V-1 함수 P.31-40

1. 25	2. 16	3. ③	4. ②	5. ②
6. ④	7. 10	8. ③	9. ④	10. ③
11. ③	12. ①	13. ②	14. 490	15. ①
16. ①	17. ③	18. ②	19. ④	20. ③
21. ④	22. ⑤	23. ③	24. ⑤	25. 17
26. 80	27. ③	28. ①	29. ③	30. ④
31. 40	32. 4	33. 4	34. 2	35. ①

1 함수 $f(x)$가 집합 A의 모든 원소 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족하므로

$f(-2)=-f(2)$, $f(-1)=-f(1)$, $f(0)=0$

$f(-2)$와 $f(-1)$이 될 수 있는 값은 각각 5가지이므로 함수 f의 개수는 $5\times5=25$

2 $f(9)=f(72)=2$, $f(18)=f(81)=4$,

$f(27)=f(90)=6$, $f(36)=f(99)=1$,

$f(45)=3$, $f(54)=5$, $f(63)=0$

함수 $f(n)$의 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 하므로

$f^{-1}(0)=63$, $f^{-1}(3)=45$, $f^{-1}(5)=54$이고

$f^{-1}(1)=36$ 또는 $f^{-1}(1)=99$,

$f^{-1}(2)=9$ 또는 $f^{-1}(2)=72$,

$f^{-1}(4)=18$ 또는 $f^{-1}(4)=81$,

$f^{-1}(6)=27$ 또는 $f^{-1}(6)=90$

따라서 집합 X의 개수는 $2\times2\times2\times2=16$

3 ㄱ. $f(12)=f(10\times1+2)=f(1)+2$

$=f(10\times0+1)+2=f(0)+1+2$

$=1+2=3$

ㄴ. $f(8\times123)=f(984)=21$,

$8f(123)=8(1+2+3)=48$

ㄷ. $f(100a+10b+c)=f(10a+b)+c$

$=a+b+c$

$f(100c+10b+a)=f(10c+b)+a$

$=c+b+a$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

5 ㄱ. 모든 $x\in X$에 대하여 $f(x)=g(x)=x$이므로

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x)=x$

$\therefore$ $g\circ f$는 항등함수

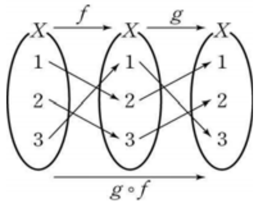
ㄴ. $g\circ f$가 항등함수이면 모든 $x\in X$에 대하여

$g(f(x))=x$

즉 f의 역함수는 g이고 g의 역함수는 f이다.

f, g는 모두 역함수가 존재하므로 일대일 대응이다.

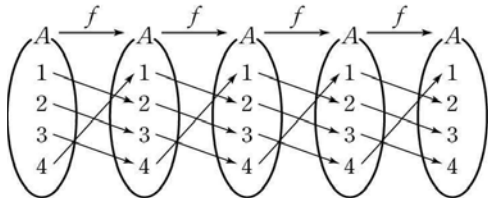
ㄷ. [반례]



위의 그림에서 $g\circ f$가 항등함수이지만 f, g는 모두 항등함수가 아니다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

6



위의 그림에서 $f^4(x)=x$이므로

$f^{2012}(2)=f^{4\times503}(2)=2$

$f^{2013}(3)=f^{4\times503+1}(3)=f^1(3)=4$

$\therefore$ $f^{2012}(2)+f^{2013}(3)=2+4=6$

7 $g(f(k))=3$에서

$f(k)>0$, $-\{f(k)\}^2+4=3$

이므로 $f(k)=1$

$f(k)=|k|-4=1$에서 $k=\pm5$

따라서 $\alpha=5$, $\beta=-5$이므로 $\alpha-\beta=10$

8 $n=a_m\times10^m+\cdots+a_2\times10^2+a_1\times10+a_0$일 때,

$$f\left(a_m\times10^m+\cdots+a_2\times10^2+a_1\times10+a_0\right)$$
$$=f\left(a_m\times10^{m-1}+\cdots+a_2\times10+a_1\right)+a_0$$
$$=f\left(a_m\times10^{m-2}+\cdots+a_2\right)+a_1+a_0$$
$$\vdots$$
$$=a_m+\cdots+a_2+a_1+a_0$$
$$\therefore f(n)=a_m+\cdots+a_2+a_1+a_0$$

ㄱ. $f(100)=1$

ㄴ. $(f\circ f)(999)=f(27)=9$

ㄷ. [반례] $n=15$일 때, $f(n)=6$으로 $f(n)$은 6의 배수이지만 n은 6의 배수가 아니다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

14 함수 $y=x^2-6x\,(x\ge3)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=x^2-6x\,(x\ge3)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다. 즉

$x^2-6x=x,\quad x(x-7)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=7$

이때 $x\ge3$이므로 $x=7$

따라서 $(a,b)=(7,7)$이므로 $10ab=490$

15 두 함수 f, g의 정의에 의해서

$f(1)=3$, $f(2)=9$, $f(3)=7$, $f(4)=1$

$g(1)=7$, $g(2)=9$, $g(3)=3$, $g(4)=1$

$\therefore (f\circ g^{-1})(1)+(g\circ f^{-1})(7)$

$=f(g^{-1}(1))+g(f^{-1}(7))=f(4)+g(3)=1+3=4$

18 $f^3=I$이므로 $f(1)=3$이면

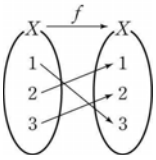
$f(3)=2,\ f(2)=1$

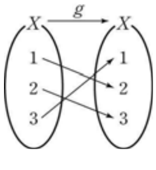
이때 함수 f의 역함수 g에 대하여

$g^3=I$이므로 $g^{10}=g,\ g^{11}=g^2$

$\therefore g^{10}(2)+g^{11}(3)=g(2)+g(g(3))$

$=3+2=5$





19 $(a+3)(2-a)>0$이어야 하므로

$(a+3)(a-2)<0$, 즉 $-3<a<2$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a는

$-2,-1,0,1$의 4개이다.

20 방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 근은 방정식 $f(x)=x$의 근과 같다. $x\ge1$일 때

$x^2-2x+2=x$에서 $x=1,\ 2$

따라서 구하는 합은 3이다.

21 $f(2)=4$, $f^{-1}(1)=4$이므로

$f(2)+f^{-1}(1)=4+4=8$

22 $(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(2)=3$

23 함수 $y=x^2-6x\,(x\ge3)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=x^2-6x\,(x\ge3)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다. 즉

$x^2-6x=x,\quad x(x-7)=0$

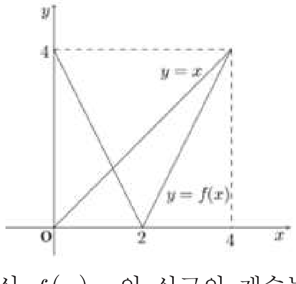
$\therefore x=0$ 또는 $x=7$

이때 $x\ge3$이므로 $x=7$

따라서 $(a,b)=(7,7)$이므로 $10ab=490$

24 ㄱ. $f(f(1))=f(2)=0$ (참)

ㄴ. 방정식 $f(x)=$의 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 개수와 같다.



따라서 방정식 $f(x)=$의 실근의 개수는 2이다. (참)

ㄷ. $f(f(x))=f(x)$에서 $f(x)=t$로 치환하고 방정식 $f(t)=t$를 만족하는 해를 구해보면

$|2t-4|=t$ 에서 $\quad t=\frac{4}{3}$ 또는 $t=4$

(ⅰ) $f(x)=\frac{4}{3}$인 경우

$|2x-4|=\frac{4}{3}$ 에서 $x=\frac{4}{3}$ 또는 $x=\frac{8}{3}$

(ⅱ) $f(x)=4$인 경우

$|2x-4|=4$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 모든 실근의 합은 $\quad \frac{4}{3}+\frac{8}{3}+0+4=8$ (참)

25 조건 (가)에 의하여 함수 f는 일대일 대응이다.

집합 X의 임의의 원소 x에 대하여

$1 \leq f(x) \leq 7$

조건 (나)에서

$f(f(3))=f(3)-6 \geq 1$

즉 $f(3) \geq 7$이므로 $\quad f(3)=7$

$f(f(3))=f(7)=7-6=1$

따라서 $\quad f(3)=7,\ f(7)=1$ …… ㉠

$f(7)=1$이므로

$f(f(2))=f(2)-4 \geq 2$

즉 $f(2) \geq 6$이고 $f(3)=7$이므로 $\quad f(2)=6$

$f(f(2))=f(6)=6-4=2$

따라서 $\quad f(2)=6,\ f(6)=2$ …… ㉡

$f(7)=1,\ f(6)=2$이므로

$f(f(1))=f(1)-2 \geq 3$

즉 $f(1) \geq 5$이고 $f(2)=6,\ f(3)=7$이므로

$f(1)=5$

$f(f(1))=f(5)=5-2=3$

따라서 $\quad f(1)=5,\ f(5)=3$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에 의하여 $\quad f(4)=4$

따라서 $\quad f(2)+f(3)+f(4)=6+7+4=17$

26 원의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 원의 중심으로부터 두 직선까지의 거리가 같으므로

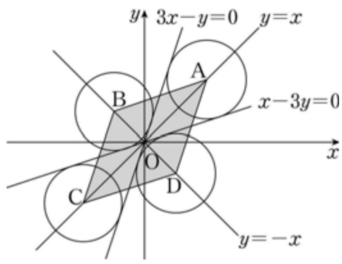
$$\frac{|a-3b|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{|3a-b|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}$$

$a-3b=\pm(3a-b)$

$a-3b=3a-b$ 에서 $\quad b=-a$

$a-3b=-(3a-b)$에서 $\quad b=a$

따라서 원의 중심은 직선 $y=x$ 또는 직선 $y=-x$ 위에 있다.



(ⅰ) 원의 중심이 직선 $y=x$ 위에 있는 경우

원의 중심인 점 $(a,\ a)$와 직선 $3x-y=0$ 사이의 거리는 4이므로

$$4=\frac{|3a-a|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|2a|}{\sqrt{10}}$$

$a=\pm 2\sqrt{10}$

따라서 점 A와 점 C의 좌표는

$A(2\sqrt{10},\ 2\sqrt{10}), C(-2\sqrt{10},\ -2\sqrt{10})$

(ⅱ) 원의 중심이 직선 $y=-x$ 위에 있는 경우

원의 중심인 점 $(a,\ -a)$와 직선 $3x-y=0$ 사이의 거리는 4이므로

$$4=\frac{|3a-(-a)|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|4a|}{\sqrt{10}}$$

$a=\pm\sqrt{10}$

따라서 점 B와 점 D의 좌표는

$B(-\sqrt{10},\ \sqrt{10}),\ D(\sqrt{10},\ -\sqrt{10})$

사각형 ABCD는 두 선분 AC, BD를 대각선으로 하는 마름모이고

$\overline{AC}=\sqrt{(-2\sqrt{10}-2\sqrt{10})^2+(-2\sqrt{10}-2\sqrt{10})^2}$

$=8\sqrt{5}$

$\overline{BD}=\sqrt{\{\sqrt{10}-(-\sqrt{10})\}^2+(-\sqrt{10}-\sqrt{10})^2}$

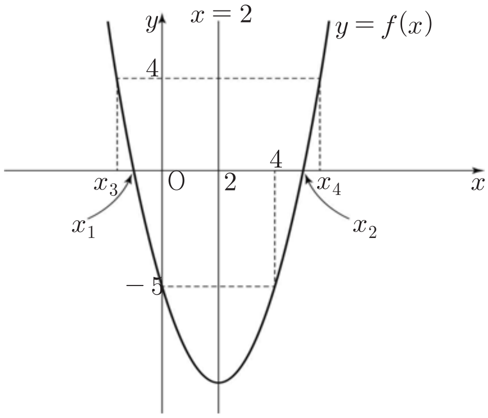
$=4\sqrt{5}$

이므로 사각형 ABCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 8\sqrt{5}\times 4\sqrt{5}=80$

27 $f(f(x))=-5$이고 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로

$f(0)=f(4)=-5$, $f(x)=0$ 또는 $f(x)=4$



$f(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 x_1, x_2라 하고

$f(x)=4$를 만족시키는 x의 값을 x_3, x_4라 하면

x_1과 x_2, x_3과 x_4는 각각 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로 $x_1+x_2=4$, $x_3+x_4=4$

따라서 $x_1+x_2+x_3+x_4=4+4=8$

28 ㄱ. 함수 f는 일대일대응이고 집합 $X\cap Y=\{2,3,4\}$의 모든 원소 x에 대하여 $g(x)-f(x)=1$ 이므로 $f(x)=5$인 x가 존재하면 $g(x)=6$이 되어 모순이다.

그러므로 집합 $X\cap Y=\{2,3,4\}$의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)\le 4$이고 함수 f는 일대일대응이므로

$\{f(2),f(3),f(4)\}=\{2,3,4\}$

$g(x)=f(x)+1$에서

$\{f(2),f(3),f(4)\}=\{3,4,5\}$

따라서 함수 $g\circ f$의 치역은 Z이다. (참)

ㄴ. ㄱ에서 $\{f(2),f(3),f(4)\}=\{2,3,4\}$이고

함수 f는 일대일대응이므로 $f(1)=5$

따라서 $f^{-1}(5)=1$ (거짓)

ㄷ. ㄴ에서 $f(1)=5$ 이므로

$f(3)<g(2)<f(1)$에서 $f(3)<g(2)<5$ … ㉠

(i) $g(2)=3$인 경우

$f(2)=g(2)-1=2$

함수 f는 일대일대응이므로 $f(3)=3$ 또는

(ii) $g(2)=4$인 경우

$f(2)=g(2)-1=3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $f(3)<3$ 이므로 $f(3)=2$

함수 f는 일대일대응이므로 $f(4)=4$

따라서 $f(4)+g(2)=4+4=8$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ이다.

29 $f^{-1}(g(x))=2x$에서

$f\left(f^{-1}(g(x))\right)=f(2x)$

$g(x)=f(2x)$

따라서 $g(3)=f(6)=\sqrt{6}$

30 $f(g(x))=f(x)$에서

$\{g(x)\}^2-2g(x)-3=x^2-2x-3$

$\{g(x)\}^2-x^2-2\{g(x)-x\}=0$

$\{g(x)-x\}\{g(x)+x-2\}=0$

따라서 $g(x)=x$ 또는 $g(x)=-x+2$ 이므로

$x^2+2x+a=x$

$x^2+x+a=0$ …… ㉠

$x^2+2x+a=-x+2$

$x^2+3x+a-2=0$ …… ㉡

㉠의 판별식을 D_1이라 하면 $D_1=1-4a$

㉡의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=9-4(a-2)=17-4a$

(i) 방정식 ㉠을 서로 다른 두 실근을 갖고, 방정식 ㉡이 실근을 갖지 않는 경우

$D_1>0$에서 $a<\dfrac{1}{4}$

$D_2<0$에서 $a>\dfrac{17}{4}$

따라서 조건을 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

(ii) 두 방정식 ㉠, ㉡이 중근을 갖는 경우

$D_1=0$에서 $a=\dfrac{1}{4}$

$D_2=0$에서 $a=\dfrac{17}{4}$

따라서 조건을 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

(iii) 방정식 ㉠은 실근을 갖지 않고, 방정식 ㉡이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우

$D_1 < 0$ 에서 $a > \frac{1}{4}$

$D_2 > 0$ 에서 $a < \frac{17}{4}$

따라서 $\frac{1}{4} < a < \frac{17}{4}$이다.

(i), (ii), (iii)에서 정수 a는 $1,2,3,4$ 이므로 개수는 4이다.

31 $(g \circ f)(1) = g(a+1) = (a+1)^2$

$a \le 4$일 때

$(f \circ g)(4) = f(16) = a+16$

$(g \circ f)(1) + (f \circ g)(4) = a^2+3a+17 = 57$

$a^2+3a-40 = (a-5)(a+8) = 0$

$a = -8$

$a > 4$일 때

$(f \circ g)(4) = f(2) = a+2$

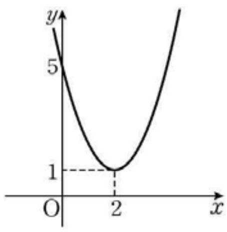
$(g \circ f)(1) + (f \circ g)(4) = a^2+3a+3 = 57$

$a^2+3a-54 = (a-6)(a+9) = 0$

$a = 6$ $S = -8+6 = -2$

따라서 $10S^2 = 40$

32 $y = x^2-4x+5$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$y = mx-m-1$

$= m(x-1)-1$

의 그래프는 점 $(1, -1)$을 지나는 직선이다.

(i) $a < 2$인 경우

주어진 함수는 일대일대응이 아니다.

(ii) $a \ge 2$인 경우

주어진 함수는 일대일대응이다.

따라서 a의 최솟값은 2이고, $x=2$에서 직선은 점 $(2, 1)$을 지나야 하므로 주어진 직선의 방정식에 $(2, 1)$을 대입하면

$1 = 2m-m-1$, $m = 2$

따라서 a의 최솟값과 그때의 m의 값의 곱은

$2 \times 2 = 4$

33 (i) $\frac{1}{2}x-1 \ge 0$, 즉 $x \ge 2$일 때

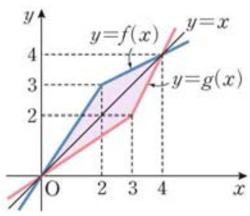
$f(x) = x+1-\left|\frac{1}{2}x-1\right|$

$= x+1-\frac{1}{2}x+1 = \frac{1}{2}x+2$

(ii) $\frac{1}{2}x-1 < 0$, 즉 $x < 2$일 때

$f(x) = x+1+\frac{1}{2}x-1 = \frac{3}{2}x$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{1}{2}\times1\times2+\frac{1}{2}\times1\times2 = 2$

이므로 구하는 넓이는 $2\times2 = 4$

34 $f(x) = t$라고 하면 $f(f(x)) = f(x)$에서 $f(t) = t$

이 방정식의 실근은 함수 $y=f(t)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 t좌표이므로 주어진 그래프에 의하여

$t=-2$, $t=1$, $t=3$

(i) $t=-2$, 즉 $f(x)=-2$일 때 $x=-2$

(ii) $t=1$, 즉 $f(x)=1$일 때 $x=1$

(iii) $t=3$, 즉 $f(x)=3$일 때 $x=3$

이상에서 방정식 $f(f(x)) = f(x)$의 모든 실근의 합은

$-2+1+3 = 2$

35 $f(x) = x^2 - 2x + a$에서

$f(2) = 2^2 - 4 + a = a$, $f(4) = 4^2 - 8 + a = a + 8$

$(f \circ f)(2) = (f \circ f)(4)$에서

$f(f(2)) = f(f(4))$

$f(a) = f(a+8)$

$a^2 - 2a + a = (a+8)^2 - 2(a+8) + a$

$16a = -48$

$a = -3$

따라서 함수 $f(x)$가 $f(x) = x^2 - 2x - 3$이므로

$f(6) = 6^2 - 2 \times 6 - 3 = 21$

V-2 유리·무리함수 P. 45-51

1. ④	2. ②	3. ②	4. ③	5. ①
6. 16	7. ③	8. ③	9. ①	10. 42
11. ④	12. ④	13. 36	14. 11	15. ③
16. ④	17. ②	18. 48	19. ⑤	20. ④
21. ⑤	22. ①	23. 16	24. 20	25. ①
26. 12	27. ⑤	28. ②		

1 곡선 $y=\dfrac{k}{x-2}+1$이 x축과 만나는 점은

$0=\dfrac{k}{x-2}+1$ 에서 $A(2-k,0)$

곡선 $y=\dfrac{k}{x-2}+1$이 y축과 만나는 점은

$y=\dfrac{k}{0-2}+1$에서 $B\left(0,-\dfrac{k}{2}+1\right)$

곡선 $y=\dfrac{k}{x-2}+1$의 두 점근선의 방정식은

$x=2, y=1$이므로 $C(2,1)$

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로

$$\frac{1-0}{2-(2-k)}=\frac{1-\left(-\frac{k}{2}+1\right)}{2-0}$$

$$\frac{1}{k}=\frac{k}{4}$$

$k^2=4k<0$ 이므로 $k=-2$

2 $y=\dfrac{bx-5}{x+a}=\dfrac{b(x+a)-(ab+5)}{x+a}=\dfrac{-ab-5}{x+a}+b$

의 점근선의 방정식은 $x=-a,\ y=b$

따라서 $a=1,\ b=2$이므로 $a+b=3$

3 $y=\dfrac{3x-14}{x-5}=\dfrac{3(x-5)+1}{x-5}=\dfrac{1}{x-5}+3$

$y=\dfrac{3x-14}{x-5}$의 그래프는 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

$y=\dfrac{1}{x}$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$y=\dfrac{3x-14}{x-5}$의 그래프는

$y=(x-5)+3=x-2$에 대하여 대칭이다.

따라서 $k=-2$

4 갑의 속력을 v라 하면 을의 속력은 pv이다. 을이 갑을 따라 잡을 때까지 갑이 달린 거리를 l이라 하면

$\dfrac{l}{v}=\dfrac{l+q}{pv}$이므로 $l=\dfrac{q}{p-1}$

따라서 을이 갑을 따라 잡을 때까지 을이 달린 거리는

$l+q=\dfrac{q}{p-1}+q=\dfrac{pq}{p-1}$

5 $y=\dfrac{-3x+7}{x-2}$, 즉 $y=\dfrac{1}{x-2}-3$은 $y=x$와 $y=-x$에 대하여 대칭인 유리함수 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다. 따라서 유리함수 $y=\dfrac{-3x+7}{x-2}$의 그래프는 두 직선 $y=x$와 $y=-x$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 직선, 즉 $y=x-5$와 $y=-x-1$에 대하여 대칭이다.

$\therefore\ a+b+c+d=-6$

6 $\mathrm{Q}\left(a,\ \dfrac{8}{a}+3\right)$이라고 하면

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{a^2+\left(\dfrac{8}{a}\right)^2}$

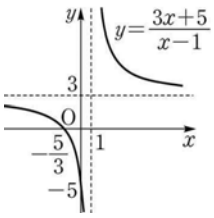
이때 $a^2+\left(\dfrac{8}{a}\right)^2\geq 2\sqrt{a^2\cdot\left(\dfrac{8}{a}\right)^2}=16$

(단, 등호는 $a=\pm2\sqrt{2}$ 일 때 성립)

이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}\geq\sqrt{16}=4$

따라서 $m=4$이므로 $m^2=16$

7 유리함수 $y=\dfrac{3x+5}{x-1}=\dfrac{8}{x-1}+3$의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. 점근선의 방정식은 $x=1,\ y=3$이다.

ㄴ. 그래프는 제3사분면을 지난다.

ㄷ. 그래프는 점근선의 교점 $(1,3)$을 지나고 기울기가 1 또는 -1인 직선에 대하여 대칭이다. 즉

$y-3=\pm1(x-1)$

$\therefore y=x+2$ 또는 $y=-x+4$

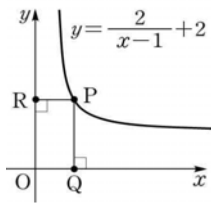
따라서 그래프는 직선 $y=x+3$에 대하여 대칭이 아니다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

8 $y=\dfrac{-2x+6}{x-2}=\dfrac{2}{x-2}-2$이므로 함수 $y=\dfrac{-2x+6}{x-2}$의 그래프는 $y=\dfrac{2}{x+3}+1$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m=5,\ n=-3$이므로 $\quad m+n=2$

9 $x>0$에서 정의된 함수 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 함수 $y=\dfrac{2}{x-1}+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{2}{t-1}+2\right)\ (t>1)$라고 하면 직사각형 ROQP의 넓이 S는 $\quad S=t\left(\dfrac{2}{t-1}+2\right)$

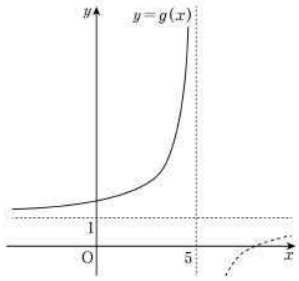
이때 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$S=(t-1+1)\left(\frac{2}{t-1}+2\right)$$
$$=4+2(t-1)+\frac{2}{t-1}$$
$$\ge 4+2\sqrt{2(t-1)\left(\frac{2}{t-1}\right)}=8$$

(단, 등호는 $t=2$일 때 성립)

따라서 직사각형 ROQP의 넓이의 최솟값은 8이다.

10 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $g(x)$는 $x<5$에서 x의 값이 커지면 $g(x)$의 값도 커지므로 $g(t)<g(t+2)$이다.

$t<1$일 때 $h(t)=f(g(t+2))$이고

$g(t)\le x\le g(t+2)$이므로 $f(x)$는 $x=g(t+2)$에서 최솟값을 갖는다. 따라서 $g(t)\le x\le g(t+2)$에서 x의 값이 커지면 $f(x)$의 값은 작아진다.

$1\le t<3$일 때 $h(t)=6$이므로

$g(t)\le x\le g(t+2)$에서 $f(x)$의 최솟값이 6으로 일정하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 (a,b)라 하면 a는 $1\le t<3$인 모든 t에 대하여 $g(t)\le a\le g(t+2)$이어야 하므로 $a=g(3)$이고, $b=6$이다.

한편 $g(3)=2$이므로

$f(x)=\alpha(x-2)^2+6$

$h(-1)=7$에서 $h(-1)=f(g(1))=7$

$g(1)=\dfrac{3}{2}$에서

$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\alpha\left(\dfrac{3}{2}-2\right)^2+6=\dfrac{\alpha}{4}+6=7$

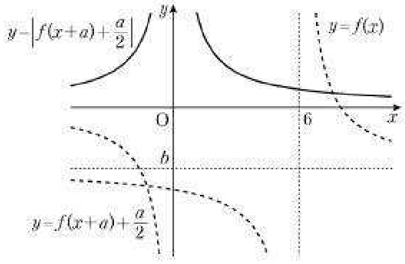
$\alpha=4$

$f(x)=4(x-2)^2+6$

$f(5)=4\times3^2+6=42$

12 곡선 $y=\left|f(x+a)+\dfrac{a}{2}\right|$는 곡선 $y=f(x+a)+\dfrac{a}{2}$의 x축 아래에 그려진 부분을 x축에 대하여 대칭이

동한 것이고, 이 곡선이 y축에 대하여 대칭이려면 곡선 $y=f(x+a)+\dfrac{a}{2}$의 점근선의 방정식은 그림과 같이 $x=0, y=0$이어야 함을 알 수 있다.



$f(x)=\dfrac{a}{x-6}+b$에서

$f(x+a)+\dfrac{a}{2}=\dfrac{a}{x+a-6}+b+\dfrac{a}{2}$

이고 곡선 $y=f(x+a)+\dfrac{a}{2}$의 점근선의 방정식은

$x=6-a,\ y=b+\dfrac{a}{2}$

이 점근선의 방정식이 $x=0, y=0$이어야 하므로

$6-a=0,\ b+\dfrac{a}{2}=0$

$a=6, b=-3$

따라서 $f(x)=\dfrac{6}{x-6}-3$ 이므로

$f(b)=f(-3)=-\dfrac{11}{3}$

13 $a-1-b=2\sqrt{b}$에서 a, b가 자연수이므로 $a-1-b$는 정수이다. 따라서 $\sqrt{b}$도 정수이어야 하므로 b는 제곱수이다. 50 이하의 제곱수는

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49

(i) $b=49$일 때

$a-1-49=2\sqrt{49}=14$에서 $a=64$

그런데 a가 50 이하인 자연수이어야 하므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $b=36$일 때

$a-1-36=2\sqrt{36}=12$에서 $a=49$

(i), (ii)에서 b의 최댓값은 36이다.

15 (i) $k\le 0$일 때, 두 그래프는 항상 한 점에서 만난다.

(ii) $k>0$일 때, $\sqrt{2kx}=x+1-k$

$x^2+2(1-2k)x+(1-k)^2=0$

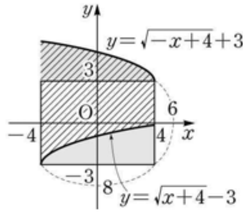
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$\dfrac{D}{4}=(1-2k)^2-(1-k)^2<0$

$\therefore 0<k<\dfrac{2}{3}$

(i), (ii)에서 실수 k의 범위는 $0<k<\dfrac{2}{3}$이다.

18 $y=\sqrt{x+4}-3$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

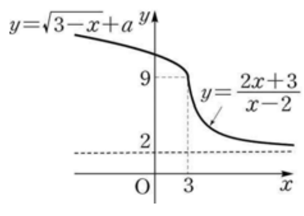


또 $y=\sqrt{-x+4}+3$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 다음 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

위의 그림에서 두 어두운 부분의 넓이가 같으므로 구하는 도형(빗금친 부분)의 넓이는 굵은 선으로 표시된 직사각형의 넓이와 같다.

따라서 구하는 넓이는 $6\times 8=48$

19 조건 ㈎에서 치역이 $\{y\,|\,y>2\}$이고, 조건 ㈏에서 함수 f는 일대일함수이므로 주어진 함수의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f(3)=9$이므로 $a=9$

$f(2)=\sqrt{3-2}+9=10$이므로

$f(2)f(k)=10f(k)=40 \qquad \therefore f(k)=4$

따라서 $f(k)=\dfrac{2k+3}{k-2}=4$에서 $k=\dfrac{11}{2}$

20 A의 실지수는 $\dfrac{2a}{2a(2+a)}=\dfrac{1}{2+a}$

B의 실지수는 $\dfrac{8a}{a(4+2a)}=\dfrac{4}{2+a}=4\times\dfrac{1}{2+a}$

따라서 B의 실지수가 A의 실지수의 4배이므로

21 $f(x)=\dfrac{2x+b}{x-a}=\dfrac{2(x-a)+2a+b}{x-a}$

$=\dfrac{2a+b}{x-a}+2$

에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점은 점 $(a,\ 2)$이다.

이때, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점은 점 $(a,\ 2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이므로 그 좌표는 $(2,\ a)$와 같다.

(가)에서 함수 $y=f(x-4)-4$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 그래프와 일치하므로 함수 $y=f(x-4)-4$의 그래프의 두 점근선의 교점은 점 $(a+4,\ -2)$이다.

점 $(2,\ a)$와 점 $(a+4,\ -2)$가 같으므로 $a=-2$

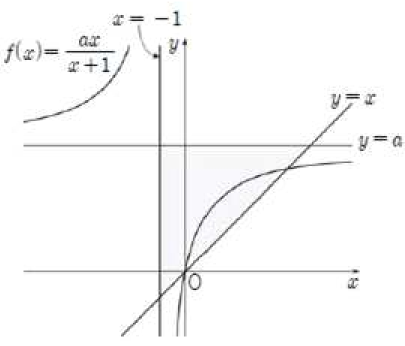
함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{2a+b}{x}$의 그래프를 평행이동한 그래프와 일치하므로 (나)에서

$2a+b=3,\quad b=7$

따라서 $\quad a+b=5$

22 $f(x)=\dfrac{ax}{x+1}=-\dfrac{a}{x+1}+a$

이므로 점근선의 방정식은 $\quad x=-1,\ y=a$



두 직선 $x=-1,\ y=a$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이가 18이므로

$\dfrac{1}{2}(a+1)^2=18$

따라서 $a=5$

23 $\mathrm{A}(a,\ \sqrt{a}),\ \mathrm{B}(a,\ \sqrt{3a})$

점 C의 y좌표는 점 B의 y좌표와 같으므로

$\sqrt{x}=\sqrt{3a},\ x=3a$

따라서 $\mathrm{C}(3a,\ \sqrt{3a}),\ \mathrm{D}(3a,\ 3\sqrt{a})$

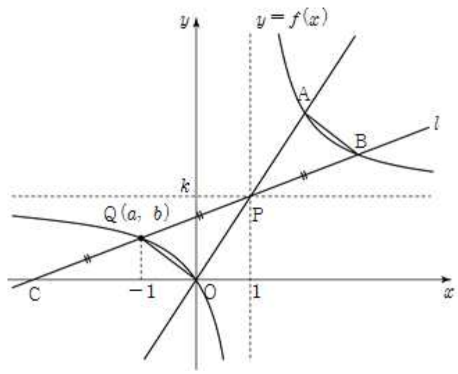
두 점 A, D를 지나는 직선의 기울기는

$\dfrac{3\sqrt{a}-\sqrt{a}}{3a-a}=\dfrac{\sqrt{a}}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$

$\dfrac{1}{\sqrt{a}}=\dfrac{1}{4}$이므로 $\qquad\sqrt{a}=4$

따라서 $\qquad a=16$

24



직선 l과 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점 중 B가 아닌 점을 $\mathrm{Q}(a,\ b)$라 하자.

삼각형 APB와 삼각형 OPQ는 합동이고,

$S_2=2S_1$이므로 $\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{QP}}=\overline{\mathrm{CQ}}\quad\cdots\cdots$㉠

$\mathrm{P}(1,\ k)$이므로 $b=\dfrac{k}{2}=f(a)$

$\dfrac{k}{2}=\dfrac{k}{a-1}+k$이므로 $\qquad a=-1$

$\mathrm{Q}\left(-1,\ \dfrac{k}{2}\right)$

또한 ㉠에 의하여 $\qquad\mathrm{C}(-3,\ 0)$

직선 l의 방정식은 $kx-4y+3k=0$이고 원점과 직선 l 사이의 거리가 1이므로

$$\frac{|3k|}{\sqrt{k^2+16}}=1,\ k^2=2$$

따라서 $10k^2=20$

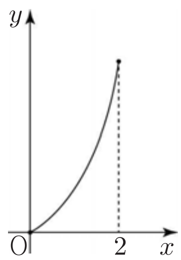
25 삼각형 AFD와 삼각형 EFC는 닮음이므로

$\overline{AD}:\overline{EC}=\overline{DF}:\overline{CF}$

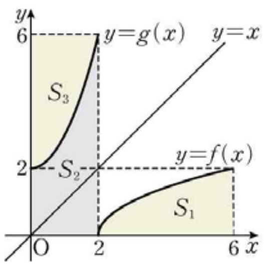
$3:x=\{f(x)+2\}:f(x)$

$f(x)=\frac{-6}{x-3}-2\ (0\le x\le 2)$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 모양은



26 $g(x)=x^2+2\quad(x\ge 0)$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프를 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



이때 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 x축, y축, $x=2$, $y=6$으로 둘러싸인 직사각형에서 S_2를 뺀 부분을 S_3라 하면 $S_1=S_3$

따라서 $S_1+S_2=S_3+S_2=2\times 6=12$

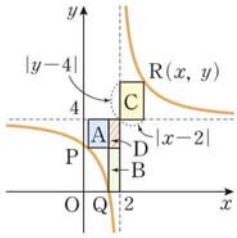
27 하천에 버려진 쓰레기를 10 % 치우는 데 드는 비용이 800만 원이므로

$800=\frac{10a}{100-10},\ 800=\frac{a}{9}$

$a=7200$

따라서 $y=\frac{7200x}{100-x}$이므로 쓰레기를 90 %를 치우는 데 드는 비용은 $\frac{7200\times 90}{100-90}=64800$(만 원)

28 $y=\frac{2}{x-2}+4$에서



$y-4=\frac{2}{x-2}$

$(x-2)(y-4)=2$

점 R의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 점 R를 꼭짓점으로 하고 이 점과 이웃하지 않는 두 변이 점근선과 겹치는 직사각형의 가로, 세로의 길이는 각각 $|x-2|$, $|y-4|$이다. 이 직사각형의 넓이는 $|(x-2)(y-4)|=2$로 점의 위치에 관계없이 일정함을 알 수 있다.

위의 그림에서 빗금친 부분의 직사각형을 D라 하면 $S_C=S_A+S_D=S_B+S_D$

따라서 $S_A=S_B<S_C$

VI-1 순열 P.56-60

1. ③	2. ①	3. ④	4. ③	5. ②
6. ②	7. ⑤	8. 20	9. 396	10. ②
11. 17	12. ⑤	13. 64	14. ③	15. 8
16. ⑤	17. 576	18. 336		

1 A보다 B가 본사로부터 거리가 먼 지사에 발령이 나야하므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각한다. (i) A가 '가'지사에 발령나는 경우

'나'지사에 나머지 사람을 발령하는 경우의 수는

$3\times3\times2\times1=18$

(ii) A가 '나'지사에 발령나는 경우

'가'지사에 나머지 사람을 발령하는 경우의 수는

$3\times3\times2\times1=18$

(iii) A가 '가', '나'지사 이외의 곳에 발령나는 경우

'가', '나'지사에 나머지 사람을 발령하는 경우의 수는 ${}_3P_2$이고 나머지의 곳에 A, B를 포함하여 세 명을 발령하는 경우의 수는 3가지뿐이므로 구하는 경우의 수는

${}_3P_2\times3=18$

이상에서 구하는 모든 경우의 수는

$18+18+18=54$

2 5가지의 색 중 4개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_5P_4=5\times4\times3\times2=120$

3 

우선 남학생 12명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$12!$

남학생 2명씩 묶어서 그 사이에 여학생 2명을 세우는 경우의 수는 ${}_7P_2=7\times6=42$

따라서 경우의 수는 $42\times12!$

이므로 $N=42$

4 첫날 2팀, 둘째 날 3팀 공연하는 경우의 수 : 5!

첫날 3팀, 둘째 날 2팀 공연하는 경우의 수 : 5!

$5!+5!=240$

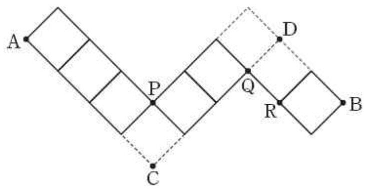
5 (1) $f(1)+f(2)=4$ 일 때 $f(1)$와 $f(2)$의 순서쌍은 $(1,3),(2,2),(3,1)$ 3가지.

(2) $f(1)+f(2)=8$ 일 때 $f(1)$와 $f(2)$의 순서쌍은 $(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)$ 5가지.

(3) $f(1)+f(2)=12$일 때 $f(1)$와 $f(2)$의 순서쌍은 $(6,6)$ 1가지

따라서 총 $3+5+1=9$ 가지.

6 A 지점에서 출발하여 C 지점을 지나지 않고 D 지점도 지나지 않으면서 B 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는 다음 그림과 같이 P, Q, R 지점을 거쳐 가는 경우의 수와 같다.



A → P로 가는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{3!}=4$

P → Q로 가는 경우의 수는 $\dfrac{3!}{2!}=3$

Q → R로 가는 경우의 수는 1

R → B로 가는 경우의 수는 2

따라서 구하는 경우의 수는

$4\times3\times1\times2=24$

7 아버지와 어머니가 홀수 번호 의자에 앉는 경우의 수 : ${}_3P_2=6$

나머지 3자리에 할머니와 아들과 딸이 앉는 경우의 수 : $3!=6$가지.

총 : $6\times6=36$가지.

8 (ⅰ) 꽃병 A에 장미를 꽂은 경우

꽃병 B에 꽂을 꽃 9송이 중 카네이션이 a송이, 백합이 b송이라 하면 (a, b)로 가능한 경우의 수는 $(1, 8)$, $(2, 7)$, $(3, 6)$, $(4, 5)$, $(5, 4)$, $(6, 3)$의 6이다.

(ⅱ) 꽃병 A에 카네이션을 꽂은 경우

꽃병 B에 꽂을 꽃 9송이 중 장미가 a송이, 백합이 b송이라 하면 (a, b)로 가능한 경우의 수는 $(1, 8)$, $(2, 7)$, $(3, 6)$, $(4, 5)$, $(5, 4)$, $(6, 3)$, $(7, 2)$, $(8, 1)$의 8이다.

(ⅲ) 꽃병 A에 백합을 꽂은 경우

꽃병 B에 꽂을 꽃 9송이 중 카네이션이 a송이, 장미가 b송이라 하면 (a, b)로 가능한 경우의 수는 $(1, 8)$, $(2, 7)$, $(3, 6)$, $(4, 5)$, $(5, 4)$, $(6, 3)$의 6이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는

$6+8+6=20$

9 각 분단에는 같은 학급 학생이 3명 올 수 없으므로 1분단에는 A학급 학생이 2명 또는 1명이 배정된다.

1분단에 A학급 학생 2명이 배정되는 경우를 먼저 생각하자. (단, 빈 좌석에는 B학급 학생을 배정한다.)

(ⅰ) 첫째 줄에 A학급 학생이 앉지 않는 경우

C	
A	C
	A
A	

(1)

	C
A	
C	A
A	

(2)

	C
A	
	A
A	C

(3)

(ⅱ) 둘째 줄에 A학급 학생이 앉지 않는 경우

A	
	C
A	
C	A

(4)

A	C
C	
	A
A	

(5)

A	
	C
C	A
A	

(6)

(ⅲ) 셋째 줄에 A학급 학생이 앉지 않는 경우

A	
C	A
	C
A	

(7)

A	
	A
C	
A	C

(8)

C	A
A	
	C
A	

(9)

(ⅳ) 넷째 줄에 A 학급 학생이 앉지 않는 경우

A	
C	A
A	
	C

(10)

A	
	A
A	C
C	

(11)

A	C
	A
A	
	C

(12)

(3)과 (12)의 경우 C 학급 학생이 같은 분단에 배정되어 학급 번호가 작은 학생이 항상 앞줄에 앉기 때문에 C 학급 학생이 배정되는 방법의 수는 1이다.

(1), (2), (4), (5), (6), (7), (8), (9), (10), (11)의 경우 C 학급 학생이 서로 다른 분단에 배정되는 방법의 수는 2이다.

그러므로 C 학급 학생이 배정되는 모든 방법의 수는 $1\times2+2\times10=22$

A학급 학생이 배정되는 방법의 수는 3

B학급 학생이 배정되는 방법의 수는 3

1분단에 A 학급 학생 2명이 배정되는 경우 학생이 배정되는 방법의 수는 $22\times3\times3$

1분단에 A 학급 학생이 1명 배정되는 경우는 2분단에 A 학급 학생이 2명 배정되는 경우와 같으므로 위에서 구한 1분단에 A 학급 학생이 2명 배정되는 방법의 수와 같다.

따라서 구하는 방법의 수는

$22\times3\times3\times2=396$

10 은행 A와 은행 B를 이용하는 고객의 집합을 각각 A, B라 하면 조건 (가)에서

$n(A)+n(B)=82$

$n(A\cup B)=66$

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)=82-65=17$

따라서 한 은행만 이용하는 고객의 수는 $65-17=48$이고 조건 (나)에서 두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 남자 고객의 수와 두 은행 A, B 중 한 은행만 이용하는 여자 고객의 수는 각각 24명이다.

따라서 은행 A와 은행 B를 모두 이용하는 여자 고객의 수는 $30-24=6$이다.

11 각 자리의 숫자의 합이 5인 다섯 자리 자연수 중에서 0을 한 개도 사용하지 않고 만든 숫자는 11111 한 가지 뿐이다. 0을 한 개 사용하여 만든 숫자는 0, 1, 1, 1, 2로 이루어져 있으므로

(i) 맨 앞자리에 1이 오는 경우
나머지 숫자 0, 1, 1, 2를 배열하는 방법의 수는
$\frac{4!}{2!}=12$(가지)

(ii) 맨 앞자리에 2가 오는 경우
나머지 숫자 0, 1, 1, 1을 배열하는 방법의 수는
$\frac{4!}{3!}=4$(가지)
따라서 모든 자연수의 개수는 $1+12+4=17$

12 1을 네 번 이상 사용하면 반드시 1끼리 서로 이웃하게 되므로 1은 세 번 이하로 사용된다.

(i) 1이 사용되지 않는 경우 $2^4=16$

(ii) 1이 한 번 사용되는 경우
1로 시작되는 경우의 수는 $2^4=16$
2로 시작되는 경우의 수는 $4\times2^3=32$

(iii) 1이 두 번 사용되는 경우
1로 시작되는 경우의 수는 $3\times2^3=24$
2로 시작되는 경우의 수는 $3\times2^2=12$

(iv) 1이 세 번 사용되는 경우
첫 번째, 세 번째, 다섯 번째에는 반드시 1이 사용되므로 $2^2=4$
따라서 조건을 만족시키는 자연수의 개수는 104이다.

13 함수 f가 집합 $X=\{-3,-2,-1,1,2,3\}$에 대하여 X에서 X로의 함수라고 하자.
$|f(x)+f(-x)|=1$
$\Leftrightarrow f(x)+f(-x)=1$ 또는 $f(x)+f(-x)=-1$
이므로 $x>0$ 인 X의 원소 x에 대하여 다음이 성립한다.

(i) $f(x)=1$ 일 때, $f(-x)=-2$

(ii) $f(x)=2$ 일 때
$f(-x)=-3$ 또는 $f(-x)=-1$

(iii) $f(x)=3$ 일 때, $f(-x)=-2$
따라서 $f(1)$과 $f(-1)$을 대응시키는 경우의 수는 4이고, $f(2)$와 $f(-2)$를 대응시키는 경우의 수와 $f(3)$와 $f(-3)$을 대응시키는 경우의 수는 각각 4이므로 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$의 개수는
$4\times4\times4=64$

14 1이 적힌 정사각형과 6이 적힌 정사각형에 같은 색을 칠해야 하고, 변을 공유하는 두 정사각형에는 서로 다른 색을 칠하므로 1,6,2,3,5,4가 적힌 정사각형의 순서로 색을 칠한다고 생각하자.
서로 다른 4가지 색의 일부 또는 전부를 사용하여 색을 칠하므로
1이 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 4가지
6이 적힌 정사각형에는 1이 적힌 정사각형에 칠한 색과 같은 색을 칠해야 하므로 칠할 수 있는 색은 1가지
2가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 1이 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 3가지
3이 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 2, 6이 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 2가지
5가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 2, 6이 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 2가지
4가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 1, 5가 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 2가지
따라서 조건을 만족시키도록 색을 칠하는 경우의 수는
$4\times1\times3\times2\times2\times2=96$

15 정육면체의 한 점 A를 꼭짓점으로 하는 정삼각형은 ACE, ACG, AEG로 3개이고, 정육면체의 꼭짓점은 8개이므로 정삼각형의 개수는 24이다.
이때 각 정삼각형은 3개씩 중복이 되므로 정삼각형의 개수는 $24\div3=8$

16 호랑이를 1번 우리에 넣는 경우, 사자는 3, 5, 6번 우리에 넣을 수 있고, 사자를 넣고 남은 4개의 우리에 늑대, 여우, 원숭이, 곰을 넣으면 되므로 경우의 수는 $3\times4!$
마찬가지로 호랑이를 2~6번 우리에 넣는 경우의 수

를 구하면 각각 $2\times4!$, $4\times4!$, $2\times4!$, $3\times4!$, $4\times4!$ 이므로 구하는 방법의 수는

$3\times4!+2\times4!+4\times4!+2\times4!+3\times4!+4\times4!$

$4!\times(3+2+4+2+3+4)=24\times18=432$

17 조건 (가)에서 A와 B가 같이 앉을 수 있는 2인용 의자는 마부가 앉아 있는 의자를 제외한 3개이고, 두 사람은 자리를 서로 바꿔 앉을 수 있으므로 A와 B가 앉는 경우의 수는 $3\times2!=6$

남은 5개의 좌석에 C와 D가 앉는 전체 경우의 수는 ${}_5P_2=20$

이때 C와 D가 같은 2인용 의자에 이웃하여 앉는 경우의 수를 구해 보자.

두 사람이 이웃하여 앉을 수 있는 의자는 A와 B가 앉아 있는 의자와 마부가 앉아 있는 의자를 제외한 나머지 2개이고, 두 사람은 서로 자리를 바꿔 앉을 수 있으므로 C와 D가 앉는 경우의 수는 $2\times2!=4$

따라서 조건 (나)에서 C와 D가 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수는 $20-4=16$

남은 3개의 좌석에 E, F, G가 앉는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 모든 경우의 수는 $6\times16\times6=576$

18 각 자리의 수 중 어느 두 수의 합이 9가 되는 세 자리 자연수의 개수를 구하면 다음과 같다. 1부터 9까지 자연수 중 합이 9가 되는 두 수의 쌍은 $(1,8)$, $(2,7)$, $(3,6)$, $(4,5)$의 4개다. 이 4개의 쌍 중 하나를 택하고 9개의 숫자 중 이미 택한 2개의 숫자를 제외한 7개의 숫자 중 하나를 택하여 3개의 숫자를 얻는다.

이렇게 얻은 3개의 숫자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $4\times7\times{}_3P_3=4\times7\times6=168$

한편, 1부터 9까지 자연수 중 세 수를 택하는 순열의 수는 ${}_9P_3=9\times8\times7=504$

따라서 구하는 세 자리 자연수의 개수는

$504-168=336$

VI-2 조합 P.62-67

1. ③	2. ①	3. ④	4. ②	5. ③
6. 60	7. ②	8. 528	9. 450	10. ②
11. ④	12. 6	13. 960	14. ②	15. ②
16. ④	17. 1680	18. ④	19. ④	20. ①

1 (1) $a=6$ 일 때, ${}_5C_2=10$ 가지,
(2) $a=5$ 일 때, ${}_4C_2=6$ 가지.
총 $10+6=16$ 가지.

2 합성함수 $f\circ f$의 치역의 원소의 개수가 1이므로 정의역에 속하는 임의의 원소 x에 대하여 $f(f(x))=a$라고 할 때 a가 될 수 있는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_1=4$(가지)이다.
이때 $f(f(x))=a$인 경우 a를 포함하는 함수 f의 치역은 $\{a,\ b\}$, $\{a,\ c\}$, $\{a,\ d\}$로 3가지이다.
이제 정의역의 원소를 $\{a,\ b,\ c,\ d\}$라 하고 f의 치역을 $\{a,\ b\}$라고 하면 $f(f(a))=a$이기 위해서 $f(a)=a$ 이어야 한다.
또 $f(f(b))=a$이기 위해서 반드시 $f(b)=a$가 되어야 한다.
이때 정의역의 나머지 두 원소 $c,\ d$가 a 또는 b에 대응하는 방법의 수는

$$2^2-1=3$$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$$4\times3\times3=36$$

3 ${}_n\mathrm{C}_2+{}_{n+1}\mathrm{C}_3=2\cdot{}_n\mathrm{P}_2$에서

$$\frac{n(n-1)}{2}+\frac{(n+1)n(n-1)}{6}=2n(n-1)$$

$n(n-1)\neq0$이므로 양변에 $\dfrac{6}{n(n-1)}$을 곱하면

$$3+(n+1)=12$$

$$\therefore\ n=8$$

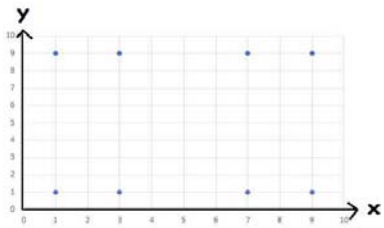
4 ${}_n\mathrm{P}_2-{}_7\mathrm{C}_2=\dfrac{n!}{(n-2)!}-\dfrac{7!}{5!2!}$

$=n(n-1)-21=21$
$n(n-1)=42=7\times6$ 이므로 $n=7$

5 ${}_4\mathrm{C}_2\times3!=6\times6=36$

6 ${}_6C_4\times{}_4C_3=15\times4=60$

7 $A=\{3,9,7,1\},B=\{9,1\}$
C의 좌표를 좌표평면에 표시하면 아래와 같다.



삼각형을 만들기 위해서 y좌표가 9인 점들 중에서 2개, y좌표가 1인 점들 중에서 1개를 선택하는 경우의 수가 ${}_4C_2\times{}_4C_1=6\times4=24$,
y좌표가 9인 점들 중에서 1개, y좌표가 1인 점들 중에서 2개를 선택하는 경우의 수가
${}_4C_1\times{}_4C_2=4\times6=24$,
총 경우의 수는 $24+24=48$

8 (i) 2층 또는 3층 중 한 층의 사물함만을 여학생에게 배정하는 경우

$$2\times2!\times{}_5\mathrm{P}_3=240$$

(ii) 1층의 사물함만을 여학생에게 배정하는 경우

$${}_3\mathrm{P}_2\times{}_4\mathrm{P}_3=144$$

(iii) 2층, 3층의 사물함을 각각 1개씩 여학생에게 배정하는 경우

$${}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times2!\times3!=48$$

(iv) 1층의 사물함을 한 여학생에게 배정하고 2층 또는 3층의 사물함을 다른 여학생에게 배정하는 경우

$${}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1\times2!\times3!=96$$

따라서 (i), (ii), (iii), (iv)에 의해서 구하는 경우의

수는 $240+144+48+96=528$

9 우선 빨간색 공을 넣는 방법의 수는 ${}_5C_3=10$ 모든 바구니에 공이 적어도 하나씩 들어가야 하므로 빨간색 공을 넣지 않은 빈 바구니에 파란색 공을 각각 1개씩 넣는다. 남은 4개의 파란색 공을 서로 다른 5개의 바구니에 각각 2개 이하로 넣는 경우의 수는 다음과 같다.

(ⅰ) $2+2$인 경우
파란색 공을 넣는 경우의 수는 ${}_5C_2=10$

(ⅱ) $2+1+1$인 경우
파란색 공을 넣는 경우의 수는 ${}_5C_3\times{}_3C_1=30$

(ⅲ) $1+1+1+1$인 경우
파란색 공을 넣는 경우의 수는 ${}_5C_4=5$

따라서 구하는 경우의 수는
$10\times(10+30+5)=450$

10 선택한 카드에 적혀 있는 5개의 수의 합이 짝수이고 1부터 8까지의 모든 자연수의 합이 36으로 짝수이다. 여기서 선택한 카드에 적혀 있는 5개의 수의 합이 짝수인 경우는 선택되지 않는 카드 3장에 적혀 있는 세 수의 합이 짝수인 경우와 같다.
세 수의 합이 짝수가 되는 경우는 세 수가 모두 짝수이거나, 세 수 중 짝수 1개, 홀수 2개인 경우이다.

(ⅰ) 모두 짝수인 경우의 수는
${}_4C_3=4$

(ⅱ) 짝수 1개, 홀수 2개인 경우의 수는
${}_4C_1\times{}_4C_2=4\times6=24$

(ⅰ), (ⅱ)로부터 구하는 경우의 수는
$4+24=28$

11 정사각형 모양의 노란색 시트지 2장을 창문 네 개 중 두 개를 택하여 붙이는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_4C_2$이다. 나머지 창문 2개를 직각이등변삼각형 모양으로 각각 나누는 경우의 수는 2×2이고, 나누어진 네 개의 영역에 직각이등변삼각형 모양의 시트지 4장을 붙이는 경우의 수는 $4!$이다.
따라서 구하는 경우의 수는
${}_4C_2\times2\times2\times4!=576$

12 $f(2)=4$이고 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$이므로 1에 대응할 수 있는 Y의 원소는 5 또는 6이다.
또 $f(3)>f(4)$이므로 Y의 원소 1, 2, 3 중 2개를 뽑아 크기가 큰 수부터 차례로 $f(3)$, $f(4)$에 대응시키면 된다.
따라서 구하는 함수의 개수는 $2\times{}_3C_2=2\cdot3=6$

13 꽃 4송이와 초콜릿 2개를 조건을 만족시키도록 5명의 학생에게 나누어 주는 경우는 다음과 같다.

(1) 1명의 학생이 초콜릿 2개를 받는 경우
초콜릿 2개를 받는 학생을 정하는 경우의 수는 5개이고, 나머지 4명의 학생에게 꽃을 각각 한 송이 씩 나누어 주는 경우의 수는 $4!=4\times3\times2\times1=24$
이므로 1명의 학생이 초콜릿 2개를 받는 경우의 수는

$5\times24=120$

(2) 1명의 학생이 꽃 2송이를 받는 경우
4송이의 꽃 중에서 2송이의 꽃을 고르는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$이고, 이 2송이의 꽃을 받는 학생을 정하는 경우의 수는 5, 남은 두 송이의 꽃을 줄 학생을 정하는 경우의 수는 ${}_4P_2=12$ 이고, 꽃을 받지 못한 2명의 학생에게 초콜릿을 각각 1개씩 주는 경우의 수가 1이므로 1명의 학생이 꽃 2송이를 받는 경우의 수는
$6\times5\times12\times1=360$

(3) 1명의 학생이 꽃 1송이와 초콜릿 1개를 받는 경우
4송이의 꽃을 4명의 학생에게 각각 1송이씩 주는 경우의 수는 ${}_5P_4=120$이고 꽃을 받지 못한 학생에게 초콜릿 1개를 주고 꽃을 받은 학생 중 1명을 택해 남은 초콜릿 1개를 주는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$ 이므로 1명의 학생이 꽃 1송이와 초콜릿 1개를 받는 경우의 수는 $120\times4=480$
따라서 (1),(2),(3)에서 구하는 경우의 수는
$120+360+480=960$

14 A, B가 선택하는 과목 중에서 서로 일치하는 과목이 수학 과목인 경우와 과학 과목인 경우로 나누어 구할 수 있다.

(i) 서로 일치하는 과목이 수학 과목일 때

3개의 수학 과목 중에서 1개를 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_1$

위의 각 경우에 대하여 나머지 6개의 과목 중에서 A가 2개를 선택하고, 나머지 4개의 과목 중에서 B가 2개를 선택하는 경우의 수는 ${}_6C_2 \times {}_4C_2 = 90$

이때의 경우의 수는 3×90

(ii) 서로 일치하는 과목이 과학 과목일 때

4개의 과학 과목 중에서 1개를 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_1 = 4$

위의 각 경우에 대하여 나머지 6개의 과목 중에서 A, B는 수학 과목을 1개 이상 선택해야 하므로 다음 두 가지 경우로 나눌 수 있다.

(ii-1) A, B 모두 수학 과목 1개와 과학 과목 1개를 선택하는 경우의 수는

$({}_3C_1 \times {}_3C_1) \times ({}_2C_1 \times {}_2C_1) = 36$

(ii-2) A, B 중 한 명은 수학 과목 2개를 선택하고, 다른 한 명은 수학 과목 1개와 과학 과목 1개를 선택하는 경우의 수는 다음과 같다.

A, B 중 수학 과목 2개를 선택할 학생을 택하는 경우의 수는 ${}_2C_1$, 이 학생이 3개의 수학 과목 중 2개를 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_2$, 다른 한 명이 남아 있는 수학 과목 1개를 선택하는 경우의 수는 ${}_1C_1$, 이 학생이 과학과목 중 공통으로 선택한 한 과목을 제외한 3개의 과목 중 1개를 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_1$이다. 따라서 ${}_2C_1 \times {}_3C_2 \times ({}_1C_1 \times {}_3C_1) = \boxed{18}$

이때의 경우의 수는 $4 \times (36 + 18)$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$3 \times 90 + 4 \times (36 + 18)$이다.

따라서 $p = 90, q = 18$이므로 $p + q = 108$

15 그림과 같이 의자의 위치와 좌석 번호를 나타내고 각 가로줄을 1열, 2열이라고 하자.

1열	→	11	12	13	14	15	16	17
2열	→			23	24	25		

규칙 (가)에 의해 A는 좌석 번호가 24 또는 25인 의자에 앉을 수 있고, B는 좌석 번호가 11 또는 12 또는 13 또는 14인 의자에 앉을 수 있다. 규칙 (나), (다)에 의해 어느 두 학생도 양옆 또는 앞뒤로 이웃하여 앉지 않는다.

5명의 학생이 앉을 수 있는 5개의 의자를 선택한 후 규칙 (가)에 의해 A, B가 앉고 남은 3개의 의자에 나머지 3명의 학생이 앉는 것으로 경우의 수를 구할 수 있다.

(i) A가 좌석 번호가 24인 의자에 앉을 때

11	12	13	14	15	16	17
		23	A	25		

A가 좌석 번호가 24인 의자에 앉으면 나머지 4명의 학생은 규칙 (나), (다)에 의해 좌석 번호가 11,13, 15,17인 의자에 각각 한 명씩 앉아야 한다.

이때 B는 규칙 (가)에 의해 좌석 번호가 11,13인 2개의 의자 중 1개의 의자에 앉아야 하므로 B가 의자를 선택하여 앉는 경우의 수는 ${}_2C_1 = 2$

위의 각 경우에 대하여 A, B를 제외한 3명의 학생이 나머지 3개의 의자에 앉는 경우의 수는

$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

이때의 경우의 수는 $2 \times 6 = 12$

(ii) A가 좌석 번호가 25인 의자를 선택할 때

11	12	13	14	15	16	17
		23	24	A		

A가 좌석 번호가 25인 의자에 앉으면 나머지 4명의 학생은 규칙 (나), (다)에 의해 좌석 번호가 11 또는 12인 의자 중 하나, 좌석 번호가 16 또는 17인 의자 중 하나, 좌석 번호가 14인 의자, 좌석번호가 23인 의자에 각각 한 명씩 앉아야 한다. 좌석 번호가 11 또는 12인 의자 중 하나를 선택하고(㉠) 좌석 번호가 16 또는 17인 의자 중 하나를 선택하는 경우의 수는 ${}_2C_1 \times {}_2C_1 = 4$

위의 각 경우에 대하여 B는 규칙 (가)에 의해 ㉠에서 선택된 의자와 좌석 번호가 14인 의자 중 1개의 의자에 앉아야 하므로 B가 의자를 선택하여 앉는 경우의 수는 ${}_2C_1 = 2$

위의 각 경우에 대하여 A, B를 제외한 3명의 학생이

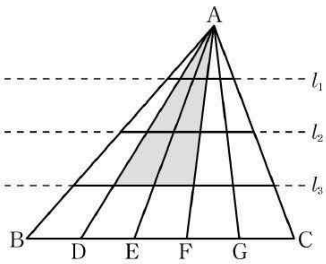
나머지 3개의 의자에 앉는 경우의 수는

$3! = 3\times2\times1 = 6$

이때의 경우의 수는 $4\times2\times6 = 48$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 $12+48=60$

16



위의 그림에서 두 직선 AD, AF와 직선 l_3을 선택하면 색칠된 부분과 같은 삼각형이 만들어진다.

이와 같이 6개의 직선 AB, AD, AE, AF, AG, AC 중 서로 다른 2개의 직선을 택하고, 4개의 직선 l_1, l_2, l_3, BC 중 1개의 직선을 택하면 삼각형이 1개 만들어진다.

따라서 이 도형의 선들로 만들 수 있는 삼각형의 개수는 ${}_6C_2\times{}_4C_1 = 15\times4=60$

17 함수 $f: A\to B$가 일대일대응이 되기 위해서는 두 집합 A, B의 원소의 개수가 같아야 하므로 집합 S를 두 집합 A, B로 나누는 방법의 수는 ${}_8\mathrm{C}_4$

그 각각에 대하여 일대일대응인 f의 개수가 $4!$이므로 구하는 함수 f의 개수는 ${}_8\mathrm{C}_4\times4! = 1680$

18 먼저 8가지의 색에서 4가지의 색을 뽑는 경우의 수는 ${}_8\mathrm{C}_4$가지이고 뽑은 4가지의 색을 안쪽 원의 내부를 색칠하는 경우의 수는 $\frac{4!}{4} = 3!$

내부를 색칠하게 되면 위치가 고정되므로 나머지 4가지의 색으로 바깥쪽 4개의 영역을 칠하는 경우의 수는 $4!$이다.

따라서 구하는 방법의 수는 ${}_8\mathrm{C}_4\times3!\times4! = 10080$

19 3개의 가로줄 중 2개의 가로줄을 택하는 경우의 수는 ${}_3C_2 = 3$

택한 2개의 가로줄 중 한 가로줄에서 1개의 숫자를 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_1 = 3$이고, 조건 (나)로부터 나머지 한 가로줄에서 이미 선택한 숫자와 다른 세로줄에 있는 1개의 숫자를 선택하는 경우의 수는 ${}_2C_1 = 2$

따라서 조건을 만족시키도록 2개의 숫자를 선택하는 경우의 수는 $3\times3\times2=18$이다.

20 $A = \{x|x\text{는 }10\text{ 이하의 자연수}\}$

$= \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

$B = \{x|x\text{는 }6\text{ 이상 }15\text{ 이하의 자연수}\}$

$= \{6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$

에서 $A-B = \{1,2,3,4,5\}$, $A\cap B = \{6,7,8,9,10\}$

이므로 $n(A-B)=5$, $n(A\cap B)=5$

$X_1 = X\cap(A-B)$, $X_2 = X\cap(A\cap B)$라 하면

$X = X_1\cup X_2$이고 $X_1\cap X_2 = \varnothing$이다.

(ⅰ) $n(X\cup B) = 12$이고 $n(B)=10$이므로

$n(X_1) = \boxed{2}$

집합 X_1은 집합 $A-B$의 부분집합 중 원소의 개수가 2인 부분집합이므로 가능한 집합 X_1의 개수는 ${}_5C_2 = \boxed{10}$이다.

(ⅱ) 집합 X_2는 집합 $A\cap B$의 부분집합이므로 가능한 집합 X_2의 개수는 $2^5 = \boxed{32}$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 집합 X의 개수는 집합 X_1을 정하는 경우의 수와 집합 X_2를 정하는 경우의 수의 곱과 같으므로

${}_5C_2\times2^5 = \boxed{10}\times\boxed{32} = 320$

따라서 $p=2, q=10, r=32$이므로 $p+q+r=44$