

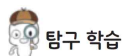


인수분해의 뜻

인수분해의 뜻을 안다.



컴퓨터 본체는 메인보드, 중앙 처리 장치, 하드 디스크 등으로 분해할 수 있다.



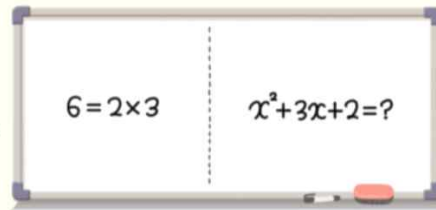
탐구 학습

인수분해는 무엇인가요?

열기

다음 대화를 읽고, 물음에 답하여 보자.

6을 소인수분해하면 $6=2 \times 3$ 이니까 6은 두 소인수의 곱으로 나타낼 수 있어.



다항식 x^2+3x+2 도 두 다항식의 곱으로 나타낼 수 있을까?



(1) 다항식의 곱셈을 이용해 $(x+1)(x+2)$ 를 전개하여 등식으로 나타내 보자.

(2) (1)에서 구한 등식의 좌변과 우변을 서로 바꾸어 보자.

다지기

(1) $(x+1)(x+2)$ 를 전개하여 등식으로 나타내면 다음과 같다.

$$(x+1)(x+2) = x^2 + 3x + \square$$

(2) 위의 등식에서 좌변과 우변을 서로 바꾸어 놓으면 다음과 같다.

$$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(\square)$$

키우기

하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타낼 수 있을까?

탐구 학습에서

$$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$$

인수분해의 뜻

이므로 다항식 x^2+3x+2 는 두 다항식 $x+1$, $x+2$ 의 곱으로 나타낼 수 있다.

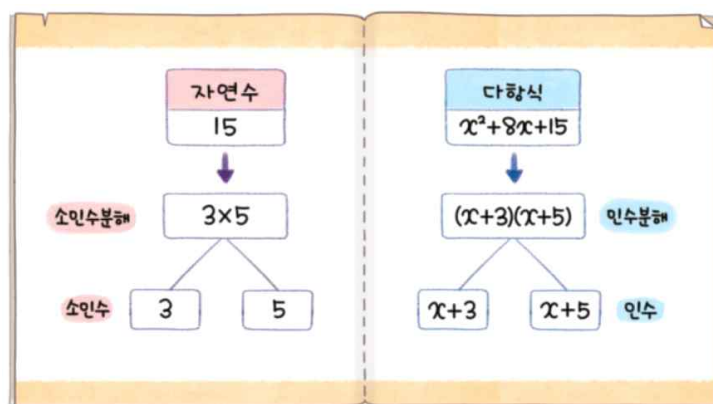
이전에 배운 내용

전개는 두 개 이상의 다항식의 곱을 하나의 다항식으로 나타내는 것이다.

이처럼 하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타낼 때, 각각의 다항식을 처음 다항식의 **인수**라고 한다. 또, 하나의 다항식을 두 개 이상의 인수의 곱으로 나타내는 것을 그 다항식을 **인수분해**한다고 한다.

$$x^2 + 3x + 2 \xrightleftharpoons[\text{전개}]{\text{인수분해}} \underbrace{(x+1)(x+2)}_{\text{인수}}$$

개념 확인



문제 1 다음 식은 어떤 다항식을 인수분해한 것인지 말하시오.

(1) $a(a+2)$

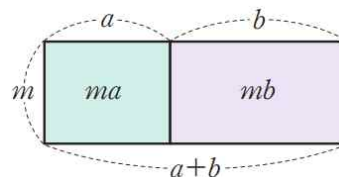
(2) $(x+1)^2$

(3) $(x+2)(x-5)$

(4) $(3x-y)(x-2y)$

$ma+mb$ 의
인수분해

다항식 $ma+mb$ 에서 두 항 ma , mb 에 공통으로 들어 있는 인수 m 을 묶어 내면 다음과 같이 인수분해할 수 있다.



$$ma + mb = m(a+b)$$

예제

1 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $ax + 2ay$

(2) $2x^2 - 4xy$

다항식을 인수분해할 때에는 공통으로 들어 있는 인수가 남지 않도록 모두 묶어 낸다.

풀이 (1) 두 항 ax 와 $2ay$ 에 공통으로 들어 있는 인수는 a 이므로

$$ax + 2ay = a(x + 2y)$$

(2) 두 항 $2x^2$ 과 $-4xy$ 에 공통으로 들어 있는 인수는 $2x$ 이므로

$$2x^2 - 4xy = 2x(x - y)$$

답 (1) $a(x + 2y)$ (2) $2x(x - y)$

문제 2 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $ax + 3a$

(2) $8x + 2xy$

(3) $a^2 - ab$

(4) $2x^2y - 6xy^2$

문제 3 인수분해를 이용하여 다음을 계산하시오.

(1) $120 \times 2.2 + 120 \times 2.8$

(2) $1024 \times 37 - 1024 \times 17$

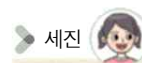
의사소통



다음은 승빈이와 세진이가 다항식을 인수분해한 것이다. 틀린 부분을 찾고, 그 이유를 설명하여 보자.



$$\begin{aligned} 4ab^2 - 2a^2 \\ = 2(2ab^2 - a^2) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 1 \\ = x(x + 5) + 1 \end{aligned}$$

1

다음 식은 어떤 다항식을 인수분해한 것인지 말하시오.

- (1) $a(x - y)$
- (2) $(x + 2)^2$
- (3) $(x + 1)(x - 1)$
- (4) $(x - 3y)(2x + y)$

2

다음 보기 중에서 식 $(x - 3)(x + 2)$ 의 인수를 모두 찾으시오.

보기

- | | |
|------------|------------|
| ㉠. $x - 3$ | ㉡. $x - 2$ |
| ㉢. $x - 1$ | ㉣. $x + 2$ |

3

다음 식을 인수분해하시오.

- (1) $3ax + 6a$
- (2) $4a^2 - 12ab$
- (3) $x^2y + xy^2$
- (4) $5ab - b^2$

4

다음 두 다항식에 공통으로 들어 있는 인수를 구하시오.

$$6x^2 + 3x, \quad 2a^2x + a^2$$

5

인수분해를 이용하여 다음을 계산하시오.

- (1) $140 \times 23 + 140 \times 27$
- (2) $1108 \times 321 - 1108 \times 21$

6

발전 문제

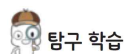
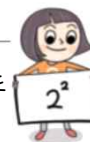
다항식 $x^2 + ax + 12$ 를 인수분해하였더니 인수가 $x + 3$, $x + b$ 이었다. 두 상수 a , b 의 값을 구하시오.



다항식의 인수분해 (1), (2)

다항식 $a^2 + 2ab + b^2$, $a^2 - 2ab + b^2$, $a^2 - b^2$ 을 인수분해할 수 있다.

1, 4, 9, 16, 25, ...가 어떤 수의 제곱인 것과 같이 다항식에서도 어떤 다항식의 제곱으로 표현되는 식이 있다.



탐구 학습

❖ $a^2 + 2ab + b^2$, $a^2 - 2ab + b^2$ 은 어떻게 인수분해하나요?



열기

$(a+1)^2$ 과 $(a-3)^2$ 에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

- (1) 다항식의 곱셈을 이용해 두 식을 각각 전개하여 등식으로 나타내 보자.
- (2) (1)에서 구한 등식의 좌변과 우변을 서로 바꾸어 보자.



다지기

- (1) $(a+1)^2$, $(a-3)^2$ 을 각각 전개하여 등식으로 나타내면 다음과 같다.

$$(a+1)^2 = a^2 + \square a + 1, (a-3)^2 = a^2 - 6a + \square$$

- (2) 위의 등식에서 좌변과 우변을 서로 바꾸어 놓으면 다음과 같다.

$$a^2 + 2a + 1 = \square, a^2 - 6a + 9 = \square$$



키우기

$a^2 + 2ab + b^2$, $a^2 - 2ab + b^2$ 과 같은 다항식의 인수분해는 어떻게 할까?

$a^2 + 2ab + b^2$,
 $a^2 - 2ab + b^2$ 의
인수분해

$(a+b)^2$ 과 $(a-b)^2$ 을 전개한 식은 각각

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

이다. 이 등식에서 좌변과 우변을 서로 바꾸어 놓으면

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2,$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

다항식의 인수분해 (1)

① $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

② $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

예제 1

다항식 $a^2 + 6a + 9$ 를 인수분해하시오.

풀이 $a^2 + 6a + 9$
 $= a^2 + 2 \times a \times 3 + 3^2$
 $= (a + 3)^2$

답 $(a + 3)^2$

따라 하기

다항식 $a^2 - 8ab + 16b^2$ 을 인수분해하시오.

풀이 $a^2 - 8ab + 16b^2$
 $=$ _____
 $=$ _____

답 _____

문제 1 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $a^2 + 4a + 4$

(2) $x^2 - 10x + 25$

(3) $a^2 + 12ab + 36b^2$

(4) $x^2 - 18xy + 81y^2$

예제 2 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $9x^2 + 12x + 4$

(2) $2x^2 - 28xy + 98y^2$

풀이 (1) $9x^2 + 12x + 4 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 2 + 2^2$
 $= (3x + 2)^2$

(2) $2x^2 - 28xy + 98y^2 = 2(x^2 - 14xy + 49y^2)$
 $= 2\{x^2 - 2 \times x \times 7y + (7y)^2\}$
 $= 2(x - 7y)^2$

답 (1) $(3x + 2)^2$ (2) $2(x - 7y)^2$

문제 2 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $9a^2 + 6a + 1$

(2) $4x^2 - 12xy + 9y^2$

(3) $3a^2 + 30ab + 75b^2$

(4) $8x^2 - 8xy + 2y^2$

완전제곱식

$(a+b)^2$, $3(a-b)^2$, $-\frac{1}{2}(2x-3y)^2$ 과 같이 다항식의 제곱으로 된 식 또는 이 식에 상수를 곱한 식을 **완전제곱식**이라고 한다.

| 완전제곱식 이해하기

예제

3 다음 식이 완전제곱식이 되도록 □ 안에 알맞은 양수를 구하시오.

(1) $a^2 + 8a + \square$

(2) $x^2 + \square xy + 36y^2$

풀이 (1) $a^2 + 8a + \square$

$$= a^2 + 2 \times a \times 4 + \square = (a+4)^2$$

이므로 □ 안에 알맞은 양수는 $4^2 = 16$ 이다.

$$\begin{array}{ccc} a^2 + & 8a & + \square \\ | & | & | \\ a^2 + & 2 \times a \times 4 & + 4^2 \end{array}$$

(2) $x^2 + \square xy + 36y^2$

$$= x^2 + \square xy + (6y)^2 = (x+6y)^2$$

이므로 □ 안에 알맞은 양수는 $2 \times 6 = 12$ 이다.

$$\begin{array}{ccc} x^2 + & \square xy & + 36y^2 \\ | & | & | \\ x^2 + & 2 \times x \times 6y & + (6y)^2 \end{array}$$

답 (1) 16 (2) 12

✧ $x^2 + ax + b$ 가 완전제곱식이 되려면 $b = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ 이어야 한다.

문제 3 다음 식이 완전제곱식이 되도록 □ 안에 알맞은 양수를 구하시오.

(1) $a^2 - 10a + \square$

(2) $x^2 + 24xy + \square y^2$

(3) $a^2 + \square a + 64$

(4) $4x^2 - \square xy + 36y^2$

의사소통



다음은 민정리와 성준리가 $a = 2 + \sqrt{3}$ 일 때, $a^2 - 4a + 4$ 의 값을 구하는 과정이다. 두 학생의 풀이 방법대로 값을 구해 보고, 어떤 방법이 더 편리한지 이야기하여 보자.

a 의 값을 먼저 대입하여 풀어 볼까?

민정

$$\begin{aligned} a^2 - 4a + 4 \\ &= (2 + \sqrt{3})^2 - 4(2 + \sqrt{3}) + 4 \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

인수분해를 먼저 한 후 a 의 값을 대입해 볼까?

성준

$$\begin{aligned} a^2 - 4a + 4 \\ &= \end{aligned}$$

❖ $a^2 - b^2$ 은 어떻게 인수분해하나요?

$a^2 - b^2$ 의 인수분해

$(a+b)(a-b)$ 를 전개한 식은

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

이다. 이 등식에서 좌변과 우변을 서로 바꾸어 놓으면

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

다항식의 인수분해 (2)

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

| $a^2 - b^2$ 인수분해하기

예제 1

다항식 $a^2 - 16$ 을 인수분해하시오.

$$\begin{aligned} \text{풀이 } a^2 - 16 \\ &= a^2 - 4^2 \\ &= (a+4)(a-4) \end{aligned}$$

$$\text{답 } (a+4)(a-4)$$

따라 하기

다항식 $4x^2 - 9y^2$ 을 인수분해하시오.

$$\begin{aligned} \text{풀이 } 4x^2 - 9y^2 \\ &= (2x)^2 - \underline{\hspace{2cm}} \\ &= \underline{\hspace{2cm}} \end{aligned}$$

$$\text{답 } \underline{\hspace{2cm}}$$

문제 4 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $a^2 - 4$

(2) $36x^2 - 1$

(3) $9a^2 - 16b^2$

(4) $4x^2 - 25y^2$

문제 5 인수분해를 이용하여 다음을 계산하시오.

(1) $51^2 - 49^2$

(2) $117^2 - 17^2$

스스로 확인하기

1

다음 식을 인수분해하시오.

- (1) $a^2 + 16a + 64$
- (2) $4a^2 - 28a + 49$
- (3) $36x^2 + 60xy + 25y^2$
- (4) $2x^2 - 32xy + 128y^2$

2

다음 식이 완전제곱식이 되도록 \square 안에 알맞은 양수를 구하시오.

- (1) $a^2 + 12a + \square$
- (2) $x^2 - 18x + \square$
- (3) $\square a^2 - 8a + 1$
- (4) $25x^2 + \square xy + 49y^2$

3

다음 식을 인수분해하시오.

- (1) $a^2 - 81$
- (2) $4x^2 - y^2$
- (3) $9a^2 - 4b^2$
- (4) $81x^2 - 49y^2$

4

인수분해를 이용하여 다음을 계산하시오.

- (1) $101^2 - 99^2$
- (2) $1.05^2 - 0.95^2$

5

이차식 $(x+1)(x+2)+k$ 가 완전제곱식이 되도록 하는 상수 k 의 값을 구하시오.

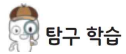
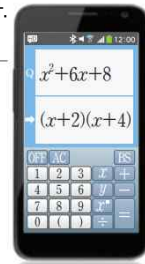
6 창의·융합

$a = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$, $b = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$ 일 때, 인수분해를 이용하여 $a^2 - b^2$ 의 값을 구하시오.

다항식의 인수분해 (3), (4)

다항식 $x^2 + (a+b)x + ab$, $acx^2 + (ad+bc)x + bd$ 를 인수분해할 수 있다.

스마트폰의 애플리케이션 중에는 다항식을 인수분해하여 주는 애플리케이션도 있다.



탐구 학습

❖ $x^2 + (a+b)x + ab$ 는 어떻게 인수분해하나요?



열기

다음 물음에 답하여 보자.

- (1) 곱이 8인 두 정수를 모두 찾고, 그 합을 구하여 보자.
- (2) 곱이 8이면서 합이 6인 두 정수를 찾아보자



다지기

- (1) 곱이 8인 두 정수와 그 합을 구하여 표로 나타내면 오른쪽과 같다.
- (2) 곱이 8이면서 합이 6인 두 정수는 와/과 이다.

곱이 8인 두 정수	두 정수의 합
1, 8	9
2, 4	
-1, -8	
	-6



키우기

다항식 $x^2 + 6x + 8$ 의 인수분해는 어떻게 할까?

$x^2 + (a+b)x + ab$
의 인수분해

$(x+a)(x+b)$ 를 전개한 식은

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

이다. 이 등식에서 좌변과 우변을 서로 바꾸어 놓으면

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

다항식의 인수분해 (3)

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$

다항식 $x^2 + 6x + 8$ 을 인수분해하여 보자.

다항식의 인수분해 (3)과 다항식 $x^2 + 6x + 8$ 을 비교하여

$$a + b = 6,$$

$$ab = 8$$

인 두 정수 a, b 를 찾으면

$$x^2 + 6x + 8 = (x + a)(x + b)$$

와 같이 인수분해할 수 있다.

$$x^2 + (a+b)x + ab$$

$$x^2 + 6x + 8$$

합이 6인 두 정수는
무수히 많으므로 곱이 8인
두 정수를 먼저 찾아야 해.



오른쪽 표에서 곱이 8인 두 정수 중에서 합이 6인 두 정수는 2와 4이다.

따라서 $x^2 + 6x + 8$ 을 인수분해하면

$$x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4)$$

이다.

곱이 8인 두 정수	두 정수의 합
1, 8	9
2, 4	6
-1, -8	-9
-2, -4	-6

예제 1

다항식 $x^2 - 2x - 15$ 를 인수분해하십시오.

풀이

곱이 -15인 두 정수	두 정수의 합
1, -15	-14
3, -5	-2
-1, 15	14
-3, 5	2

곱이 -15인 두 정수 중에서 합이 -2인 두 정수는 3, -5이므로

$$x^2 - 2x - 15 = (x + 3)(x - 5)$$

답 $(x + 3)(x - 5)$

| $x^2 + (a+b)x + ab$ 인수분해하기

따라 하기

다항식 $x^2 - 5x + 6$ 을 인수분해하십시오.

풀이

곱이 6인 두 정수	두 정수의 합

곱이 6인 두 정수 중에서 합이 -5인 두 정수는 _____, _____이므로

$$x^2 - 5x + 6 = \underline{\hspace{2cm}}$$

답 $\underline{\hspace{2cm}}$

문제 1 다음 식을 인수분해하십시오.

(1) $x^2 + 7x + 6$

(3) $x^2 - 9xy + 14y^2$

(2) $x^2 + 3x - 28$

(4) $x^2 - 3xy - 18y^2$

❖ $acx^2 + (ad+bc)x + bd$ 는 어떻게 인수분해하나요?

$acx^2 + (ad+bc)x +$
의 인수분해

$(ax+b)(cx+d)$ 를 전개한 식은

$$(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$$

이다. 이 등식에서 좌변과 우변을 서로 바꾸어 놓으면

$$acx^2 + (ad+bc)x + bd = (ax+b)(cx+d)$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

다항식의 인수분해 (4)

$$acx^2 + (ad+bc)x + bd = (ax+b)(cx+d)$$

다항식 $3x^2 + 5x - 2$ 를 인수분해하여 보자.

다항식의 인수분해 (4)와 다항식 $3x^2 + 5x - 2$ 를
비교하여

$$ac = 3, ad+bc = 5, bd = -2$$

인 네 정수 a, b, c, d 를 찾으려면

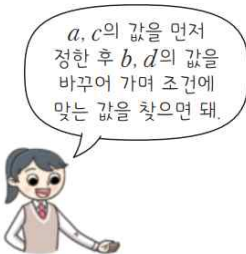
$$3x^2 + 5x - 2 = (ax+b)(cx+d)$$

와 같이 인수분해할 수 있다.

먼저 $ac = 3$ 인 양의 정수 a, c 와 $bd = -2$ 인 정수
 b, d 를 각각 구하여 오른쪽과 같이 나열한 후 대각
선으로 곱하여 $ad+bc = 5$ 가 되는 네 정수 $a, b, c,$
 d 를 찾는다.

$$\begin{array}{ccc} acx^2 + (ad+bc)x + bd & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3x^2 + & 5x & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} a & b & \rightarrow bc \\ c & d & \rightarrow ad \\ \hline & & ad+bc \end{array}$$



$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & \rightarrow 3 \\ 3 & -2 & \rightarrow -2 \\ \hline & & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & \rightarrow 6 \\ 3 & -1 & \rightarrow -1 \\ \hline & & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & -1 & \rightarrow -3 \\ 3 & 2 & \rightarrow 2 \\ \hline & & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & -2 & \rightarrow -6 \\ 3 & 1 & \rightarrow 1 \\ \hline & & -5 \end{array}$$

여기서 조건을 만족시키는 네 정수는

$$a = 1, b = 2, c = 3, d = -1$$

이므로 $3x^2 + 5x - 2$ 를 인수분해하면

$$3x^2 + 5x - 2 = (x+2)(3x-1)$$

이다.

$$\begin{array}{ccc} 3x^2 + 5x - 2 & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & \rightarrow 6 \cdots x+2 \\ 3 & -1 & \rightarrow -1 \cdots 3x-1 \\ \hline & & 5 \end{array}$$

예제

2 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $2x^2 + 9x - 5$

(2) $6x^2 - 13xy + 6y^2$

풀이 (1) $ac = 2$, $ad + bc = 9$, $bd = -5$
인 네 정수 a, b, c, d 를 찾으면
오른쪽과 같으므로

$$\begin{aligned} 2x^2 + 9x - 5 \\ = (x+5)(2x-1) \end{aligned}$$

(2) $ac = 6$, $ad + bc = -13$, $bd = 6$
인 네 정수 a, b, c, d 를 찾으면
오른쪽과 같으므로

$$\begin{aligned} 6x^2 - 13xy + 6y^2 \\ = (2x-3y)(3x-2y) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} 2x^2 + 9x - 5 & & \\ \begin{array}{l} 1 \quad \nearrow \quad 5 \rightarrow 10 \cdots x+5 \\ 2 \quad \searrow \quad -1 \rightarrow -1 \cdots 2x-1 \end{array} & & \\ \hline & & 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 6x^2 - 13xy + 6y^2 & & \\ \begin{array}{l} 2 \quad \nearrow \quad -3 \rightarrow -9 \cdots 2x-3y \\ 3 \quad \searrow \quad -2 \rightarrow -4 \cdots 3x-2y \end{array} & & \\ \hline & & -13 \end{array}$$

답 (1) $(x+5)(2x-1)$ (2) $(2x-3y)(3x-2y)$

문제 2 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $2x^2 + 7x + 3$

(2) $6x^2 - x - 2$

(3) $5x^2 - 11xy + 2y^2$

(4) $4x^2 - 4xy - 3y^2$

의사소통



다항식의 곱셈 $(x+1)^2$ 을 전개하면 $x^2 + 2x + 1$ 이 되고, 다항식 $x^2 + 2x + 1$ 을 인수분해하면 $(x+1)^2$ 이 된다. 즉, 다항식의 전개와 다항식의 인수분해는 역관계이다. 이와 유사한 관계를 다음 학생들의 대화를 참고하여 모둠별로 찾아 발표하여 보자.



1

곱이 12인 두 정수를 모두 찾아 그 합을 구하여 다음 표를 완성하고, 주어진 식을 인수분해하시오.

곱이 12인 두 정수	두 정수의 합
1, 12	
	8
	7
	-13
-2, -6	
	-7

- (1) $x^2 + 7x + 12$
 (2) $x^2 - 8x + 12$

2

다음 식을 인수분해하시오.

- (1) $x^2 - 4x - 21$
 (2) $x^2 + 8x + 15$
 (3) $x^2 - 12xy + 20y^2$
 (4) $x^2 + 3xy - 18y^2$

3

다음 식을 인수분해하시오.

- (1) $3x^2 + 7x - 6$
 (2) $4x^2 + 3x - 1$
 (3) $6x^2 + 11xy + 3y^2$
 (4) $12x^2 - 23xy + 10y^2$

4

다음 식을 인수분해하시오.

- (1) $4ax^2 + 12ax - 16a$
 (2) $5bx^2 - 16bxy + 3by^2$

5

발전 문제

이차식 A 를 인수분해하는데 정희는 상수항을 잘못 보아 $(x+7)(x-4)$ 로 인수분해하였고, 민수는 x 의 계수를 잘못 보아 $(x+10)(x-1)$ 로 인수분해하였다. 이차식 A 를 바르게 인수분해하시오.

6

발전 문제

오른쪽 그림과 같이 넓이가 $10x^2 + 29xy + 21y^2$ 인 직사각형 모양의 액자가 있다. 이 액자의 가로 길이 $5x + 7y$ 일 때, 둘레의 길이를 구하시오.

