Ⅲ-1 평면좌표 P.59-64

1. 14	2. ⑤	3. ②	4. 34	5. ①
6. ④	7. ⑤	8. 11	9. 16	10. 13
11. 116	12. ①	13. ③	14. ③	15. 200
16. ②	17. ⑤	18. 505	19. ①	

1 두 점 $A(a-1,\ 4)$, $B(5,\ a-4)$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$ 이므로

$$\overline{AB}^2=(6-a)^2+(a-8)^2=10$$

$$\therefore a^2-14a+45=0$$

따라서 모든 a의 값의 합은 14이다.

2 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면

$$\overline{OP}^2+\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$$
$$=(x^2+y^2)+\{(x-3)^2+y^2\}+\{x^2+(y-6)^2\}$$
$$=3x^2-6x+3y^2-12y+45$$
$$=3(x-1)^2+3(y-2)^2+30$$

따라서 $x=1$, $y=2$일 때, 구하는 최솟값은 30이다.

3 삼각형 ABC의 외심을 O′이라고 하면 외심의 성질에 의하여 O′은 변 BC의 중점이고 삼각형 ABC는 변 BC를 빗변으로 하는 직각삼각형이다.

따라서 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$이고 $\overline{BC}=2\overline{O'A}$이므로

$$\overline{BC}^2=4\overline{O'A}^2=4(3^2+2^2)=52$$

$$\therefore \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=52$$

4 주어진 그림에서 점 C에서 x축 위에 내린 수선의 발을 E라고 하면 삼각형의 합동조건에 의하여

$\triangle AOB\equiv\triangle BEC$이므로 $\overline{OB}=\overline{EC}$

따라서 점 C의 좌표는 $(5,\ 3)$이므로

$$\overline{OC}^2=5^2+3^2=34$$

5 선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3\cdot9+2\cdot4}{3+2},\ \frac{3\cdot7+2\cdot(-3)}{3+2}\right),\ \text{즉 } (7,\ 3)$$

6 $\dfrac{1+3+a}{3}=\dfrac{8}{3}$, $\dfrac{2+5+b}{3}=\dfrac{14}{3}$이므로

$a=4$, $b=7$ $\quad\therefore a+b=11$

7 $A\left(a,\ \dfrac{1}{2}a\right)$, $B(b,\ 3b)$라고 하면 삼각형 OAB의 무게중심의 좌표가 $\left(2,\ \dfrac{8}{3}\right)$이므로

$$\frac{a+b}{3}=2,\quad \frac{\frac{1}{2}a+3b}{3}=\frac{8}{3}$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=2$

$\therefore$ $A(4,\ 2)$, $B(2,\ 6)$

점 A는 직선 $y=-2x+k$ 위의 점이므로

$k=10$

[다른 풀이] 직선 $y=-2x+k$과 두 직선 $y=\dfrac{1}{2}x$, $y=3x$의 교점 A, B의 좌표를 구하면

$$A\left(\frac{2}{5}k,\ \frac{1}{5}k\right),\ B\left(\frac{1}{5}k,\ \frac{3}{5}k\right)$$

이때 무게중심의 x좌표가 2이므로

$$\frac{\frac{2}{5}k+\frac{1}{5}k}{3}=2\qquad\therefore k=10$$

8 삼각형 ABC의 세 꼭짓점의 좌표를 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$이라고 하면

$$\left(\frac{x_2+2x_1}{3},\ \frac{y_2+2y_1}{3}\right)=(10,\ 8)$$

$$\therefore 2x_1+x_2=30,\ 2y_1+y_2=24\quad\cdots\cdots㉠$$

$$\left(\frac{x_3+3x_2}{4},\ \frac{y_3+3y_2}{4}\right)=(5,\ -3)$$

$$\therefore 3x_2+x_3=20,\ 3y_2+y_3=-12\quad\cdots\cdots㉡$$

$$\left(\frac{2x_1+3x_3}{5},\ \frac{2y_1+3y_3}{5}\right)=(2,\ 12)$$

$$\therefore 3x_3+2x_1=10,\ 3y_3+2y_1=60\quad\cdots\cdots㉢$$

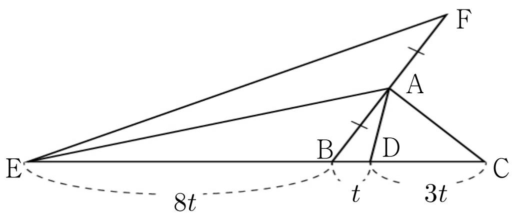
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$x_1+x_2+x_3=15,\ y_1+y_2+y_3=18$$

$$\therefore G(a,b)=G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$
$$=G(5,6)$$

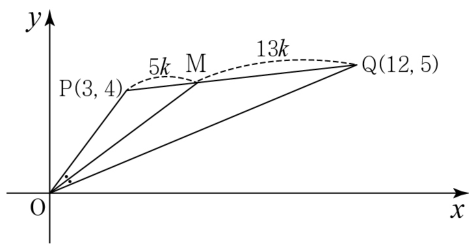
따라서 $a=5$, $b=6$이므로 　$a+b=11$

9 삼각형 ABC에서 점 D는 선분 BC를 $1:3$으로 내분하므로 　$\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{DC}}=1:3$
점 E는 선분 BC를 $2:3$으로 외분하므로
$\overline{\mathrm{EB}}=2\overline{\mathrm{BC}}$이고, 점 F는 선분 AB를 $1:2$로 외분하므로
$\overline{\mathrm{BF}}=2\overline{\mathrm{AB}}$이다.
$\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{EB}}=1:8$이므로 삼각형 AEB의 넓이는 삼각형 ABD의 넓이의 8배이다.
또한 $\overline{\mathrm{BF}}=2\overline{\mathrm{AB}}$이므로 삼각형 FEB의 넓이는 삼각형 ABD의 넓이의 16배이다.
따라서 　$k=16$



(단, t는 실수)

10 $\overline{\mathrm{OP}}=5$, $\overline{\mathrm{OQ}}=13$
$\angle\mathrm{POQ}$의 이등분선과 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 교점을 M이라 하면 각의 이등분선의 성질에 의해
$\overline{\mathrm{PM}}:\overline{\mathrm{MQ}}=5:13$

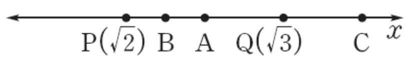


점 M은 선분 PQ를 $5:13$으로 내분하므로 점 M의 x좌표는 　$\dfrac{b}{a}=\dfrac{11}{2}$
따라서 　$a+b=13$

11 정사각형 $\mathrm{A_3A_4B_4C_4}$는 한 변의 길이가 18이므로 점 $\mathrm{A_3}$의 좌표는 　$(12,\ 0)$
정사각형 $\mathrm{OA_1B_1C_1}$, $\mathrm{A_1A_2B_2C_2}$, $\mathrm{A_2A_3B_3C_3}$의 넓이의 비가 $1:4:9$이므로 정사각형의 한 변의 길이의 비는
$\overline{\mathrm{OA_1}}:\overline{\mathrm{A_1A_2}}:\overline{\mathrm{A_2A_3}}=1:2:3$
$\overline{\mathrm{OA_3}}=12$이므로
$\overline{\mathrm{OA_1}}=2$, $\overline{\mathrm{A_1A_2}}=4$, $\overline{\mathrm{A_2A_3}}=6$
그러므로 　$\mathrm{B_1}(2,\ 2)$, $\mathrm{B_3}(12,\ 6)$
따라서 　$\overline{\mathrm{B_1B_3}}^2=\left(\sqrt{100+16}\right)^2=116$

12 선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점 P의 좌표는
$$\frac{2\cdot3+3(-2)}{2+3}=0 \qquad \therefore \mathrm{P}(0)$$
선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점 Q의 좌표는
$$\frac{2\cdot3-(-2)}{2-1}=8 \qquad \therefore \mathrm{Q}(8)$$
따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 중점의 좌표는
$$\frac{0+8}{2}=4$$

13 점 A는 선분 PQ의 중점이다.
점 B는 선분 PQ를 $1:3$으로 내분하는 점이다.
점 C는 선분 PQ를 $3:1$로 외분하는 점이다.
따라서 세 점 A, B, C의 위치를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 세 점의 위치를 왼쪽부터 순서대로 나열하면
B, A, C

14 선분 AC를 $m:n$으로 내분하는 점 P의 좌표는
$$p=\frac{mc+na}{m+n} \qquad \cdots\cdots ㉠$$
선분 BC를 $m:n$으로 외분하는 점 P의 좌표는
$$p=\frac{mc-nb}{m-n} \qquad \cdots\cdots ㉡$$
㉠, ㉡에서

$$\frac{mc+na}{m+n}=\frac{mc-nb}{m-n} \quad \cdots\cdots ㉢$$

ㄱ. $a=1,\ b=5,\ m=1,\ n=2$를 ㉢에 대입하면

$$\frac{c+2}{3}=\frac{c-10}{-1} \qquad \therefore c=7$$

ㄴ. $a=0,\ c=3,\ m=2,\ n=1$을 ㉢에 대입하면

$$\frac{6+0}{3}=\frac{6-b}{1} \qquad \therefore p=2,\ b=4$$

$$\therefore a<p<c<b$$

ㄷ. ㉠의 양변에 $m+n$을 곱하면

$$(m+n)p=mc+na \quad \cdots\cdots ㉣$$

㉡의 양변에 $m-n$을 곱하면

$$(m-n)p=mc-nb \quad \cdots\cdots ㉤$$

㉣, ㉤을 연립하여 풀면

$$p=\frac{a+b}{2}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

15 $B(-1,\ 3)$, $D(3,\ -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-3=\frac{-1-3}{3+1}(x+1)$$

$$\therefore y=-x+2$$

점 A, B, C, D, E가 한 직선 위에 있으므로

$A(a,\ -a+2)$, $C(c,\ -c+2)$라고 하면 점 B는 선분 AC의 중점이므로

$$a+c=-2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

점 C는 선분 AD를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$$a-3c=-6 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-3,\ c=1$$

$$\therefore A(-3,\ 5),\ C(1,\ 1)$$

점 E는 선분 CD를 $3:2$로 외분하는 점이므로

$$\left(\frac{3\cdot3-2\cdot1}{3-2},\ \frac{3\cdot(-1)-2\cdot1}{3-2}\right), \text{ 즉 } (7,\ -5)$$

$$\therefore \overline{AE}^2=(7+3)^2+(-5-5)^2=200$$

16 시청의 위치를 원점으로 하는 좌표평면을 잡으면

혜미네 집의 좌표는 $(-4,\ -2)$

학교의 좌표는 $(0,\ 1)$, 도서관의 좌표는 $(a,\ b)$

이때 혜미네 집에서 도서관까지의 거리는 학교에서 도서관까지의 거리의 3.5배이므로 도서관의 좌표는 두 점 $(-4,\ -2)$, $(0,\ 1)$을 $3.5:1$, 즉 $7:2$로 외분하는 점이다.

$$\left(\frac{7\cdot0-2\cdot(-4)}{7-2},\ \frac{7\cdot1-2\cdot(-2)}{7-2}\right),$$

즉 $\left(\frac{8}{5},\ \frac{11}{5}\right)$ $\therefore a+b=\frac{19}{5}$

17 $\overline{AC}=\sqrt{16+9}=5$

$\overline{AB}=\sqrt{25+144}=13$

선분 AP와 선분 DC가 평행하므로 평행선의 성질에 의하여

$\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{PB}:\overline{PC}$

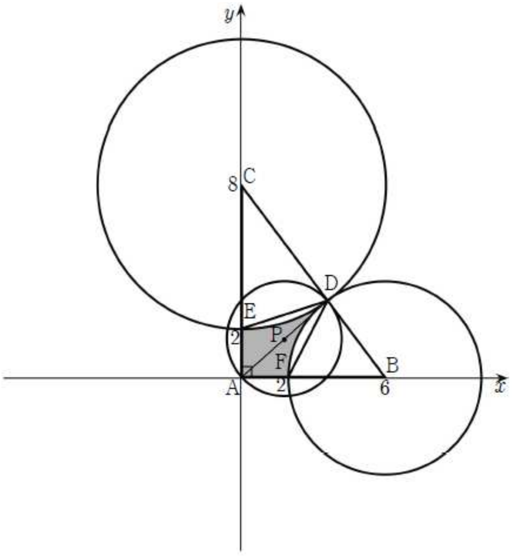
그런데 $\overline{AC}=\overline{AD}$이므로 $\overline{AD}=5$

$\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{PB}:\overline{PC}=13:5$이므로

점 P는 $\overline{BC}$를 $13:5$로 외분하는 점이다.

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{77}{8},\ \frac{45}{8}\right)$

18 점 A는 원점 O에, 점 B는 x축 위에, 점 C는 y축 위에 오도록 직각삼각형 ABC를 좌표평면 위에 두면 B(6, 0), C(0, 8)이다.



두 지점 B, C에 설치된 기지국에서 보내는 전파를 동시에 받는 지점 D는 선분 BC를 2 : 3으로 내분하는 점이므로 D$\left(\frac{18}{5},\ \frac{16}{5}\right)$이다. 이 도시에서 전파가 수신되지 않는 지역이 없도록 하기 위해서는 두 지점 E(0, 2), F(2, 0)에 대하여 도형 AFDE를 포함하는 원의 중심에 새로운 기지국을 설치하면 된다.

한편, 사각형 AFDE에 대하여 각 AFD와 각 DEA가 둔각이므로 새로운 기지국의 전파의 수신 변경을 최소로 하기 위해서는 선분 AD를 지름으로 하는 원의 중심 P$\left(\frac{9}{5},\ \frac{8}{5}\right)$에 새로운 기지국을 설치하면 된다.

따라서 두 점 P$\left(\frac{9}{5},\ \frac{8}{5}\right)$, B(6, 0) 사이의 거리는 $\frac{\sqrt{505}}{5}$이므로 $k=505$

19 점 $D(0,0)$, 점 $B(-1,0)$, 점 $C(1,0)$, 점 $A(a,b)$라 하면 $\overline{AB}=2\sqrt{3}$, $\overline{AD}=\sqrt{7}$이므로 $(a+1)^2+b^2=(2\sqrt{3})^2$, $a^2+b^2=(\sqrt{7})^2$를 연립하여 풀면 점 A의 좌표는 $(2,\ \sqrt{3})$, $\overline{AC}=2$이므로 삼각형 ABC는 이등변삼각형이다. 이등변삼각형의 성질에 의해 선분 CE는 선분 AB의 수직이등분선이다. 따라서 $\overline{CE}=1$이고 점 P는 삼각형 ABC의 무게중심이다. $\overline{AP}:\overline{PD}=2:1$이므로

$\overline{AP}=\frac{2\sqrt{7}}{3}$, $\overline{PD}=\frac{\sqrt{7}}{3}$

$\overline{CP}:\overline{PE}=2:1$이므로 $\overline{CP}=\frac{2}{3}$, $\overline{PE}=\frac{1}{3}$

삼각형 EPA에서 선분 PR이 각 APE의 이등분선이므로 각의 이등분선의 성질에 의해

$\overline{PA}:\overline{PE}=\overline{AR}:\overline{ER}=2\sqrt{7}:1$

삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면 삼각형 EPA의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{1}{6}$이므로

$S_1=S\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2\sqrt{7}+1}$

같은 방법으로 삼각형 CPD에서

$\overline{PD}:\overline{PC}=\overline{DQ}:\overline{CQ}=\sqrt{7}:2$

삼각형 CPD의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{1}{6}$이므로 $S_2=S\times\frac{1}{6}\times\frac{2}{\sqrt{7}+2}$

$\frac{S_2}{S_1}=8-2\sqrt{7}$ 이므로 $a=8, b=-2$

따라서 $ab=-16$

(별해) 점 D가 선분 BC의 중점이므로

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\left(\overline{AD}^2+\overline{CD}^2\right)$이 성립한다. 따라서 $\overline{AC}=2$이고 삼각형 ABC는 이등변삼각형이다.