Ⅲ-3 원의 방정식 P.78-82

1. ③	2. 26	3. ①	4. ④	5. 22
6. ②	7. ④	8. 7	9. ②	10. 70
11. 180	12. ②	13. ④	14. 24	15. 25
16. $\frac{11}{4}$	17. ③	18. ③	19. ⑤	20. 23

2 원의 중심 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하면 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식이

$x+5y+13=0$이므로 $\overline{OH}=\frac{\sqrt{26}}{2}$

이때 △ABP의 넓이는

$$\triangle ABP \le \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot(\overline{OH}+\sqrt{13})$$
$$=\frac{13}{2}(1+\sqrt{2})$$

따라서 $p=2,\ q=13$이므로 $pq=26$

[다른 풀이] 선분 AB의 중점을 M이라고 하면

$$M\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{5}{2}\right)$$

이므로

$$\overline{OM}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{25}{4}}=\frac{\sqrt{26}}{2}$$

△ABP의 넓이가 최대일 때 높이는 $\frac{\sqrt{26}}{2}+\sqrt{13}$

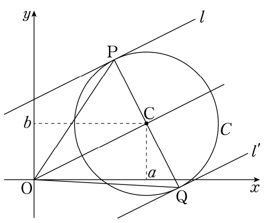
이므로 $\overline{AB}=\sqrt{26}$

이때 △ABP의 최댓값은 $\frac{13}{2}(1+\sqrt{2})$이므로

$p=2,\ q=13$

$\therefore\ pq=26$

3



원 C의 중심을 점 C$(a,\ b)$라 하면 직선 OC는 직선 l과 평행하다.

직선 OC의 방정식은 $x-2y=0$이므로

$a-2b=0$ ……㉠

원 C의 반지름의 길이는

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$$

삼각형 POQ가 정삼각형이므로

$\overline{OC}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3}\times\sqrt{5}=\sqrt{15}$

즉 $a^2+b^2=15$ ……㉡

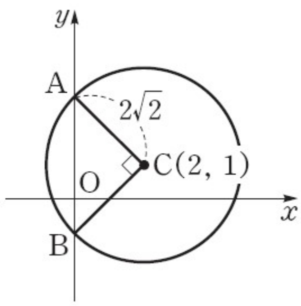
$a,\ b$는 양수이므로 ㉠, ㉡에 의하여

$a=2\sqrt{3},\ b=\sqrt{3}$

따라서 $a+b=3\sqrt{3}$

4 $x^2+y^2-4x-2y+k=0$에서

$$(x-2)^2+(y-1)^2=5-k$$



△ABC는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{AB}=4$이고 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5-k}=2\sqrt{2}$

$\therefore k=-3$

$\therefore\ \overline{AB}+k=1$

5 직선 l은 원점과 점 (3, 4)를 연결한 직선과 수직으로 만나야 한다.

점 (3, 4)를 지나는 직선의 방정식을

$y=a(x-3)+4$라 할 때, 원점과 점 (3, 4)를 연결한 직선의 기울기는 $\frac{4}{3}$이므로 $a=-\frac{3}{4}$

따라서 직선 l의 방정식은 $3x+4y-25=0$

원의 중심 (7, 5)와 직선 l 사이의 거리는

$$\frac{|21+20-25|}{\sqrt{9+16}}=\frac{16}{5}$$

따라서 $m=\frac{16}{5}-1=\frac{11}{5}$이므로 $10m=22$

6 $x^2+y^2-2x-4y-7=0$에서

$$(x-1)^2+(y-2)^2=12$$

이때 이 원의 넓이를 이등분하는 직선은 원의 중심 $(1, 2)$를 지나야 한다.

한편 네 직선 $x=-6$, $x=0$, $y=-4$, $y=-2$로 둘러싸인 직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 직사각형의 두 대각선의 교점인 $(-3, -3)$을 지나야 한다.

따라서 두 점 $(1, 2)$와 $(-3, -3)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-2=\frac{-3-2}{-3-1}(x-1)$$

$$\therefore\ y=\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}$$

7 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $\sqrt{2}x-y+k=0$ 사이의 거리는 반지름의 길이 2와 같으므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{2+1}}=2, \qquad |k|=2\sqrt{3}$$

$$\therefore\ k=2\sqrt{3} \text{ 또는 } k=-2\sqrt{3}$$

이때 $k>0$이므로 $k=2\sqrt{3}$

8 $y=ax+2\sqrt{b}$를 $x^2+y^2=4$에 대입하여 정리하면

$$x^2+(ax+2\sqrt{b})^2=4$$

$$(1+a^2)x^2+4a\sqrt{b}x+4b-4=0$$

원과 직선이 접하려면

$$\frac{D}{4}=(2a\sqrt{b})^2-4(1+a^2)(b-1)$$

$$=4a^2-4b+4=0$$

$$\therefore b=a^2+1$$

10보다 작은 자연수 a, b에 대하여 $b=a^2+1$인 (a, b)는 (1, 2)와 (2, 5)이므로 b의 모든 값의 합은 7이다.

[다른 풀이] 원의 중심 (0, 0)과 직선 $ax-y+2\sqrt{b}=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2\sqrt{b}|}{\sqrt{a^2+1}}=2$$

이므로 $b=a^2+1$

9 접선이 점 $(-6, 0)$을 지나므로

$$0=-6m+n$$

$$\therefore\ n=6m \qquad \cdots\cdots ㉠$$

따라서 접선의 방정식은 $y=mx+6m$이다.

원 $x^2+y^2=9$의 중심 (0, 0)과 직선 $y=mx+6m$ 사이의 거리는 반지름의 길이 3과 같으므로

$$\frac{|6m|}{\sqrt{m^2+1}}=3, \qquad |6m|=3\sqrt{m^2+1}$$

$$36m^2=9(m^2+1), \qquad m^2=\frac{1}{3}$$

$$\therefore\ m=\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 또는 } m=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

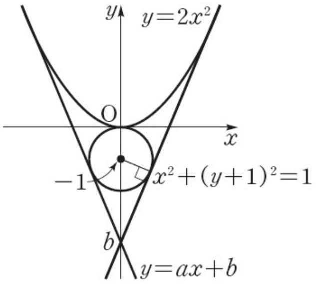
㉠에서

$$m=\frac{\sqrt{3}}{3},\ n=2\sqrt{3} \text{ 또는}$$

$$m=-\frac{\sqrt{3}}{3},\ n=-2\sqrt{3}$$

이므로 $mn=2$

10



(i) 직선 $y=ax+b$가 이차함수 $y=2x^2$의 그래프에 접하므로 이차방정식 $2x^2-ax-b=0$에서

$D=a^2+8b=0$

$\therefore\ a^2=-8b$ …… ㉠

(ii) 직선 $y=ax+b$가 원 $x^2+(y+1)^2=1$에 접하므로

$$\frac{|1+b|}{\sqrt{a^2+1}}=1$$

$\therefore\ a^2+1=b^2+2b+1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$b=-10\ (b<0),\ a^2=80$

$\therefore\ a^2+b=70$

11 $\overline{\mathrm{AO}}=2\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{BO}}=3\sqrt{5}$이므로

$\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AO}}:\overline{\mathrm{BO}}=2:3$, $3\overline{\mathrm{AC}}=2\overline{\mathrm{BC}}$

$3\sqrt{(a+2)^2+(b-4)^2}=2\sqrt{(a-3)^2+(b+6)^2}$

$(a+6)^2+(b-12)^2=180$

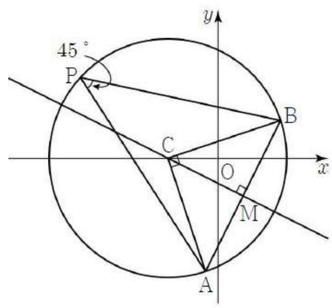
즉 점 C는 원 $(x+6)^2+(y-12)^2=180$ 위의 점이다.
(단, 점 C$(a,\ b)$는 직선 AB 위에 있지 않다.)

직선 AB는 $y=-2x$이므로 원의 중심 $(-6,12)$가 직선 AB 위에 있다.

따라서 점 C와 직선 AB 사이의 거리의 최댓값은 원 $(x+6)^2+(y-12)^2=180$의 반지름의 길이와 같으므로

$$m^2=180$$

12



호 AB에 대한 원주각이 $\angle APB=45^\circ$이므로

호 AB에 대한 중심각은 $\angle ACB=90^\circ$

삼각형 ABC는 $\overline{CA}=\overline{CB}$인 직각이등변삼각형이다.

주어진 원의 반지름의 길이를 $r=\overline{CA}$라 하면

삼각형 ABC에서 $\overline{AB}^2=\overline{CA}^2+\overline{CB}^2=2r^2$

선분 AB의 길이가 $6\sqrt{5}$이므로 $r=3\sqrt{10}$

선분 AB의 중점을 M이라 하면

점 M의 좌표는 $M(2,-3)$

직선 AB의 기울기가 2이고

직선 CM은 선분 AB의 수직이등분선이므로 직선 CM의 방정식은 $y=-\dfrac{1}{2}x-2$

점 C의 좌표를 $C(2a,-a-2)$라 하자.

점 C를 중심으로 하는 원의 방정식은

$(x-2a)^2+(y+a+2)^2=90$

점 $B(5,3)$이 원 위의 점이므로

$(5-2a)^2+(5+a)^2=90$

$5a^2-10a-40=0$

$a^2-2a-8=(a-4)(a+2)=0$

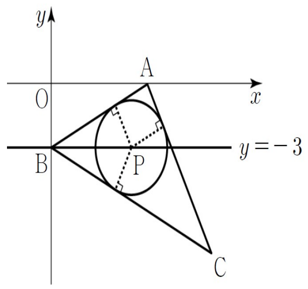
$a=4$ 또는 $a=-2$

$C(8,-6)$ 또는 $C(-4,0)$

$k=10$ 또는 $k=4$

따라서 k의 최솟값은 4

13



직선 AB를 l이라 하면 $l : y = \frac{1}{2}x - 3$

직선 BC를 m이라 하면 $m : y = -\frac{1}{2}x - 3$

직선 CA를 n이라 하면 $n : y = -2x + 12$

삼각형 ABC에 내접하는 원의 중심 P의 좌표를 $P(a, b)$라 하자. (단, $0 < a < 10$)

점 P와 직선 l 사이의 거리와

점 P와 직선 m 사이의 거리가 같으므로

$$\frac{|a - 2b - 6|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|a + 2b + 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2}}$$

$|a - 2b - 6| = |a + 2b + 6|$

$a = 0$ 또는 $b = -3$

$0 < a < 10$이므로 $b = -3$ ………………… ㉠

또한 점 P와 직선 m사이의 거리와 점 P와 직선 n 사이의 거리가 같으므로

$$\frac{|a + 2b + 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|2a + b - 12|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$$

㉠을 대입히면 $|a| = |2a - 15|$

$a = 15$ 또는 $a = 5$

$0 < a < 10$이므로 $a = 5$

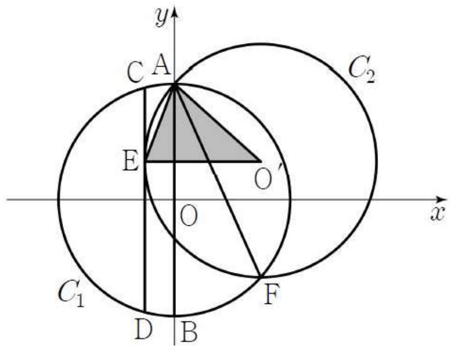
그러므로 $P(5, -3)$

따라서 선분 OP의 길이는

$\sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{34}$

14 점 O를 중심으로 하는 원을 C_1,

점 O'를 중심으로 하는 원을 C_2라 하자.



직선 CD는 원 C_2의 접선이므로 직선 CD와 직선 EO'은 서로 수직이다.

$O'(a, b)$에 대하여 삼각형 AEO'의 넓이는

$\frac{1}{2} \times 6 \times (6 - b) = 12 \quad \Rightarrow \quad b = 2$

따라서 원 C_2의 방정식은

$(x - a)^2 + (y - 2)^2 = 36$

원 C_2는 점 $A(0, 6)$을 지나므로

$a^2 + 16 = 36 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 20$

따라서 $a^2 + b^2 = 24$

15 $f(x) = ax + b$라 하면 이차방정식

$x^2 + (ax + b)^2 = 25$는 중근을 갖는다.

이차방정식 $(a^2 + 1)x^2 + 2abx + b^2 - 25 = 0$의 판별식을 D라 하면

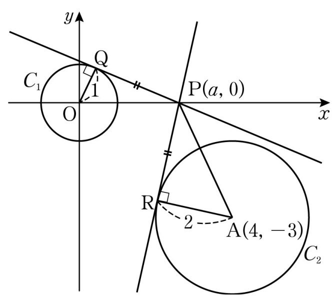
$\frac{D}{4} = a^2b^2 - (a^2 + 1)(b^2 - 25)$

$= 25a^2 - b^2 + 25 = 0$ ……㉠

$f(-5)f(5) = (-5a + b)(5a + b) = b^2 - 25a^2$

따라서 ㉠에 의해 $f(-5)f(5) = 25$

16 점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(a,\ 0)$이라 하자.



직각삼각형 OPQ에서 $\overline{\mathrm{PQ}}^2 = a^2 - 1$

$x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$ 에서

$(x-4)^2 + (y+3)^2 = 2^2$

원 C_2는 중심이 $(4,\ -3)$이고 반지름의 길이가 2인 원이므로 원 C_2의 중심을 A라 하면

$\mathrm{A}(4,\ -3)$이다.

직각삼각형 APR에서

$\overline{\mathrm{PR}}^2 = \{(a-4)^2 + (0+3)^2\} - 2^2$

$\quad = a^2 - 8a + 21$

$\overline{\mathrm{PQ}}^2 = \overline{\mathrm{PR}}^2$이므로 $a^2 - 1 = a^2 - 8a + 21$

따라서 $a = \dfrac{11}{4}$

17 점 P의 좌표를 $P(a, b)$라 하면 점 P는 원 $x^2 + y^2 = 10$ 위의 점이므로

$a^2 + b^2 = 10 \cdots\cdots$ ㉠

선분 AP의 길이는 3이므로

$(a-4)^2 + (b-3)^2 = 9 \cdots\cdots$ ㉡

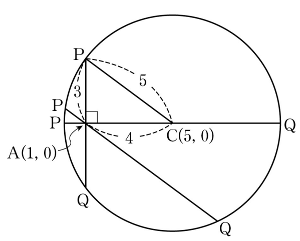
㉠과 ㉡을 연립하여 풀면 $a = \dfrac{79}{25},\ b = \dfrac{3}{25}$ 이다.

따라서 직선 l의 기울기는

$$\frac{3-b}{4-a} = \frac{3-\frac{3}{25}}{4-\frac{79}{25}} = \frac{72}{21} = \frac{24}{7} \text{ 이다.}$$

18 $x^2 + y^2 - 10x = 0$에서 $(x-5)^2 + y^2 = 5^2$

원의 중심을 C라 하고 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$을 지나는 직선이 원과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자.



현 PQ의 길이가 최소일 때는 $\overline{\mathrm{CA}} \perp \overline{\mathrm{PQ}}$일 때이고 이때 $\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{AQ}}$이다.

직각삼각형 ACP에서 $\overline{\mathrm{CA}} = 4,\ \overline{\mathrm{CP}} = 5$이므로

$\overline{\mathrm{AP}} = 3,\ \overline{\mathrm{PQ}} = 2 \times \overline{\mathrm{AP}} = 6$

따라서 현 PQ의 길이의 최솟값은 6이다.

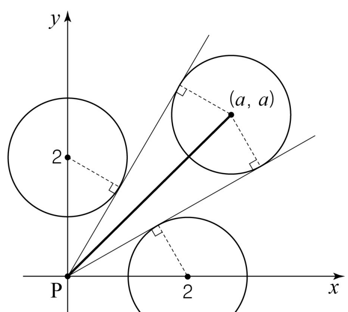
현 PQ의 길이가 최대일 때는 현 PQ가 지름일 때이므로 현 PQ의 길이의 최댓값은 10이다.

따라서 현의 길이가 자연수인 경우는 6, 7, 8, 9, 10 이다.

이때 길이가 7, 8, 9인 현은 각각 2개씩 존재하고, 길이가 6, 10인 현은 각각 1개씩 존재한다.

따라서 구하는 현의 개수는 $3 \times 2 + 2 \times 1 = 8$

19



관람지점 P를 좌표평면 위의 원점이라 하면 전시물 A의 밑면은 중심이 $(0,\ 2)$이고 반지름의 길이가 1인 원이다. 또한, 전시물 B의 밑면은 중심이 $(2,\ 0)$이고 반지름의 길이가 1인 원이다. 두 전시물 사이로 전시물 C가 보여야 하므로 원점에서 그은 두 원의 접선 사이에 전시물 C의 밑면이 존재해야 한다. 이때, 원점에서 전시물 C의 밑면의 중심까지의 거리가 최소가 되려면 전시물 C의 밑면이 두 접선에 모두 접해야 한다. 따라서 전시물 C의 밑면은 중심이 직선 $y = x$ 위에 있고 두 접선 $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x,\ y = \sqrt{3}x$에 모두 접하는 반지름의 길이가 1인 원이다.

중심의 좌표를 $(a,\ a)$라 할 때, 중심에서 두 접선까지의 거리는 각각 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|a - \sqrt{3}a|}{\sqrt{1+3}} = \frac{|\sqrt{3}a - a|}{\sqrt{3+1}} = 1$$

$$a = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3} + 1$$

원점에서 전시물 C의 밑면의 중심까지의 거리는

$\sqrt{2}a$

따라서 d의 최솟값은 $\sqrt{6} + \sqrt{2}$

20 두 원 C_1, C_2의 중심을 각각 두 원 O_1, O_2, 두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2라 하자.

점 $O_1(-6,0)$에서 직선 l에 내린 수선의 발을 R, 점 $O_2(5,-3)$에서 직선 l에 내린 수선의 발을 S라 하면 직선 O_1R와 직선 l이 서로 수직이므로 직선 O_1R의 방정식은 $y=-x-6$

직선 l과 직선 O_1R가 만나는 점의 좌표는 $R(-2,-4)$

직선 O_2S와 직선 l이 서로 수직이므로

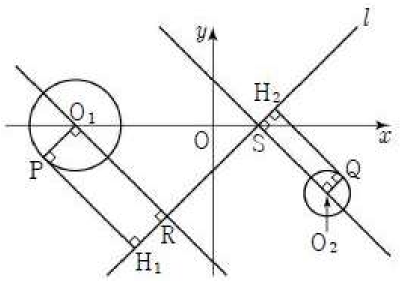
직선 O_2S의 방정식은 $y=-x+2$

직선 l과 직선 O_2S가 만나는 점의 좌표는 $S(2,0)$

$\overline{RS}=\sqrt{(2+2)^2+(0+4)^2}=4\sqrt{2}$이므로

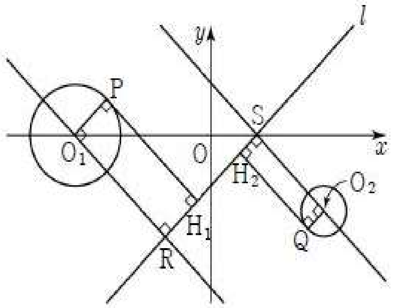
선분 H_1H_2의 길이의 최댓값 M은

$M=\overline{RS}+r_1+r_2=4\sqrt{2}+3$



선분 H_1H_2의 길이의 최솟값 m은

$m=\overline{RS}-r_1-r_2=4\sqrt{2}-3$



따라서 $Mm=23$

Ⅲ-4 도형의 이동 P.86-95

1. ①	2. ④	3. 45	4. ⑤	5. ③
6. ③	7. ①	8. ⑤	9. 12	10. ③
11. ②	12. ③	13. 10	14. ⑤	15. 12
16. 16	17. ①	18. ③	19. ③	20. 64
21. ①	22. 17	23. ②	24. 3	25. ④
26. ①	27. ②	28. 11	29. 12	30. ①
31. ③				

1 직선 $3x+2y+9=0$을 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 직선의 방정식은 $3(x-a)+2y+9=0$
이 직선이 원점을 지나므로 $-3a+9=0$
$\therefore a=3$

2 직선 $2x-y+1=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$2(x-a)-(y-b)+1=0$
이 직선이 $2x-y+3=0$과 일치하므로
$-2a+b+1=3$
$\therefore b=2a+2$

3 포물선 $y=x^2-2x$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 포물선의 방정식은 $y-n=(x-m)^2-2(x-m)$
$\therefore y=x^2-2(m+1)x+m^2+2m+n$
이 포물선이 $y=x^2-12x+30$과 일치하므로
$m=5,\ n=-5$
직선 $l: x-2y=0$을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$(x-5)-2(y+5)=0$
$\therefore l':\ 2-xy-15=0$
두 직선 l, l' 사이의 거리 d는 직선 $x-2y=0$ 위의 점 $(0,\ 0)$과 직선 $x-2y-15=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$d=\frac{|-15|}{\sqrt{5}}=3\sqrt{5}$$

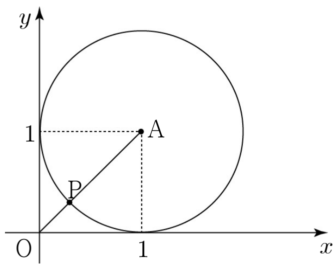
$\therefore d^2=45$

4 원의 중심이 $(-5,\ 10)$에서 $(3,\ -2)$로 이동하였으므로 x축의 방향으로 8만큼, y축의 방향으로 -12만큼 이동하였다.
따라서 $m=8$, $n=12$이므로 $m+n=20$

5 삼각형 OAB가 정삼각형이므로 $\overline{OB}=\overline{AB}$에서

$$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2}$$

$\therefore a+b=1$
따라서 원 $x^2+y^2=1$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 원과 선분 OA를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



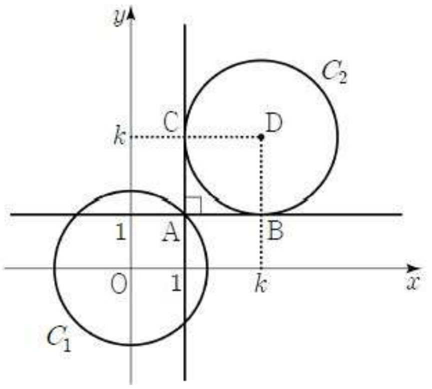
$\therefore \overline{OP}=-1+\sqrt{2}$

6 원의 중심이 $(-3,\ 3)$에서 $(0,\ 1)$로 이동하였으므로 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하였다.
$\therefore a=3,\ b=-2$
직선 $y=mx+n$을 그린 후 '이동' 버튼을 눌러 이동한 직선의 방정식은
$y+2=m(x-3)+n$
$\therefore y=mx-3m+n-2$
이 직선이 $y=mx+n$과 일치하므로
$-3m-2=0$

$$\therefore m=-\frac{2}{3}$$

$$\therefore a+b+m=\frac{1}{3}$$

7



점 $A(1,1)$에서 원 C_2에 그은 두 접선이 원 C_2와 만나는 점을 각각 B, C라 하고, 원 C_2의 중심을 $D(k, k)$라 하자. 사각형 $ABCD$는 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정사각형이다.

$k > 2$ 이므로 $k = 1 + \sqrt{2}$

8 점 $\mathrm{A}(1,\ 3)$을 x축, y축에 대하여 대칭이동한 점은 각각 $\mathrm{B}(1,\ -3)$, $\mathrm{C}(-1,\ 3)$

점 $\mathrm{D}(a,\ b)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점은 $\mathrm{E}(a,\ -b)$

세 점 B, C, E가 한 직선 위에 있으므로 직선 BC의 기울기와 직선 CE의 기울기는 같다.

$$\frac{3-(-3)}{-1-1} = \frac{-b-3}{a-(-1)}$$

$$-3 = \frac{-b-3}{a+1} \qquad \therefore b = 3a$$

따라서 직선 AD의 기울기는

$$\frac{b-3}{a-1} = \frac{3a-3}{a-1} = 3$$

9 직선 $(2k+1)x+(k+1)y-4=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$(k+1)x+(2k+1)y-4=0$

$(x+2y)k+(x+y-4)=0$

$x+2y=0,\ x+y-4=0$에서 $\qquad x=8,\ y=-4$

따라서 이 직선은 k의 값에 관계없이 점 $(8,\ -4)$를 지나므로 $\qquad a=8,\ b=-4$

$\therefore a-b=12$

10 직선 AB의 방정식은 $y = \dfrac{1}{2}x + 3$

직선 AB를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선 $A'B$의 방정식은 $y = 2x-6$

점 C와 직선 $A'B$사이의 거리는

점 C와 직선 AB 사이의 거리의 2배이다.

$$\frac{|-k-6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|-2k+6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} \times 2$$

$0 < k < 3$이므로 $k+6 = 2(-2k+6)$

따라서 $k = \dfrac{6}{5}$

11 점 C의 x좌표를 a라고 하면 점 C의 좌표는 $(a,\ a^2)$

사각형 ABCD가 정사각형이고 두 점 B, D가 직선 $y=x$ 위의 점이므로,

점 B의 좌표는 $\qquad (a^2,\ a^2)$

점 D의 좌표는 $\qquad (a,\ a)$

점 A의 좌표는 $\qquad (a^2,\ a)$

이때 점 A가 $y=-(x-1)^2+1$의 그래프 위의 점이므로

$a=-(a^2-1)^2+1, \qquad a^4-2a^2+a=0$

$a(a-1)(a^2+a-1)=0$

이때 B, D는 서로 다른 점이므로 $\qquad a \neq 0,\ a \neq 1$

$a^2+a-1=0$에서

$$a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\ (\because a > 0)$$

따라서 정사각형의 한 변의 길이는

$a-a^2 = a-(-a+1) = 2a-1 = \sqrt{5}-2$

12 원 O_1의 방정식은 $\qquad \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=1$

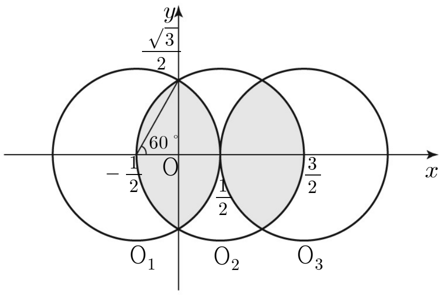
원 O_1을 y축에 대하여 대칭이동한 원 O_2의 방정식은

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=1$$

원 O_1을 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 원 O_3의 방정식은

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=1$$

다음 그림과 같이 원 O_1의 내부와 원 O_2의 내부의 공통부분의 넓이와 원 O_2의 내부와 원 O_3의 내부의 공통부분의 넓이의 합 S는 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $60°$인 부채꼴의 넓이에서 밑변의 길이가 $\frac{1}{2}$이고 높이가 $\frac{\sqrt{3}}{2}$인 직각삼각형의 넓이를 뺀 것의 8배이다.



$\therefore S = 8\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right) = \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$

13 점 B를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라고 하면 $B'(-5,\ -6)$

삼각형 ABC의 둘레의 길이가 최소가 되려면 직선 AB'과 y축의 교점이 점 C이어야 한다.

직선 AB'의 방정식은

$y-6 = \frac{6-(-6)}{1-(-5)}(x-1)$

$\therefore y = 2x+4$

직선 $y=2x+4$의 y절편이 4이므로 $C(0,\ 4)$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$5 \cdot 12 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 12 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10 = 10$

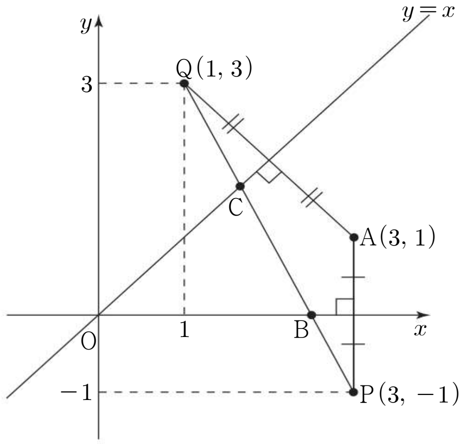
14 지점 O를 원점, 직선도로 l을 x축으로 하는 좌표평면을 놓으면

직선도로 m의 방정식은 $y=x$

정류소 A의 좌표는 $(3, 1)$

점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 P라고 하면 $P(3,\ -1)$

이고, 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 Q라고 하면 $Q(1, 3)$



$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \overline{PB} + \overline{BC} + \overline{CQ} \geq \overline{PQ}$

이때 두 점 $P(3,\ -1)$, $Q(1, 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-3 = \frac{3-(-1)}{1-3}(x-1)$

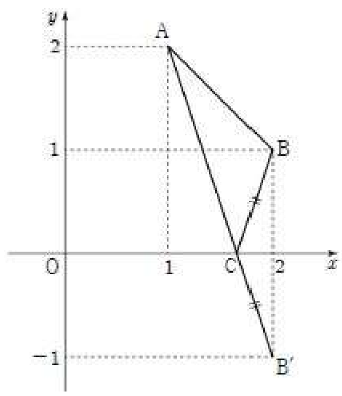
$\therefore y = -2x+5$

x축과 직선 $y=-2x+5$의 교점은 $B\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

직선 $y=x$와 직선 $y=-2x+5$의 교점은 $C\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$

$\therefore \overline{BC} = \sqrt{\left(\frac{5}{3}-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}-0\right)^2} = \frac{5\sqrt{5}}{6}$(km)

15



삼각형 ABC의 둘레의 길이는 $\overline{AC} + \overline{CB} + \overline{BA}$

점 $B(2,1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면 점 B'의 좌표는 $(2,\ -1)$이다.

$\overline{AC}+\overline{CB}=\overline{AC}+\overline{CB'}\geq\overline{AB'}$ 이고

$\overline{BA}=\sqrt{2}$, $\overline{AB'}=\sqrt{10}$ 이므로

삼각형 ABC의 둘레의 길이의 최솟값은 $\sqrt{2}+\sqrt{10}$

따라서 $a+b=12$

16 점 A를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점이 C이므로 직선 AC의 기울기는 $-\frac{3}{4}$이다. 즉, 두 직선 AB, AC가 서로 수직이므로 사각형 ABDC는 직사각형이다.

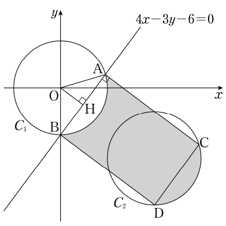
따라서 $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$

또, 원점에서 직선 $4x-3y-6=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{OH}}=\frac{|-6|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{6}{5}$

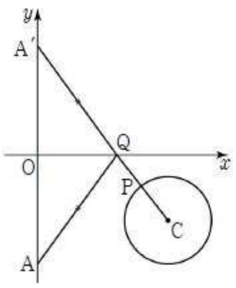
$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{OH}}^2}=\sqrt{2^2-\left(\frac{6}{5}\right)^2}=\frac{8}{5}$

$\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AH}}=\frac{16}{5}$



선분 AC, 선분 BD, 호 AB 및 호 CD로 둘러싸인 색칠된 부분의 넓이는 직사각형 ABDC의 넓이와 같으므로 $\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}=\frac{16}{5}\times5=16$

17



점 $A(0,-5)$를 x축에 대칭이동한 점을 A'이라 하면 $A'(0,5)$

원의 중심을 C라 하면 $C(6,-3)$

$\overline{AQ}=\overline{A'Q}$, $\overline{A'C}=\sqrt{(6-0)^2+(-3-5)^2}=10$

$\overline{AQ}+\overline{QP}=\overline{A'Q}+\overline{QP}\geq\overline{A'P}\geq\overline{A'C}-2=8$

따라서 $\overline{AQ}+\overline{QP}$의 최솟값은 8

19 ㄱ. 원 $x^2+(y-1)^2=9$를 평행이동하여도 원의 반지름의 길이는 변하지 않으므로 원 C의 반지름의 길이는 3이다.(참)

ㄴ. 원 $x^2+(y-1)^2=9$의 중심의 좌표가 $(0,1)$이므로 원 C의 중심의 좌표는 $(m,n+1)$이다.

원 C가 x축과 접하므로 $|n+1|=3$

$n=-4$ 또는 $n=2$

따라서 n의 값은 2개다. (거짓)

ㄷ. $m\neq0$일 때, 직선 $y=\frac{n+1}{m}x$가 원 C의 중심 $(m,n+1)$을 지나므로 원 C의 넓이를 이등분한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ 이다.

20 두 직선 AB, OD의 교점을 E, 직선 AB와 직선 $y=x$의 교점을 F라 하자. 직선 AB의 방정식은

$y=-2x+4$

점 B(1, 2)를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 D의 좌표는 (2, 1)이므로 직선 OD의 방정식은

$y=\frac{1}{2}x$

$-2x+4=\frac{1}{2}x$에서 $x=\frac{8}{5}$

$-2x+4=x$에서 $x=\frac{4}{3}$

두 점 E, F의 x좌표는 각각 $\frac{8}{5}$, $\frac{4}{3}$이므로

$\triangle\mathrm{OAF}:\triangle\mathrm{OEF}=\overline{\mathrm{AF}}:\overline{\mathrm{EF}}$

$=\left|2-\frac{4}{3}\right|:\left|\frac{8}{5}-\frac{4}{3}\right|=5:2$

따라서 삼각형 OEF의 넓이는 삼각형 OAF의 넓이의 $\frac{2}{5}$배이므로

$S=\left(\frac{1}{2}\times2\times\frac{4}{3}\right)\times\frac{2}{5}\times2=\frac{16}{15}$

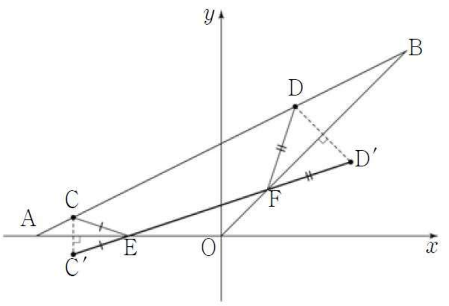
따라서 $60S=64$

21 점 $C(-8,1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점은 $C'(-8,-1)$이고, 점 $D(4,7)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 $D'(7,4)$

$\overline{CE}=\overline{C'E}$, $\overline{FD}=\overline{FD'}$ 이므로

$\overline{CE}+\overline{EF}+\overline{FD}=\overline{C'E}+\overline{EF}+\overline{FD'}\geq\overline{C'D'}$

$\overline{CE}+\overline{EF}+\overline{FD}$의 값이 최소일 때는 점 E, F가 두 점 C', D'을 지나는 직선 위에 있을 때이다.

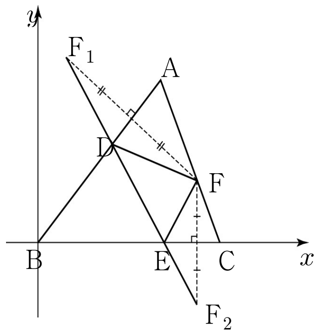


두 점 $C'(-8,-1), D'(7,4)$를 지나는 직선의 방정식은 $y-4=\frac{1}{3}(x-7)$

$\therefore y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$

따라서 $\overline{CE}+\overline{EF}+\overline{FD}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 E의 x좌표는 -5

22



점 A의 좌표를 $(\alpha,\ \beta)$라 하면

$\overline{AB}^2=\alpha^2+\beta^2=18$

$\overline{AC}^2=(\alpha-4)^2+\beta^2=10$이므로 $A(3,\ 3)$

직선 AC의 방정식은 $y=-3x+12$

점 F의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 $b=-3a+12$

직선 AB의 방정식은 $y=x$이므로 점 F를 직선 AB와 x축에 대하여 대칭이동한 점을 각각 F_1, F_2라 하면 $F_1(b,\ a)$, $F_2(a,\ -b)$

이때 삼각형 DEF의 둘레의 길이는

$\overline{DF_1}+\overline{DE}+\overline{EF_2}\geq\overline{F_1F_2}=\sqrt{(a-b)^2+(-b-a)^2}$

$=\sqrt{2a^2+2(-3a+12)^2}$

$=\sqrt{20\left(a-\frac{18}{5}\right)^2+\frac{144}{5}}$ $(3<a<4)$

이므로 삼각형 DEF의 둘레의 길이의 최솟값은 $\frac{12}{5}\sqrt{5}$이다. 따라서 $p+q=17$

23 $A'(a,\ 4)$, $B'(1,\ 2)$

두 직선 AA', BB'은 서로 평행하므로 두 삼각형 APA', BPB'은 서로 닮은 삼각형이다.

두 삼각형 APA', BPB'의 넓이의 비가 $9:4$이므로

$\overline{AA'}:\overline{BB'}=3:2$

$a>4$이므로

$\overline{AA'}=\sqrt{(a-4)^2+(4-a)^2}=\sqrt{2}(a-4)$

$\overline{BB'}=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\overline{AA'}:\overline{BB'}=3:2$에서 $\sqrt{2}(a-4):\sqrt{2}=3:2$

$2(a-4)=3$에서 $a=\frac{11}{2}$

24 점 C는 점 A를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로

$4(x-1)-3(y+1)+11=0$

점 R는 점 P를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

$4(x+1)-3(y-1)-18=0$

최소 거리는 직선 $4x-3y+4=0$ 위의 점 $(-1,\ 0)$에서 직선 $4x-3y-11=0$ 사이의 거리이므로

$\frac{|-4-11|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=3$

25 직선 OA의 기울기는 $\frac{3-0}{1-0}=3$이고 직선 OB의 기울기를 m이라 하면 두 직선 OA, OB가 서로 수직이므로 두 직선의 기울기의 곱이 -1이어야 한다.

$3m = -1$에서 $m = -\frac{1}{3}$

즉, $a \neq 0$ 이고 직선 OB의 기울기는

$\frac{5-0}{a-0} = \frac{5}{a} = -\frac{1}{3}$

$a = -15$

점 B의 좌표는 $(-15, 5)$ 또한 두 점 B, C가 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이므로 $b=5, c=-15$

즉, $A(1,3)$, $C(5,-15)$이므로 직선 AC의 방정식은

$y-3 = \frac{-15-3}{5-1} \times (x-1)$

$y = -\frac{9}{2}x + \frac{15}{2}$

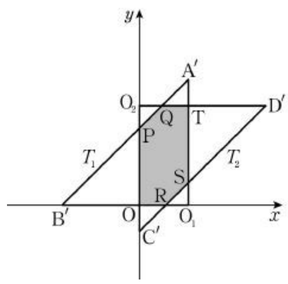
따라서 직선 AC의 y절편은 $\frac{15}{2}$이다.

26 세 점 O, A, B를 x축의 방향으로 t 만큼 평행이동 한 점을 각각 O_1, A', B'이라 하면

$O_1(t,0), A'(t,1), B'(-1+t, 0)$

세 점 O, C, D를 y축의 방향으로 $2t$만큼 평행이동 한 점을 각각 O_2, C', D'이라 하면

$O_2(0, 2t), C'(0, -1+2t), D'(1, 2t)$



두 삼각형 T_1, T_2의 내부의 공통부분이 육각형 모양이 되려면 선분 $A'B'$이 두 선분 O_2C', O_2D'과 A', B'이 아닌 두 점에서 만나야 한다. 또 선분 $C'D'$이 두 선분 O_1B', O_1A'과 C', D'이 아닌 두 점에서 만나야 한다.

선분 $A'B'$이 두 선분 O_2C', O_2D'과 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 선분 $C'D'$이 두 선분 O_1B', O_1A'과 만나는 점을 각각 R, S라 하면

$P(0, 1-t), Q(3t-1, 2t), R(1-2t, 0), S(t, 3t-1)$

따라서 조건을 만족시키는 육각형이 만들어지려면

(점 P 의 y 좌표) < (점 O_2의 y좌표)

< (점 A'의 y좌표)

이어야 하므로

$1-t < 2t < 1$

$1-t < 2t$에서 $t > \frac{1}{3}$

$2t < 1$에서 $t < \frac{1}{2}$

두 부등식을 모두 만족시키는 t의 값의 범위는

$\frac{1}{3} < t < \frac{1}{2}$

또한 (점 C'의 y좌표) < (점 O_1의 y좌표)

< (점 S의 y좌표)

이어야 하고 위와 마찬가지로 $\frac{1}{3} < t < \frac{1}{2}$이다.

따라서 $a = \frac{1}{2}$

이때 두 선분 $A'O_1$, O_2D'의 교점을 T라 하고, 육각형의 넓이를 $f(t)\left(\frac{1}{3} < t < \frac{1}{2}\right)$이라 하면

$f(t) =$ (직사각형 OO_1TO_2의 넓이)

- (삼각형 O_1SR의 넓이)-(삼각형 O_2PQ의 넓이)

$= t \times 2t - 2 \times \frac{1}{2}(3t-1)^2 = -7t^2 + 6t - 1$

$= -7\left(t - \frac{3}{7}\right)^2 + \frac{2}{7}$

이므로 $f(t)$는 $t = \frac{3}{7}$일 때 최대이고, 최댓값은

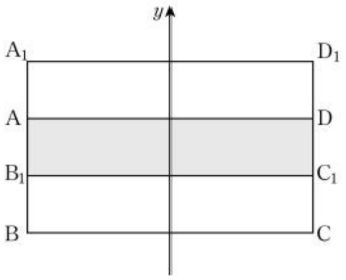
$M = \frac{2}{7}$

따라서 $a + M = \frac{1}{2} + \frac{2}{7} = \frac{11}{14}$

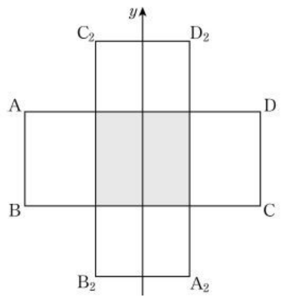
27 네 점 A, B, C, D를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동 한 네 점을 각각 A_1, B_1, C_1, D_1이라 하고, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 네 점을 각각 A_2, B_2, C_2, D_2라 하자.

직사각형 $ABCD$의 두 대각선의 교점이 원점이고 각 변은 x축 또는 y축에 평행하며 $\overline{AD} > \overline{AB} > 2$

이므로 두 직사각형 $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$은 그림과 같다.

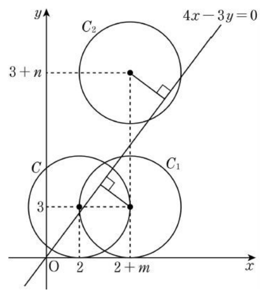


이때 제1사분면 위의 점 D의 좌표를 (a,b)라 하면 $A(-a,b), B(-a,-b), C(a,-b)$이다.
점 B_1은 점 B를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점이므로 $\overline{AD}=2a$, $\overline{AB_1}=2b-2$
조건 (가)에서 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 내부와 직사각형 $ABCD$의 내부와의 공통부분의 넓이가 18이므로 $2a\times(2b-2)=18$ …… ㉠
한편 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$는 직사각형 $ABCD$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형이므로 두 직사각형 $ABCD$, $A_2B_2C_2D_2$는 그림과 같다.



조건 (나)에서 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 내부와 직사각형 $ABCD$의 내부와의 공통부분의 넓이가 16이고 그림에서 공통부분은 한 변의 길이가 선분 AB의 길이와 같은 정사각형이므로
$(2b)^2=16$
$b^2=4$
b는 양수이므로 $b=2$
$b=2$를 ㉠에 대입하면 $a=\dfrac{9}{2}$
따라서 직사각형 $ABCD$의 넓이는
$\overline{AD}\times\overline{AB}=2a\times2b=4ab=4\times\dfrac{9}{2}\times2=36$

28



원 C_1의 중심의 좌표는 $(2+m,3)$이므로 점 $(2+m,3)$과 직선 $4x-3y=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 3보다 작다. 즉

$$\frac{|4(2+m)-9|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}<3$$

$-15<4m-1<15$
$-14<4m<16$
$-\dfrac{7}{2}<m<4$

조건 (가)를 만족시키는 자연수 m의 값은 1,2,3이다.

(i) $m=1$일 때
원 C_2의 중심의 좌표는 $(3,3+n)$이므로 점 $(3,3+n)$과 직선 $4x-3y=0$사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 3보다 작다.

$$\frac{|12-3(3+n)|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}<3$$

$-15<3n-3<15$
$-12<3n<18$
$-4<n<6$
따라서 자연수 n의 값은 1,2,3,4,5이므로 이 경우 $m+n$의 최댓값은 6이다.

(ii) $m=2$일 때,
원 C_2의 중심의 좌표는 $(4,3+n)$이므로 점 $(4,3+n)$과 직선 $4x-3y=0$사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 3보다 작다.

$$\frac{|16-3(3+n)|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}<3$$

$-15<3n-7<15$
$-8<3n<22$
$-\dfrac{8}{3}<n<\dfrac{22}{3}$

따라서 자연수 n의 값은 $1,2,3,4,5,6,7$이므로 이 경우 $m+n$의 최댓값은 9이다.

(iii) $m=3$일 때

원 C_2의 중심의 좌표는 $(5, 3+n)$이므로 점 $(5, 3+n)$과 직선 $4x-3y=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 3보다 작다.

$$\frac{|20-3(3+n)|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} < 3$$

$$-15 < 3n-11 < 15$$

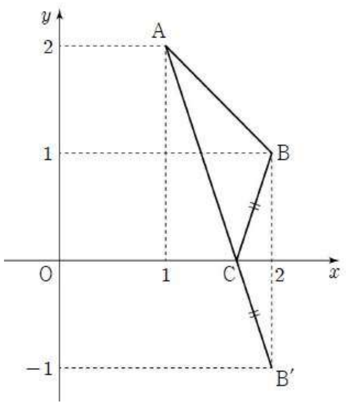
$$-4 < 3n < 26$$

$$-\frac{4}{3} < n < \frac{26}{3}$$

따라서 자연수 n의 값은 $1,2,3,4,5,6,7,8$이므로 이 경우 $m+n$의 최댓값은 11이다.

(i), (ii), (iii) 에서 $m+n$의 최댓값은 11이다.

29



삼각형 ABC의 둘레의 길이는 $\overline{AC}+\overline{CB}+\overline{BA}$

점 $B(2,1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면 점 B'의 좌표는 $(2, -1)$이다.

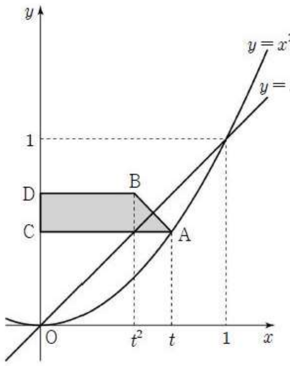
$\overline{AC}+\overline{CB}=\overline{AC}+\overline{CB'} \geq \overline{AB'}$ 이고

$\overline{BA}=\sqrt{2}$, $\overline{AB'}=\sqrt{10}$ 이므로

삼각형 둘레의 길이의 최솟값은 $\sqrt{2}+\sqrt{10}$

따라서 $a+b=12$

30 점 B는 점 $A(t, t^2)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이므로 점 B의 좌표는 (t^2, t)이다.



그림과 같이 점 A에서 y축에 내린 수선의 발이 C이므로 $\overline{AC}=t$

점 B에서 y축에 내린 수선의 발이 D이므로 $\overline{BD}=t^2$

$\overline{DC}=\boxed{t-t^2}$ 이므로

사각형 $ABDC$의 넓이는

$$\frac{1}{2}(t+t^2)(t-t^2)=\frac{1}{2}t^2\times(\boxed{1-t^2})$$

사각형 $ABDC$의 넓이가 $\frac{1}{8}$이므로

$$\frac{1}{2}t^2\times(\boxed{1-t^2})=\frac{1}{8}$$

$$t^2(1-t^2)=\frac{1}{4},\ (2t^2-1)^2=0$$

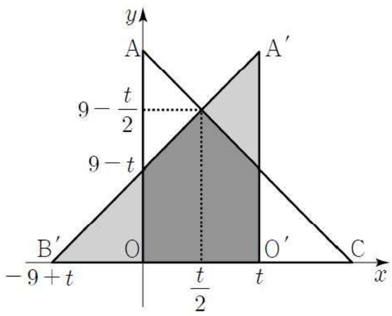
따라서 $t=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}\ (0<t<1)$

$f(t)=t-t^2,\ g(t)=1-t^2,\ k=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로

$$f(k)\times g(k)=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}-1}{4}$$

31 (i) $0 < t < 9$ 일 때,

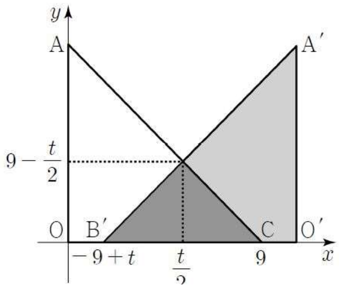


$$S(t) = 2\times\frac{1}{2}\times\left(9-t+9-\frac{t}{2}\right)\times\frac{t}{2}$$

$$= \frac{3}{4}t(12-t) = -\frac{3}{4}(t-6)^2+27$$

따라서 $t=6$ 일 때, $S(t)$ 의 최댓값은 27

(ii) $9 \le t < 18$ 일 때,



$$S(t) = \frac{1}{2}\times(18-t)\times\left(9-\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{4}(t-18)^2$$

따라서 $t=9$ 일 때 $S(t)$의 최댓값은 $\frac{81}{4}$

(i), (ii)에서 $S(t)$의 최댓값은 27