다.

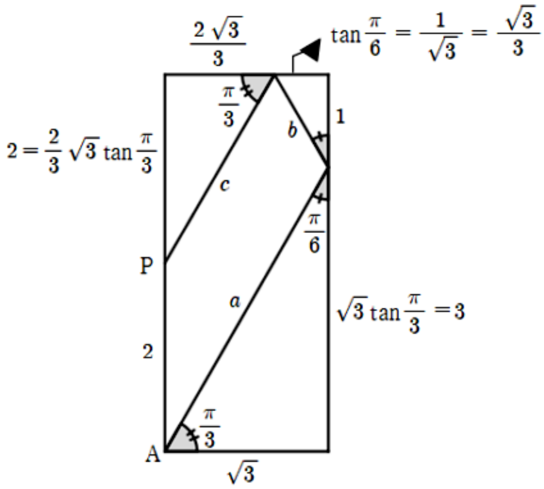
(다른 풀이) 대칭성을 착안하지 못하여도 아래처럼 풀 수 있다. 빛이 처음으로 M을 만나려면 빛이 BC 위의 점 $(\sqrt{3}, 1)$에서 반사하면 된다. 따라서 각도는 $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$에서 얻을 수 있다. 따라서 $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ (혹은 30°)이다.



(2) θ가 $\frac{\pi}{3}$인 경우 $\tan\theta = \sqrt{3}$ 이므로 $y = \sqrt{x}$ 인 직선이 $x = 2\sqrt{3}$ 인 직선을 만나는 지점은 $(2\sqrt{3}, 6)$이 된다. 이때 $(2\sqrt{3}, 4)$는 D와 같고 $(2\sqrt{3}, 8)$은 A와 같으므로 P는 M과 같아진다. 즉 P와 A 사이 거리는 2가 된다.

한편 빛이 이동한 거리는 피타고라스 정리에 의해 $\sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 6^2} = 4\sqrt{3}$ 이 된다.

(다른 풀이) 대칭성을 착안하지 못하여도 다음 그림처럼 빛의 경로를 추적하여 구할 수 있다.



$a = \sqrt{3+9} = 2\sqrt{3}$, $b = \sqrt{1+\frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$, $c = \sqrt{\frac{12}{9}+4} = \frac{\sqrt{12+36}}{3} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$

$a+b+c = \left(2+\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\right)\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

(3) P의 직선 $x = 2\sqrt{3}$ 위에서의 y좌표를 y라고 하면 $y = 2\sqrt{3}\tan\theta$가 된다. 1초당 θ가 $\frac{\sqrt{3}}{2}$씩 일정하게 증가하므로 $\frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2}$이다. 따라서

$\frac{dy}{dt} = \frac{d(2\sqrt{3}\tan\theta)}{dt} = 2\sqrt{3}\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt} = 3\sec^2\theta$

가 된다. 한편 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$의 양변을 $\cos^2\theta$로 나누면 $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$임을 얻는다.

따라서 대입하면 $\frac{dy}{dt} = 3(1+\tan^2\theta)$를 얻는다.

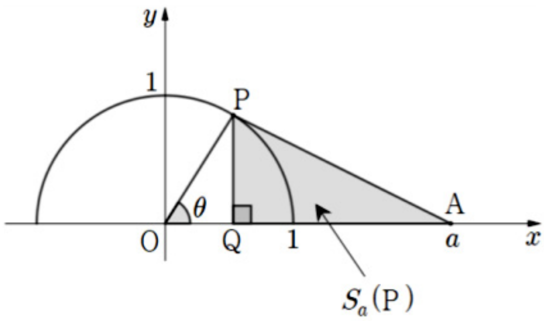
이제 P가 n번째로 M이 된다면 $y = 2+4(n-1)$이 되어야 하므로 $4n-2 = 2\sqrt{3}\tan\theta$가 되어서 $\tan\theta = \frac{4n-2}{2\sqrt{3}}$가 된다. 이것을 위 식에 대입하면 n번째로 P가 M을 만날 때 이 동속도가 아래 식으로 구해진다.

$$a_n = \frac{dy}{dt} = 3\left(1+\left(\frac{2n-1}{\sqrt{3}}\right)^2\right) = 3 + (2n-1)^2 = 4n^2 - 4n + 4$$

08 2020학년도 KAIST 면접 대비 모의 문항

문항 1

원 $C: x^2+y^2=1,\ y\geq 0$과 x축 위에 점 $\mathrm{A}(a, 0)$이 주어져 있다. 원 C 위의 점 P에서 x축에 수선 PQ를 내리고 삼각형 APQ의 넓이를 $S_a(\mathrm{P})$로 나타낸다.(단, $a>1$)

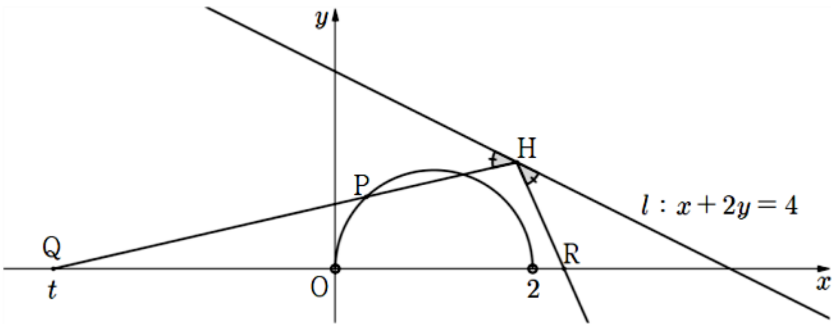


(1) C위에 $(n+1)$개의 $\mathrm{P}_0(1, 0), \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \cdots, \mathrm{P}_n(-1, 0)$이 이 순서로 같은 간격으로 열거될 때 극한값 $M(a)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_a(P_k)$를 구하여라.

(2) $M(a)=S_a(P)$를 만족하는 C위의 점 P 중에서 그 x의 좌표가 최대가 될 때를 (x_a, y_a)라 할 때, $\lim_{a\to\infty}y_a$를 구하여라.

문항 2

점 O를 원점으로 하는 좌표평면에서 반원 $(x-1)^2+y^2=1\ \ (y>0)$ 위의 점 P에 대하여, x축 위의 점 $Q(t,0)\ (t<0)$을 $\overline{OQ}=3\overset{\frown}{OP}$가 되게 정한다. 여기서, $\overset{\frown}{OP}$는 호 OP의 길이를 나타낸다. 점 Q에서 점 P를 향하여 발사하는 광선이 직선 $l: x+2y=4$ 위의 점 H에서 반사되어 x축과 점 R에서 만난다고 할 때 다음 물음에 답하여라.



(1) 입사광선 및 반사광선의 기울기를 각각 m, n으로 할 때, n을 m에 관한 식으로 나타내어라.

(2) 점 P가 원점 O에 무한히 가까워질 때, 점 R의 x좌표의 극한값을 구하여라.

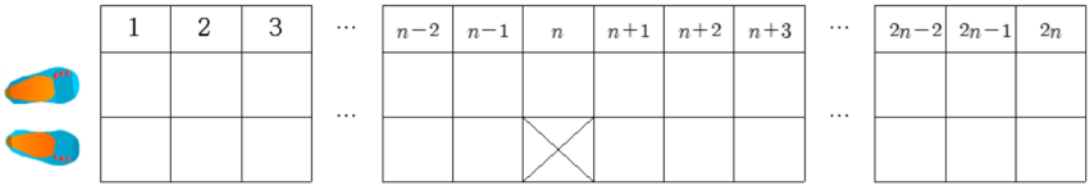
문항 3

(1) 자연수 n에 대하여, $A(n)$을 $x^{2n+1}+y^{2n+1}=1$, $y=-x$, $x=-2020$, $x=2020$에 의해 둘러싸인 영역의 면적이라 하자. 이때 $\lim_{n\to\infty}A(n)$의 값을 구하시오.

(2) 원 $x^2+y^2=1$과 점 $A(2,0)$을 지나는 직선과의 2개의 교점을 P, Q라 하고 점 B는 $B(-1,0)$이다. 이때 $\triangle BPQ$의 넓이의 최댓값을 구하시오.

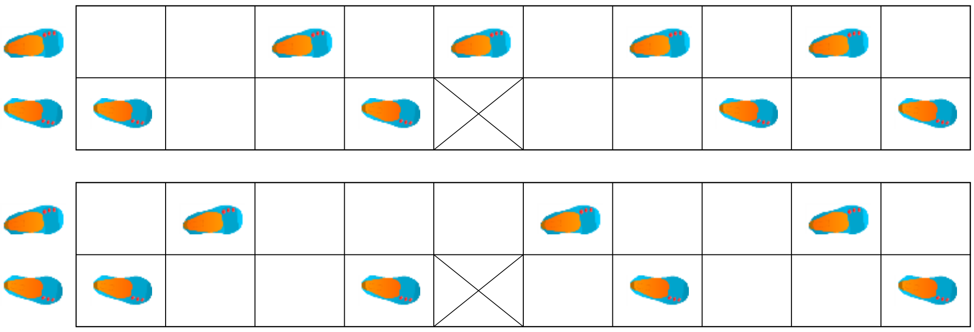
문항 4

그림과 같이 $4n$개의 블록으로 이루어진 통로를 오른발과 왼발을 번갈아 밟으면서 진행방향으로 나아갈 때, 다음과 같은 규칙을 지켜야 한다. (단, 왼발을 밟아야 한다는 것은 왼발만 밟아야 한다는 것이고 오른발로 밟아야 한다는 것은 오른발만 밟아야 한다는 것이다.)

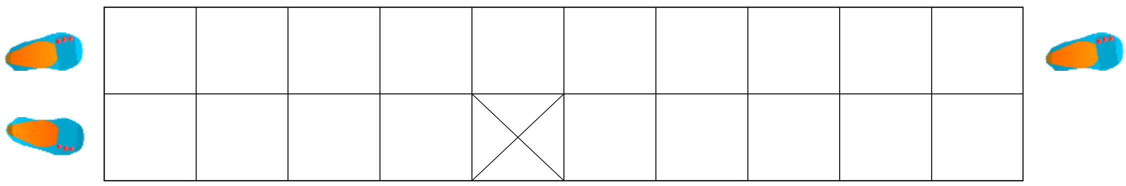


(가) 첫 번째 칸은 반드시 밟는다.
(나) n번째 칸의 오른쪽 블록을 밟지 않아야 한다.
(다) 한 걸음에 한 칸 또는 두 칸을 진행한다.
(라) 오른쪽 블록은 오른발로 밟아야 하고, 왼쪽 블록은 왼발로 밟아야 한다.

〈 $n=5$일 때, 규칙을 지킨 예시들〉



(1) $n=5$일 때, 어떤 사람이 위의 규칙에 따라 이 통로를 지나서 마지막에 왼발로 도착하는 모든 경우의 수를 구하시오.

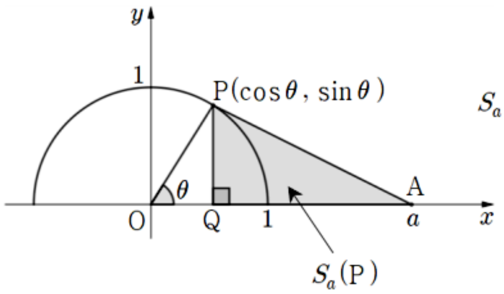


(2) $n=10$일 때, 어떤 사람이 위의 규칙에 따라 이 통로를 지나는데 n번째 칸의 왼쪽 블록도 밟지 않으면서 이 통로를 지나서 마지막에 왼발 또는 오른발로 도착하는 모든 경우의 수를 구하시오.

(3) $n=10$일 때, 어떤 사람이 위의 규칙에 따라 이 통로를 지나서 마지막에 왼발 또는 오른발로 도착하는 모든 경우의 수를 구하시오.

예시 답안

문항 1



$S_a(\mathrm{P}) = \frac{1}{2}(a - \cos\theta)\sin\theta$

(1) $P_k\left(\cos\frac{k\pi}{n},\ \sin\frac{k\pi}{n}\right)$이므로 $S_a(P_k) = \frac{1}{2}\left(a - \cos\frac{k\pi}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n}$ 이다. 따라서

$$M(a) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_a(P_k) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(a - \cos\frac{k\pi}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(a - \cos\frac{k\pi}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(a - \cos x)\sin x\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[-a\cos x + \frac{1}{2}\cos^2 x\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{a}{\pi}$$

(2) $\frac{1}{2}(a - x_a)y_a = S_a(P) = M(a) = \frac{a}{\pi}$, $x_a = \cos\theta$, $y_a = \sin\theta$,

$$y_a = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{a}{a - x_a} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1 - \frac{x_a}{a}}$$

이다. $|x_a| \le 1$이므로 $\lim_{a\to\infty}\frac{x_a}{a} = 0$. 따라서

$$\lim_{a\to\infty} y_a = \lim_{a\to\infty}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1 - \frac{x_a}{a}} = \frac{2}{\pi}$$

이다.

문항 2

(1) 벡터 $\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}(-1, -m) + \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}(1, n)$은 $\angle\mathrm{PHR}$의 이등분선의 방향벡터이다. 이것과 l의 방향벡터 $(2, -1)$과는 수직이므로

$$2\left(\frac{-1}{\sqrt{1+m^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}\right)-\left(\frac{-m}{\sqrt{1+m^2}}+\frac{n}{\sqrt{1+n^2}}\right)=0,$$

$$\frac{m-2}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{n-2}{\sqrt{1+n^2}}$$

이다. 양변을 제곱하면

$$1+\frac{3-4m}{1+m^2}=1+\frac{3-4n}{1+n^2},$$

$$(3-4m)(1+n^2)=(3-4n)(1+m^2),$$

$$(4m-3)n^2-4(m^2+1)n+m(3m+4)=0,$$

$$\{(4m-3)n-(3m+4)\}(n-m)=0$$

이다. 여기서 $n\neq m$ 이므로 $n=\frac{3m+4}{4m-3}$ 이다.

(2) 직선 QH의 방정식이 $y=m(x-t)$ 이므로, 직선 QH와 직선 $l: x+2y=4$ 의 교점 H의 좌표는

$$\mathrm{H}\left(\frac{2mt+4}{2m+1}, \frac{(4-t)m}{2m+1}\right)$$

이다. 여기에서 반원의 중심을 C, $\angle \mathrm{OCP}=\theta$ 로 두면 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-\cos\theta, \sin\theta)$ 이다. 또한, $\overline{\mathrm{OQ}}=3\overset{\frown}{\mathrm{OP}}$ 이므로 $-t=3\theta$ 이다. 그러므로

$$m=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta-t}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta+3\theta}$$

이고 여기에서 $\mathrm{P}\to\mathrm{O}$ 일 때 $\theta\to 0$, $t\to 0$ 이다. 또한,

$$m=\frac{\sin\theta}{\theta}\div\left\{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\cdot\frac{\theta}{1+\cos\theta}+3\right\}\to\frac{1}{3},$$

$$H\to\left(\frac{12}{5}, \frac{4}{5}\right), \quad n\to -3$$

따라서 $\mathrm{P}\to\mathrm{O}$ 일 때 직선 HR은

$$y=-3\left(x-\frac{12}{5}\right)+\frac{4}{5}=-3x+8=-3\left(x-\frac{8}{3}\right)$$

에 수렴한다. 따라서 R의 x좌표의 극한값은 $\frac{8}{3}$ 이다.

문항 3

(1) $x^{2n+1}+y^{2n+1}=1$에서 $y=\sqrt[2n+1]{1-x^{2n+1}}$ 이다. $-1<x_0<1$ 인 x_0에 대해

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{1-x_0^{2n+1}}=1$ 이고 $x_0=-1$ 일 때도 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{1-x_0^{2n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{2n+1}}=1$ 이다.

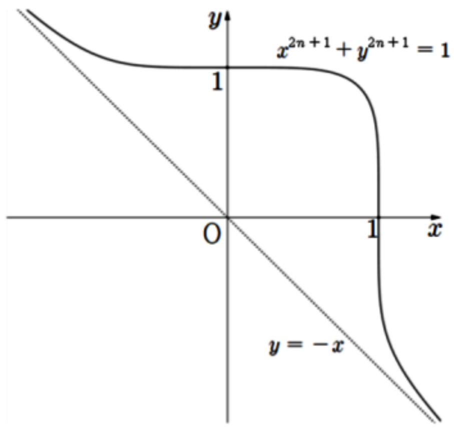
또한, $x_0<-1$ 인 x_0에 대해

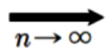
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{1-x_0^{2n+1}}=-x_0\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{\left(-\frac{1}{x_0}\right)^{2n+1}+1}=-x_0$$

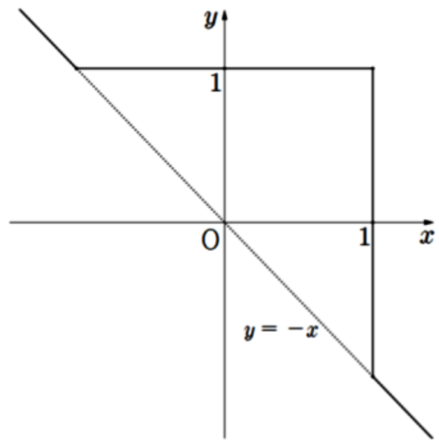
이다. 한편, $x^{2n+1}+y^{2n+1}=1$은 $y=x$에 대해 대칭이므로 $x_0>1$ 인 x_0에 대해서도 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{1-x_0^{2n+1}}=-x_0$ 이다. 이상을 정리하면 $n\to\infty$ 일 때 $x^{2n+1}+y^{2n+1}=1$의 그래프는

ⅰ) $|x| \le 1$ 일 때, $(-1,\ 1)$, $(1,\ 1)$, $(1,\ -1)$을 잇는 ㄱ자 모양에 근사하고
ⅱ) $|x| > 1$ 일 때, 직선 $y = -x$ 에 근사한다.

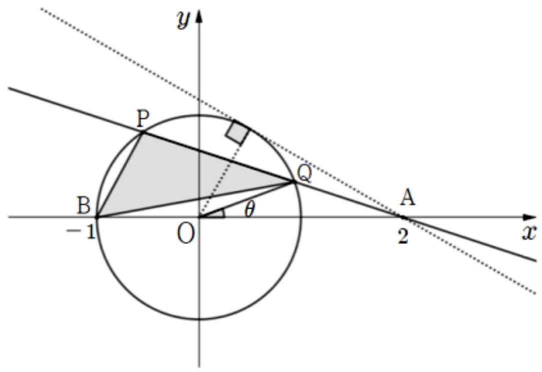
따라서 $\lim_{n\to\infty} A(n)$ 의 값은 꼭짓점이 $(-1,\ 1)$, $(1,\ 1)$, $(1,\ -1)$ 인 삼각형의 넓이와 같으므로 2이다.







(2) 원 $x^2+y^2=1$ 은 x축에 대하여 대칭인 도형이므로 $y \ge 0$ 인 부분만 고려하자.



위의 그림에서 $S = \triangle BPQ$, $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ 라고 두면

$$x_2 = \cos\theta,\ y_2 = \sin\theta,\ \cos\theta > \frac{1}{2},\ 0 < \sin\theta < \frac{\sqrt{3}}{2},\ S = \frac{3}{2}(y_1 - y_2)$$

이고, 직선 QA 의 방정식은 $y = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta - 2}(x-2)$, $x = \dfrac{\cos\theta - 2}{\sin\theta}y + 2$ 이다.

이것을 $x^2+y^2=1$ 에 대입하여 정리하면

$$\left(\frac{\cos\theta-2}{\sin\theta}y+2\right)^2 + y^2 = 1,\ \{(\cos\theta-2)y + 2\sin\theta\}^2 + y^2\sin^2\theta = \sin^2\theta,$$

$$(5-4\cos\theta)y^2 + \{4(\cos\theta-2)\sin\theta\}y + 3\sin^2\theta = 0,$$

$$(y-\sin\theta)\{(5-4\cos\theta)y - 3\sin\theta\} = 0$$

이다. 그러므로 $y_1 = \dfrac{3\sin\theta}{5-4\cos\theta}$, $y_2 = \sin\theta$ 이고

$$S = \frac{3}{2}\left(\frac{3\sin\theta}{5-4\cos\theta} - \sin\theta\right),$$

$$\frac{dS}{d\theta}=\frac{3}{2}\left\{\frac{3\cos\theta(5-4\cos\theta)-3\sin\theta(4\sin\theta)}{(5-4\cos\theta)^2}-\cos\theta\right\}$$

이다. $\frac{dS}{d\theta}=0$ 에서

$$15\cos\theta-12\cos^2\theta-12\sin^2\theta-\cos(5-4\cos\theta)^2=0,$$

$$8\cos^3\theta-20\cos^2\theta+5\cos\theta+6=0,$$

$$(\cos\theta-2)(8\cos^2\theta-4\cos\theta-3)=0,$$

$$\cos\theta=\frac{2\pm\sqrt{4+24}}{8}=\frac{1\pm\sqrt{7}}{4}$$

$\cos\theta_1=\frac{1+\sqrt{7}}{4}$ 이라 두자. 그러면 $\frac{dS}{d\theta}=\frac{(-3\cos\theta-2)(8\cos^2\theta-4\cos\theta-3)}{(5-4\cos\theta)^2}$ 이므로

	0	θ_1	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{dS}{d\theta}$	$+$	0	$-$
$S(\theta)$	↗		↘

그러므로 $\cos\theta=\frac{1+\sqrt{7}}{4}$ 이고 $\sin\theta=\frac{\sqrt{7}-1}{4}$ 일 때, S는 최댓값을 가진다. 그 최댓값을 구해보면

$$S=\frac{3}{2}\left(\frac{3\times\frac{\sqrt{7}-1}{4}}{5-4\times\frac{1+\sqrt{7}}{4}}-\frac{\sqrt{7}-1}{4}\right)=\frac{3}{2}\left(\frac{3}{4-\sqrt{7}}-1\right)\frac{\sqrt{7}-1}{4}$$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}-1\right)\frac{\sqrt{7}-1}{4}=\frac{3}{2}\times\frac{1+\sqrt{7}}{3}\times\frac{\sqrt{7}-1}{4}=\frac{3}{4}$$

이다. 따라서 $\triangle BPQ$ 의 넓이의 최댓값은 $\frac{3}{4}$ 이다.

(다른 풀이) 점 A 를 지나는 직선을 $y=m(x-2)$, 점 P, Q 의 x 좌표를 각각 α, $\beta\,(\alpha<\beta)$ 라 하면, α, β는 $x^2+m^2(x-2)^2=1$, 즉 $(m^2+1)x^2-4m^2x+4m^2-1=0$ 의 두 실근이므로 근과 계수와의 관계에서

$$\alpha+\beta=\frac{4m^2}{m^2+1},\quad \alpha\beta=\frac{4m^2-1}{m^2+1} \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

또, $\frac{D}{4}=4m^4-(m^2+1)(4m^2-1)>0$

$$-3m^2+1>0 \qquad \therefore\ 0<m^2<\frac{1}{3} \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

넓이를 S 라 하면

$$S=\triangle BPQ=\triangle APB-\triangle AQB$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot m(\alpha-2)-\frac{1}{2}\cdot 3\cdot(\beta-2)$$

$$=\frac{3}{2}m(\alpha-\beta)$$

①에서

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\left(\frac{4m^2}{m^2+1}\right)^2-4\left(\frac{4m^2-1}{m^2+1}\right)=\frac{4(1-3m^2)}{(m^2+1)^2}$$

따라서

$$S^2=\frac{9m^2(1-3m^2)}{(m^2+1)^2},$$

$$S^2(m^2+1)^2=9m^2(1-3m^2),$$

$$(S^2+27)m^4+(2S^2-9)m^2+S^2=0$$

m^2 이 실수이므로 이 식을 m^2 의 2 차 방정식으로 생각하여

$$D=(2S^2-9)^2-4(S^2+27)S^2\ge 0,$$

$$144S^2-81\le 0,\quad S^2\le\frac{9}{16}$$

$S>0$ 이므로 $0<S\le\frac{3}{4}$ 이고 등호는 $D=0$ 일 때로 $m^2=-\frac{2S^2-9}{2(S^2+27)}=\frac{1}{7}$ 이다.

이것은 ②를 만족한다. 따라서 $\triangle BPQ$ 의 넓이의 최댓값은 $\frac{3}{4}$ 이다.

문항 4

(1) 한 걸음에 한 칸 진행을 1로, 두 칸 진행을 2로 나타내자.

ⅰ) 5번째 칸 왼쪽 블록을 밟는 경우

4번째 칸 오른발에서 거꾸로 첫 번째 칸까지를 생각하면 (1, 1, 1), (1, 2), (2, 1)의 3가지가 있고, 3번째 칸 오른발에서 거꾸로 첫 번째 칸까지 생각하면 (1, 1), (2)의 2가지가 있으므로 모두 $3+2=5$(가지) 이다.

5번째 칸 이후는 마지막에 왼발로 도착하므로 10번째 칸까지 모두 홀수 번 걸음이어야 한다. 10번째 칸 오른발에서 거꾸로 5번째 칸까지를 생각하면 (1, 1, 1, 1, 1), (2, 2, 1), (2, 1, 2), (1, 2, 2)의 4가지가 있고, 9번째 칸 오른발에서 거꾸로 5번째 칸까지를 생각하면 (2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2)의 3가지가 있으므로 모두 $4+3=7$(가지) 이다.

그러므로 구하는 경우의 수는 $5\times 7=35$ 이다.

ⅱ) 5번째 칸 왼쪽 블록을 밟지 않는 경우

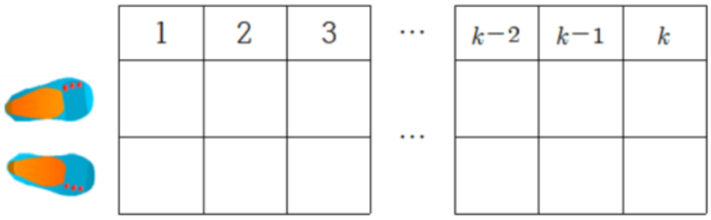
4번째 칸이 오른발이고 6번째 칸이 왼발일 때, 4번째 칸 오른발에서 거꾸로 첫 번째 칸까지의 경우는 ⅰ)에 의해서 3가지이다. 6번째 칸 이후로는 마지막에 왼발로 도착하므로 10번째 칸까지 모두 홀수 번 걸음이어야 한다. 10번째 칸 오른발에서 거꾸로 6번째 칸까지를 생각하면 (2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2)의 3가지가 있고, 9번째 칸 오른발에서 거꾸로 6번째 칸까지를 생각하면 (1, 1, 1)의 1가지가 있으므로 모두 $3+1=4$(가지) 이다. 그러므로 $3\times 4=12$(가지) 이다.

4번째 칸이 왼발이고 6번째 칸이 오른발일 때, 4번째 칸 왼발에서 거꾸로 첫 번째 칸까지의 경우는 반대발로 대응을 시키면 4번째 칸 오른발에서 거꾸로 첫 번째 칸까지의 경우가 되므로 ⅰ)에 의해서 3가지이다. 6번째 칸 이후로는 마지막에 왼발로 도착하므로 10번째

칸까지 모두 짝수 번 걸음이어야 한다. 10번째 칸 오른발에서 거꾸로 6번째 칸까지를 생각하면 (1, 1, 1, 1), (2, 2)의 2가지가 있고, 9번째 칸 오른발에서 거꾸로 6번째 칸까지를 생각하면 (2, 1), (1, 2)의 2가지가 있으므로 모두 $2+2=4$(가지) 이다. 그러므로 $3\times4=12$(가지) 이다. 그러므로 구하는 경우의 수는 24이다.

ⅰ), ⅱ)에 의해서 구하는 경우의 수는 $35+24=59$이다.

(2) 아래 그림과 같이 $2k$개의 블록으로 이루어진 통로를 오른발과 왼발을 번갈아 밟으면서, 문제에서 주어진 규칙 중 (가), (다), (라) 세 가지 규칙을 지켜 이 통로의 마지막 칸(k번째 칸)에 왼발 또는 오른발로 도착하는 경우의 수를 a_k라 하자.



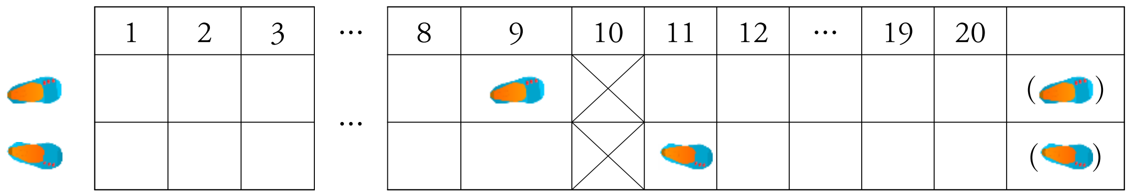
그러면, $k-1$번째 칸의 블록을 밟고 k번째 칸에 도착하는 경우의 수 a_{k-1}과 $k-2$번째 칸의 블록을 밟고 한 번에 두 칸을 진행해 k번째 칸에 도착하는 경우의 수 a_{k-2}의 합이 a_k임을 알 수 있다. 즉, $a_k=a_{k-1}+a_{k-2}$이다. 또한, $a_1=2$(①왼발, ②오른발), $a_2=2$(①왼발, 오른발 ②오른발, 왼발)이므로

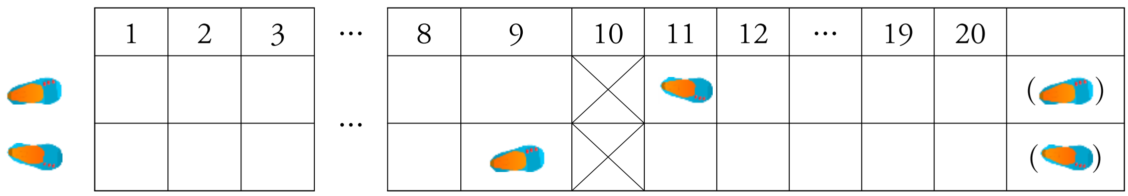
$a_3=4,\ a_4=6,\ a_5=10,\ a_6=16,\ a_7=26,\ a_8=42,\ a_9=68,\ a_{10}=110,\ a_{11}=178,\ a_{12}=288,\cdots$이다.

한편, a_k의 경우 중 마지막 칸(k번째 칸)에 왼발로 도착하는 경우에서 왼발과 오른발을 서로 바꾸면 마지막 칸(k번째 칸)에 오른발로 도착하는 경우가 되므로 두 경우의 수는 모두 $\frac{a_k}{2}$이다.

마찬가지로, a_k의 경우 중 첫째 칸(1번째 칸)을 왼발로 밟는 경우에서 왼발과 오른발을 서로 바꾸면 첫째 칸(1번째 칸)을 오른발로 밟는 경우가 되므로 두 경우의 수는 모두 $\frac{a_k}{2}$이다.

이제 구하고자 하는 경우의 수를 구해보자.





(※ 마지막 칸의 그림은 양발로 도착하는 것을 나타내는 것이 아니라 왼발 또는 오른발로 도착하는 그림이다.)

10번째 칸 왼쪽 블록도 밟지 않는 경우는 (9번째 왼발, 11번째 오른발)인 경우와 (9번째 오른발, 11번째 왼발)인 경우가 있는데 각각의 경우에서 오른발과 왼발을 서로 바꾸면 이 두 경우가 일대일 대응이 된다. 따라서 경우의 수는 같다. 이제 (9번째 왼발, 11번째 오른발)인 경우를 고려하자. 1번째 칸에서 시작하여 9번째 칸에서 왼발로 끝나는 경우의 수는 $\frac{a_9}{2}=\frac{68}{2}=34$ 이다. 한편, 11번째 칸에서 오른발로 시작하여 20번째 칸을 지나서 왼발 또는 오른발로 끝나는 경우는, a_{11} 에 해당하는 경우 중 첫째 칸을 오른발로 밟는 경우에 해당하므로 그 경우의 수는 $\frac{a_{11}}{2}=\frac{178}{2}=89$ 이다. 그러므로 10번째 칸 왼쪽 블록도 밟지 않는 경우의 수는 $34\times89\times2=6052$ 이다.

(3)

위의 (2)에 의해서 ⅰ) 10번째 칸 왼쪽 블록도 밟지 않는 모든 경우의 수는 3740 이다.

ⅱ) 10번째 칸 왼쪽 블록을 밟는 경우

	1	2	3	…	8	9	10	11	12	…	19	20	
				…									()
													()

(※ 마지막 칸의 그림은 양발로 도착하는 것을 나타내는 것이 아니라 왼발 또는 오른발로 도착하는 것을 나타내는 그림이다.)

1번째 칸에서 시작하여 10번째 칸의 왼발에서 끝나는 경우의 수는 $\frac{a_{10}}{2}=\frac{110}{2}=55$ 이다. 10번째 칸의 왼발에서 시작하여 20번째 칸을 통과하여 왼발 또는 오른발로 도착하는 경우는 a_{12} 에 해당하는 경우 중 첫째 칸을 왼발로 밟는 경우에 해당한다. 따라서 그 경우의 수는 $\frac{a_{12}}{2}=\frac{288}{2}=144$ 이다. 그러므로 구하는 경우의 수는 $55\times144=7920$ 이다.

ⅰ), ⅱ)에 의해서 구하는 경우의 수는 $6052+7920=13972$ 이다.

발간을 도와주신 분

기 획

전영근 부산광역시교육청 교 육 국 장
변용권 부산광역시교육청 중등교육과장
강은영 부산광역시교육청 중등교육과 장학관
강상원 부산광역시교육청 중등교육과 장학사

집 필

부산광역시교육청 논술면접지원단(수리팀)

검 토

부산광역시교육청 논술면접지원단(수리팀)

2020 대입 수시 대비
제시문 면접 지도 자료(수리)

발행처 : 부산광역시교육청
발행일 : 2019. 10.