Ⅱ-3 여러 가지 방정식 P. 44–48

1. ④	2. ④	3. ④	4. ⑤	5. ③
6. ①	7. ⑤	8. ③	9. 5	10. ①
11. 2, 10	12. 10	13. ④	14. ①	15. -4
16. 394	17. 15	18. ⑤		

3 x^4+ax^2+b가 이차식 $(x-1)(x-\sqrt{2})$로 나누어떨어지므로 $x=1$, $x=\sqrt{2}$는 사차방정식 $x^4+ax^2+b=0$ 의 근이다.

$x=1$, $x=\sqrt{2}$를 $x^4+ax^2+b=0$에 각각 대입하면

$a+b=-1$, $2a+b=-4$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-3$, $b=2$

$x^4+ax^2+b=x^4-3x^2+2$

$=(x^2-1)(x^2-2)=0$

$\therefore x^2-1=0$ 또는 $x^2-2=0$

$\therefore x=\pm 1$, $x=\pm\sqrt{2}$

따라서 구하는 네 근의 곱은 2 이다.

4 $x(x-1)(x-2)(x-3)-24=0$ 에서

$(x^2-3x)(x^2-3x+2)-24=0$

$x^2-3x=t$ 로 놓으면

$t(t+2)-24=0$, $t^2+2t-24=0$

$(t+6)(t-4)=0$

$\therefore t=-6$ 또는 $t=4$

(i) $t=-6$일 때,

$x^2-3x+6=0$의 판별식을 D라고 하면

$D=9-24=-15<0$

이므로 허근을 갖고, 근과 계수의 관계로부터 두 허근의 곱은 6이다.

(ii) $t=4$일 때,

$x^2-3x-4=0$, $(x+1)(x-4)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=4$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 허근의 곱은 6이다.

5 $2x^3+5x^2+(k+3)x+k=0$에서

$(x+1)(2x^2+3x+k)=0$

주어진 방정식의 세 근이 음수가 되기 위해서는 $2x^2+3x+k=0$의 두 근이 음수가 되어야 한다.

$2x^2+3x+k=0$의 두 근을 α, β라고 하면

(i) $D=9-8k\geq 0$

$\therefore k\leq\dfrac{9}{8}$

(ii) $\alpha+\beta=-\dfrac{3}{2}<0$

(iii) $\alpha\beta=\dfrac{k}{2}>0$ $\therefore k>0$

이상에서 $0<k\leq\dfrac{9}{8}$

6 $x^3+(8-a)x^2+(a^2-8a)x-a^3=0$에서

$(x-a)(x^2+8x+a^2)=0$

방정식 $x^2+8x+a^2=0$은 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 할 때

$\dfrac{D}{4}=16-a^2>0$

따라서 $-4<a<4$ ⋯⋯㉠

또한 $x=a$는 $x^2+8x+a^2=0$의 근이 아니어야 하므로 $2a^2+8a\neq 0$

따라서 $a\neq 0$이고 $a\neq -4$ ⋯⋯㉡

㉠, ㉡에 의해 정수 a의 개수는 6

7 ㄱ. $x^3-1=0$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^3=1$

$\therefore \omega^{10}=(\omega^3)^3\omega=\omega$

ㄴ. $x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이고, 방정식의 계수가 실수이므로 ω의 켤레복소수인 $\overline{\omega}$도 $x^2+x+1=0$의 근이다. 즉

$\omega^2+\omega+1=0$, $\overline{\omega^2}+\overline{\omega}+1=0$

$\therefore \dfrac{\omega^2}{1+\omega}+\dfrac{\overline{\omega}}{1+\overline{\omega^2}}=-2$

ㄷ. $\omega^{4n}+(\omega+1)^{4n}+1=0$

$(\omega^3\omega)^n+(-\omega^2)^{4n}+1=0$

$\omega^{2n}+\omega^n+1=0$

(i) $n=3k\,(k=1,\,2,\,3,\,\cdots)$이면

$\omega^{2n}=1,\ \omega^n=1$이므로

$\omega^{2n}+\omega^n+1=3$

(ii) $n=3k+1\,(k=0,\,1,\,2,\,\cdots)$이면

$\omega^{2n}=\omega^{6k+2}=\omega^2,\ \omega^n=\omega^{3k+1}=\omega$이므로

$\omega^{2n}+\omega^n+1=0$

(iii) $n=3k+2\,(k=0,\,1,\,2,\,\cdots)$이면

$\omega^{2n}=\omega^{6k+4}=\omega,\ \omega^n=\omega^{3k+2}=\omega^2$이므로

$\omega^{2n}+\omega^n+1=0$

이상에서 $\omega^{4n}+(\omega+1)^{4n}+1=0$을 만족시키는 30 이하의 양의 정수 n의 개수는

30$-$(30 이하의 3의 배수의 개수)$=$20

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

8 오각기둥의 부피를 구하면

$$\left[x(x+3)+\frac{2\{(x+3)+x\}}{2}\right](x+1)=108$$

$(x^2+3x+2x+3)(x+1)=108$

$x^3+6x^2+8x-105=0$

$(x-3)(x^2+9x+35)=0$

$x^2+9x+35>0$ 이므로

$x=3$

9 $\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}\cdot\overline{\mathrm{PC}}$ 이므로

$(2\sqrt{6}\,x)^2=(x^2-x+4)(x^2+x+4)$

$x^4-17x^2+16=0,\qquad (x^2-1)(x^2-16)=0$

즉 $x^2=1,\ x^2=16$이므로

$x=1,\ x=4\ (\because\ x>0)$

따라서 모든 x 의 값의 합은 5 이다.

10 $f(-1)-a=f(1)-a=f(2)-a=0$이므로

$g(x)=f(x)-a$라 할 때 삼차식 $g(x)$는

$g(x)=2(x-2)(x-1)(x+1)=f(x)-a$

이라 할 수 있다.

$g(0)=5-a=4$이므로 $\therefore a=1$

14 $\begin{cases} x^2-xy=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ xy-y^2=6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times 3-$㉡을 하면

$3x^2-4xy+y^2=0$

$(x-y)(3x-y)=0$

$\therefore y=x$ 또는 $y=3x$

(i) $y=x$일 때, 해가 존재하지 않는다.

(ii) $y=3x$일 때,

$y=3x$를 ㉠에 대입하면

$x^2=-1$

$\therefore x=i,\ y=3i$ 또는 $x=-i,\ y=-3i$

(i), (ii)에서

$\alpha\beta=-3$

15 $(x-a)(x+a)(x^2+5)+9$
$=x^4+(5-a^2)x^2-5a^2+9$ $\cdots\cdots$ ①

가 완전제곱식이어야 하므로

$(5-a^2)^2-4(-5a^2+9)$
$=a^4+10a^2-11=0$

이어야 한다.

즉, $a^2=1$이다.

①에 대입하면

$x^4+4x^2+4=(x^2+2)^2$이다.

$\{P(x)+x\}^2=(x^2+2)^2$이므로

$P(x)=-x^2-x-2$이다.

따라서 $P(a^2)=P(1)=-4$이다.

16 $\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$는 이 순서대로 네 개의 연속된 짝수이므로

$\overline{AD}=2n$, $\overline{AC}=2n+2$,

$\overline{BC}=2n+4$, $\overline{AB}=2n+6$ (단, n은 자연수)

이라 하자.

$\overline{BD}=x$, $\overline{CD}=y$라 하면 $\quad x+y=2n+4$

두 삼각형 ABD와 ACD는 직각삼각형이므로

$(2n+6)^2-x^2=(2n+2)^2-y^2$, 즉 $x-y=8$

따라서 $\quad x=n+6$, $y=n-2$

직각삼각형 ACD에서

$(2n+2)^2=4n^2+(n-2)^2$

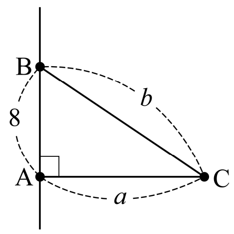
$n^2-12n=0$, 즉 $n=12$

따라서 $\overline{AB}=30$, $\overline{AC}=26$이므로 두 원의 넓이의 합 S는

$S=15^2\pi+13^2\pi=394\pi$

그러므로 $\quad \dfrac{S}{\pi}=394$

17



직선도로 AB의 길이는

$32-24=8$ (km)

직선도로 AC, BC의 길이를 각각 a, b라고 하면

$a+b=32$ ……㉠

$8^2+a^2=b^2$ ……㉡

㉡에서 $\quad 64=(b+a)(b-a)$ ……㉢

㉠을 ㉢에 대입하면

$b-a=2$ ……㉣

㉠+㉣을 하면 $\quad 2b=34$

$\therefore b=17$

$b=17$을 ㉠에 대입하면 $\quad a=15$

따라서 직선도로 AC의 길이는 15 km이다.

18 ㄱ. 삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근이 ω이므로

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$에서

$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

ω의 켤레복소수 $\overline{\omega}$는 $x^3=1$의 다른 한 허근이므로

$\overline{\omega}^3=1$, $\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$, $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

ㄱ. $\overline{\omega}^3=1$ (참)

ㄴ. $\dfrac{1}{\omega}+\left(\dfrac{1}{\omega}\right)^2=\dfrac{\omega+1}{\omega^2}=\dfrac{-\omega^2}{\omega^2}=-1$

$\dfrac{1}{\overline{\omega}}+\left(\dfrac{1}{\overline{\omega}}\right)^2=\dfrac{\overline{\omega}+1}{\overline{\omega}^2}=\dfrac{-\overline{\omega}^2}{\overline{\omega}^2}=-1$

$\therefore \dfrac{1}{\omega}+\left(\dfrac{1}{\omega}\right)^2=\dfrac{1}{\overline{\omega}}+\left(\dfrac{1}{\overline{\omega}}\right)^2$ (참)

ㄷ. $(-\omega-1)^n=(\omega^2)^n$

$\left(\dfrac{\overline{\omega}}{\omega+\overline{\omega}}\right)^n=(-\overline{\omega})^n=\left(-\dfrac{1}{\omega}\right)^n$

$=(-1)^n\times\left(\dfrac{1}{\omega}\right)^n=(-1)^n\times(\omega^2)^n$

$(-\omega-1)^n=\left(\dfrac{\overline{\omega}}{\omega+\overline{\omega}}\right)^n$을 만족시키는 n은

$(\omega^2)^n=(-1)^n\times(\omega^2)^n, 1=(-1)^n$을 만족시키므로 n은 짝수이다.

그러므로 100 이하의 짝수 n의 개수는 50(참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

Ⅱ-4 여러 가지 부등식 p.52–56

1. ②	2. ①	3. 4	4. ⑤	5. ②
6. 22	7. ③	8. ④	9. ①	10. ②
11. ⑤	12. ①	13. ①	14. ④	15. 20
16. $3 \le k \le 6$	17. ⑤	18. 46	19. 6	

3 부등식 $|x+1|+|x-2|<5$에서

(i) $x<-1$일 때

$-(x+1)-(x-2)<5$

$-x-1-x+2<5, \quad -2x<4$

$\therefore x>-2$

그런데 $x<-1$이므로

$-2<x<-1$

(ii) $-1 \le x < 2$일 때

$(x+1)-(x-2)<5$, 즉 $0 \cdot x<2$

따라서 부등식의 해는 모든 실수이다.

그런데 $-1 \le x<2$이므로

$-1 \le x < 2$

(iii) $x \ge 2$일 때

$(x+1)+(x-2)<5, \quad 2x<6$

$\therefore x<3$

그런데 $x \ge 2$이므로

$2 \le x < 3$

이상에서 부등식의 해는

$-2<x<3$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는

$-1, 0, 1, 2$

의 4개이다.

4 ㄱ. 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)>g(x)$이므로

$x^2-ax+b>ax+2b$

$x^2-2ax-b>0$ (참)

ㄴ. $x^2-2ax-b>0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 $x^2-2ax-b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2+b<0$

$b< -a^2 \le 0 \qquad \therefore b<0$ (참)

ㄷ. $f(x)=x^2-ax+b=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b$

함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 y좌표는 $-\frac{a^2}{4}+b$이고, 직선 $y=g(x)$의 y절편은 $2b$이므로

$\left(-\frac{a^2}{4}+b\right)-2b=-\frac{a^2}{4}-b$

$>-\frac{a^2}{4}+a^2$ ($\because b<-a^2$)

$=\frac{3}{4}a^2 \ge 0$

$-\frac{a^2}{4}+b>2b$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 y좌표는 직선 $y=g(x)$의 y절편보다 크다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

5 $f\left(\frac{x+k}{2}\right) \le 0$에서 $\frac{x+k}{2}=t$로 놓으면 주어진 그래프에서 $f(t) \le 0$을 만족시키는 t의 값의 범위가 $-1 \le t \le 2$이므로

$-1 \le \frac{x+k}{2} \le 2$

$-2 \le x+k \le 4$

$-2-k \le x \le 4-k$

이때 부등식의 해가 $-3 \le x \le 3$이므로

$-2-k=-3, \ 4-k=3$

$\therefore k=1$

6 $f(1)=f(11)=k$이므로

$f(x)=(x-1)(x-11)+k$

$=x^2-12x+11+k$

$f(x)<f(2)-2$이므로

$x^2-12x+11+k<-11+k$

$x^2-12x+22<0$

$\therefore 6-\sqrt{14}<x<6+\sqrt{14}$

따라서 $\alpha=6-\sqrt{14}$, $\beta=6+\sqrt{14}$이므로

$\alpha\beta=22$

8 이차부등식 $(a+b)x^2+(b+c)x+(c+a)>0$의 해가 $1<x<2$이므로 $a+b<0$

주어진 부등식은 해가 $1<x<2$이고

x^2의 계수가 1인 이차부등식인 $x^2-3x+2<0$과 계수의 비가 같으므로

$a+b=\dfrac{b+c}{-3}=\dfrac{c+a}{2}=k$ $(k<0)$라고 하면

$a+b=k,\ b+c=-3k,\ c+a=2k$

$\therefore a=3k,\ b=-2k,\ c=-k$

따라서 $ax^2+bx+c>0$은 $3kx^2-2kx-k>0$이고, 이때 $k<0$이므로

$3x^2-2x-1<0$, $(3x+1)(x-1)<0$

$\therefore -\dfrac{1}{3}<x<1$

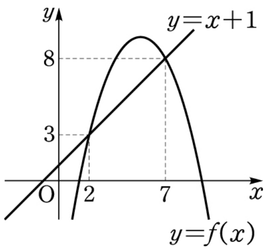
따라서 $\alpha=-\dfrac{1}{3},\ \beta=1$이므로 $\alpha+\beta=\dfrac{2}{3}$

11 직선 $y=x+1$에서 $y=3$일 때

$x=2$

$y=8$일 때 $x=7$

직선 $y=x+1$과 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같이 두 점 $(2,\ 3)$, $(7,\ 8)$에서 만난다.



$f(x)-x-1>0$, 즉 $f(x)>x+1$의 해는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=x+1$보다 위쪽에 있을 때의 x의 값의 범위와 같으므로

$2<x<7$

따라서 정수 x는 $3,4,5,6$이므로 구하는 합은 18이다.

12 $x^2-a^2x=x(x-a^2)\ge 0$에서

$x\le 0$ 또는 $x\ge a^2$

$x^2-4ax+4a^2-1$

$=\{x-(2a-1)\}\{x-(2a+1)\}<0$

에서 $2a-1<x<2a+1$

(i) $0<a<\dfrac{1}{2}$일 때

연립부등식의 해는

$-1<2a-1<x\le 0$ 또는 $a^2\le x<2a+1<2$

$0<a^2<\dfrac{1}{4}$이고 $1<2a+1<2$이므로

$x=0,1$의 2개 정수해가 존재한다.

(ii) $a=\dfrac{1}{2}$일 때

연립부등식의 해는 $\dfrac{1}{4}=a^2\le x<2a+1=2$ 이므로

$x=1$의 1개 정수해가 존재한다.

(iii) $\dfrac{1}{2}<a<1$일 때

연립부등식의 해는 $a^2\le x<2a+1$

$\dfrac{1}{4}<a^2<1$이고 $2<2a+1<3$이므로

$x=1,2$의 2개 정수해가 존재한다.

(iv) $a=1$일 때

연립부등식의 해는

$1=a^2=2a-1<x<2a+1=3$

이므로 $x=2$의 1개 정수해가 존재한다.

(v) $1<a<\sqrt{2}$일 때

연립부등식의 해는 $a^2\le x<2a+1$

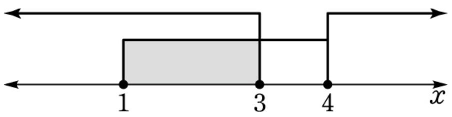
$1<a^2<2$이고

$3<2a+1<1+2\sqrt{2}<4$이므로 $x=2,3$의 2개 정수해가 존재한다.

(i)~(v)에 의하여 $a=\dfrac{1}{2}$ 또는 $a=1$일 때, 1개 정수해가 존재한다.

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 $\dfrac{3}{2}$이다.

14 부등식 $x^2+ax+b \geq 0$과 $x^2+cx+d \leq 0$의 해를 수직선에 나타내면 다음 그림과 같다.



앞의 그림에서 $x^2+ax+b \geq 0$의 해는

$x \leq 3$ 또는 $x \geq 4$

이므로

$(x-3)(x-4) \geq 0$

$x^2-7x+12 \geq 0$

$\therefore a=-7,\ b=12$

$x^2+cx+d \leq 0$의 해는 $1 \leq x \leq 4$

이므로

$(x-1)(x-4) \leq 0$

$x^2-5x+4 \leq 0$

$\therefore c=-5,\ d=4$

$\therefore a+b+c+d=4$

15 제2종 일반주거지역 건물의 건폐율은 60% 이하이므로

$\dfrac{5}{2}x(x-2) \leq 60$, 즉 $x(x-2) \leq 24$ ······㉠

제2종 일반주거지역 건물의 용적률은 150% 이상 250% 이하이므로

$150 \leq 10x(x-2) \leq 250$, 즉

$15 \leq x(x-2) \leq 25$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $15 \leq x(x-2) \leq 24$이므로

$5 \leq x \leq 6$

$\therefore 15 \leq 5x-10 \leq 20$

따라서 가로의 길이의 최댓값은 20이다.

16 $\overline{\mathrm{AB}}//\overline{\mathrm{DC}}$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{DC}}$이므로 □ABCD는 평행사변형이다.

□ABCD의 밑변 AB의 길이는 $k+1$, 높이는 k이므로 넓이는 $k(k+1)$이다.

따라서 $12 \leq k(k+1) \leq 42$에서

$\begin{cases} 12 \leq k(k+1) \\ k(k+1) \leq 42 \end{cases}$

연립부등식을 풀면

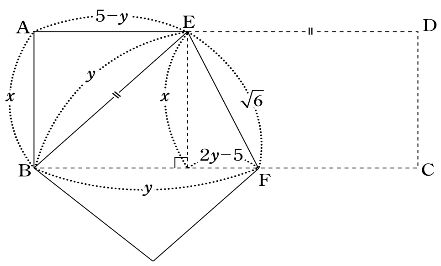
$-7 \leq k \leq -4$ 또는 $3 \leq k \leq 6$

이때 k가 양수이므로 구하는 k의 값의 범위는 $3 \leq k \leq 6$이다.

17 $\overline{\mathrm{AB}}=x$, $\overline{\mathrm{DE}}=y$라고 하면 다음 그림에서

$\begin{cases} x^2=y^2-(5-y)^2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2=(\sqrt{6})^2-(2y-5)^2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

(단, $x>0,\ 0<y<5$)



㉠ − ㉡을 하면 $4y^2-10y-6=0$

$(2y+1)(y-3)=0$

$\therefore y=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $y=3$

그런데 $0<y<5$이므로 $y=3$

$y=3$을 ㉠에 대입하면 $x^2=5$

$\therefore x=\sqrt{5}\ (\because x>0)$

18 $ax^3+2bx^2+4bx+8a$
$=a(x^3+8)+2bx(x+2)$
$=a(x+2)(x^2-2x+4)+2bx(x+2)$
$=(x+2)\{ax^2-2(a-b)x+4a\}=0$
이차방정식 $ax^2-2(a-b)x+4a=0\,(a\neq0)$은 -2가 아니고 정수인 서로 다른 두 근을 가져야 한다. 이때 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱이 $\dfrac{4a}{a}=4$이므로 가능한 서로 다른 두 근은
$x=1,\ x=4$ 또는 $x=-1,\ x=-4$
따라서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은
$\dfrac{2(a-b)}{a}=5$ 또는 $\dfrac{2(a-b)}{a}=-5$
이어야 하므로
$b=-\dfrac{3}{2}a$ 또는 $b=\dfrac{7}{2}a\,(a\neq0)$
(i) $b=-\dfrac{3}{2}a$일 때
$a=32$이면 $b=-\dfrac{3}{2}\times32=-48$이므로
순서쌍 $(a,\ b)$는
$(2,\ -3),\ (4,\ -6),\ \cdots,\ (32,\ -48),$
$(-2,\ 3),\ (-4,\ 6),\ \cdots,\ (-32,\ 48)$
의 32개이다.
(ii) $b=\dfrac{7}{2}a$일 때
$a=14$이면 $b=\dfrac{7}{2}\times14=49$이므로
조건을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(2,\ 7),\ (4,\ 14),\ \cdots,\ (14,\ 49),$
$(-2,\ -7),\ (-4,\ -14),\ \cdots,$
$(-14,\ -49)$
의 14개이다.
(i), (ii)에 의해 조건을 만족하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 $32+14=46$

19 $\beta-\alpha$가 자연수가 되기 위해서는 α,β가 모두 정수이거나 α,β가 각각 정수가 아닌 실수이어야 한다.
$\alpha\le x\le\beta$인 정수 x의 개수가 3이 되기 위해서
α,β가 모두 정수인 경우에는 $\beta-\alpha=2$
α,β가 각각 정수가 아닌 실수인 경우에는
$\beta-\alpha=3$이어야 한다.

(1) $\dfrac{1}{2}a^2-a>\dfrac{3}{2}a$인 경우
$a^2-5a>0$이므로 $a<0$ 또는 $a>5$ 이다.
이차부등식 $(2x-a^2+2a)(2x-3a)\le0$ 의 해는
$\dfrac{3}{2}a\le x\le\dfrac{1}{2}a^2-a$ 이다.

(i) α,β가 모두 정수인 경우
$\beta-\alpha=\left(\dfrac{1}{2}a^2-a\right)-\dfrac{3}{2}a=\dfrac{1}{2}a^2-\dfrac{5}{2}a=2$ 이므로
$a^2-5a-4=0$에서 $a=\dfrac{5\pm\sqrt{41}}{2}$이다.
$a=\dfrac{5\pm\sqrt{41}}{2}$이면 β와 α가 각각 정수가 아니므로 구하고자 하는 a는 없다.

(ii) α,β가 각각 정수가 아닌 실수인 경우
$\beta-\alpha=\left(\dfrac{1}{2}a^2-a\right)-\dfrac{3}{2}a=\dfrac{1}{2}a^2-\dfrac{5}{2}a=3$이므로
$a^2-5a-6=0$에서 $a=-1$ 또는 $a=6$ 이다
$a=-1$이면 β 와 α가 각각 정수가 아닌 실수이다.
$a=6$이면 β 와 α가 모두 정수이므로 조건을 만족하지 않는다.
따라서 $a=-1$이다.

(1) $\dfrac{1}{2}a^2-a<\dfrac{3}{2}a$인 경우
$a^2-5a<0$이므로 $0<a<5$ 이다.
이차부등식 $(2x-a^2+2a)(2x-3a)\le0$ 의 해는
$\dfrac{1}{2}a^2-a\le x\le\dfrac{3}{2}a$ 이다.

(i) α,β가 모두 정수인 경우
$\beta-\alpha=\dfrac{3}{2}a-\left(\dfrac{1}{2}a^2-a\right)=-\dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{5}{2}a=2$이므로
$a^2-5a+4=0$에서 $a=1$ 또는 $a=4$ 이다.
$a=1$이면 β와 α가 각각 정수가 아니므로 조건을 만족하지 않는다.
$a=4$이면 β와 α가 모두 정수이다.
따라서 $a=4$이다.

(ii) α, β가 각각 정수가 아닌 실수인 경우

$\beta - \alpha = \frac{3}{2}a - \left(\frac{1}{2}a^2 - a\right) = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{5}{2}a = 3$ 이므로

$a^2 - 5a + 6 = 0$에서 $a = 2$ 또는 $a = 3$ 이다

$a = 2$이면 β와 α가 모두 정수이므로 조건을 만족하지 않는다.

$a = 3$이면 β와 α가 각각 정수가 아닌 실수이다.

따라서 $a = 3$ 이다.

그러므로 (1), (2)에 의해 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합은 $-1 + 4 + 3 = 6$ 이다.