

수능, 모의고사 연도별 문제모음

단원 : 미분-미분과 적분

반: 번호: 이름:

미분 기본유형

1. 열린 구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(x) = 1 + \{f(x)\}^2$

(나) $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

함수 $g(x) = \ln f'(x)$ 에 대하여 $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 의 값은?

[3점][2012년 3월 가15]

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

2. 열린 구간 $(0, 2\pi)$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \frac{\sin x}{e^{2x}}$ 가 $x = a$ 에서 극솟값을 가질 때, $\cos a$ 의 값은?

[4점][2013년 3월 가19]

- ① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

3. 열린구간 $(0, 2\pi)$ 에서 정의된 함수 $f(x) = e^x(\sin x + \cos x)$ 의 극댓값을 M , 극솟값을 m 이라 할 때, Mm 의 값은?

[3점][2013년 4월 가05]

- ① $-e^{2\pi}$ ② $-e^\pi$ ③ $\frac{1}{e^{3\pi}}$ ④ $\frac{1}{e^{2\pi}}$ ⑤ $\frac{1}{e^\pi}$

4. 두 함수 $f(x) = \sin^2 x$, $g(x) = e^x$ 에 대하여

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{g(f(x)) - \sqrt{e}}{x - \frac{\pi}{4}}$ 의 값은?

[4점][2016년 6월 가15]

- ① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ③ 1 ④ \sqrt{e} ⑤ e

5. 함수 $f(x) = \frac{1}{x+3}$ 에 대하여 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} = 2$ 를 만족시키는 실수 a 의 값은?

[3점][2017년 6월 가09]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

6. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \frac{f(x)}{e^{x-2}}$$

라 하자. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-3}{x-2} = 5$ 일 때, $g'(2)$ 의 값은?

[3점][2018학년도 수능 가09]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

7. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \ln(\tan x)$ 의 그래프와 x 축이 만나는 점을 P라 하자. 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 y 절편은?

[3점][2018년 3월 가13]

- ① $-\pi$ ② $-\frac{5}{6}\pi$ ③ $-\frac{2}{3}\pi$ ④ $-\frac{\pi}{2}$ ⑤ $-\frac{\pi}{3}$

8. 좌표평면에서 점 $(2, a)$ 가 곡선 $y = \frac{2}{x^2 + b}$ ($b > 0$)의 변곡점일 때, $\frac{b}{a}$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이다.)

[4점][2018년 6월 가26]

9. 미분가능한 함수 $f(x)$ 와 함수 $g(x) = \sin x$ 에 대하여 합성함수 $y = (g \circ f)(x)$ 의 그래프 위의 점 $(1, (g \circ f)(1))$ 에서의 접선이 원점을 지난다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \frac{\pi}{6}}{x - 1} = k$$

일 때, 상수 k 에 대하여 $30k^2$ 의 값을 구하시오.

[4점][2018년 9월 가26]

10. 직선 $y = 2x - 1$ 이 곡선 $y = \ln x + kx$ 에 접할 때, 상수 k 의 값은?

[3점][2018년 전북10월 가07]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

11. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $f(1) = 6$, $f'(1) = 5$ 를 만족시킬 때, 함수 $g(x) = \frac{f(x)}{x^2 + 2}$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - 2}{x - 1}$$

의 값은?

[3점][2018년 대구11월 가09]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

12. 함수 $f(x) = \tan(\pi x^2 + ax)$ 가 $x = \frac{1}{2}$ 에서 극솟값 k 를 가질 때, k 의 값은? (단, a 는 상수이다.)

[3점][2019년 3월 가11]

- ① $-\sqrt{3}$ ② -1 ③ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ 0 ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

13. 함수 $f(x) = \frac{2^x}{\ln 2}$ 과 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $g(2)$ 의 값은?

[3점][2019년 6월 가09]

$$(가) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2+4h) - g(2)}{h} = 8$$

(나) 함수 $(f \circ g)(x)$ 의 $x=2$ 에서의 미분계수는 10이다.

- ① 1 ② $\log_2 3$ ③ 2 ④ $\log_2 5$ ⑤ $\log_2 6$

14. 함수 $f(x) = xe^x$ 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 의 변곡점의 좌표가 (a, b) 일 때, 두 수 a, b 의 곱 ab 의 값은?

[3점][2019년 6월 가11]

- ① $4e^2$ ② e ③ $\frac{1}{e}$ ④ $\frac{4}{e^2}$ ⑤ $\frac{9}{e^3}$

15. 함수 $f(x) = \sin(x + \alpha) + 2\cos(x + \alpha)$ 에 대하여

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ 일 때, $\tan \alpha$ 의 값은? (단, α 는 상수이다.)

[3점][2019년 6월 가12]

- ① $-\frac{5}{6}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{6}$

16. 함수 $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ 에 대하여 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(e+h) - f(e-2h)}{h}$ 의 값은?

[3점][2019년 9월 가08]

- ① $-\frac{2}{e}$ ② $-\frac{3}{e^2}$ ③ $-\frac{1}{e}$ ④ $-\frac{2}{e^2}$ ⑤ $-\frac{3}{e^3}$

17. 함수 $f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$ 의 극댓값과 극솟값을 각각 a, b 라 할 때, $a \times b$ 의 값은?

[3점][2019년 9월 가11]

- ① $-12e^2$ ② $-12e$ ③ $-\frac{12}{e}$ ④ $-\frac{12}{e^2}$ ⑤ $-\frac{12}{e^3}$

18. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 를 $h(x) = (f \circ g)(x)$ 라 하자.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) + 1}{x - 1} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x) - 2}{x - 1} = 12$$

일 때, $f(-1) + f'(-1)$ 의 값은?

[3점][2019년 10월 가12]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

19. 곡선 $y = ax^2 - 2\sin 2x$ 가 변곡점을 갖도록 하는 정수 a 의 개수는?

[3점][2020학년도 수능 가11]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

20. 함수 $f(x) = x^3 \ln x$ 에 대하여 $\frac{f'(e)}{e^2}$ 의 값을 구하시오.

[3점][2020학년도 수능 가22]

21. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \frac{f(x)}{(e^x + 1)^2}$$

라 하자. $f'(0) - f(0) = 2$ 일 때, $g'(0)$ 의 값은?

[3점][2020년 6월 가11]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

22. 함수 $f(x) = (x^2 - 2x - 7)e^x$ 의 극댓값과 극솟값을 각각 a, b 라 할 때, $a \times b$ 의 값은?

[3점][2021학년도 수능 가07]

- ① -32 ② -30 ③ -28 ④ -26 ⑤ -24

23. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x^3 + x) = e^x$$

을 만족시킬 때, $f'(2)$ 의 값은?

[3점][2022학년도 수능 미적분24]

- ① e ② $\frac{e}{2}$ ③ $\frac{e}{3}$ ④ $\frac{e}{4}$ ⑤ $\frac{e}{5}$

역함수의 미분법

24. 함수 $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ 의 역함수 $g(x)$ 에 대하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ g\left(1 + \frac{1}{n}\right) - g\left(1 - \frac{2}{n}\right) \right\}$$

의 값을 p 라 할 때, $4p$ 의 값을 구하시오.

[4점][2012년 4월 가28]

25. 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 있다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 1이다. 함수 $f(2x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, a)$ 에서의 접선의 기울기는 b 이다. $10(a+b)$ 의 값을 구하시오.

[4점][2012년 6월 가26]

26. 함수 $f(x)=\ln(\tan x) \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ 의 역함수 $g(x)$ 에 대하여 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4g(8h)-\pi}{h}$ 의 값을 구하시오.

[4점][2013년 9월 가27]

27. 함수 $f(x)=\tan^3 x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, g(1))$ 에서의 접선의 기울기는?

[4점][2017년 7월 가16]

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

28. 양의 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여

$$f(e)=e+1, \quad f'(e)=\frac{1}{e}+1$$

이다. 함수 $f(e^x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g'(e+1)$ 의 값은?

[3점][2017년 대구8월 가13]

- ① $\frac{1}{e+2}$ ② $\frac{1}{e+1}$ ③ $\frac{1}{e}$
④ $\frac{1}{e-1}$ ⑤ $\frac{1}{e-2}$

29. 함수 $f(x)=x(e^{x-1}+3)$ 에 대하여 함수 $f(2x-1)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(f(1), g(f(1)))$ 에서의 접선의 기울기는?

[3점][2017년 전북10월 가08]

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{1}{10}$

30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 있다. $f(x)$ 가 $g(x)$ 의 역함수이고 $f(1)=2, f'(1)=3$ 이다. 함수 $h(x)=xg(x)$ 라 할 때, $h'(2)$ 의 값은?

[3점][2018학년도 수능 가11]

- ① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ 2 ⑤ $\frac{7}{3}$

31. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=1$

(나) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)g'(f(x))=\frac{1}{x^2+1}$ 이다.

$f(3)$ 의 값은?

[4점][2018년 3월 가17]

- ① e^3 ② e^6 ③ e^9 ④ e^{12} ⑤ e^{15}

32. 함수 $f(x)=3e^{5x}+x+\sin x$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, 곡선 $y=g(x)$ 는 점 $(3, 0)$ 을 지난다.

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{g(x)-g(3)}$ 의 값을 구하시오.

[3점][2018년 6월 가25]

33. $x \geq \frac{1}{e}$ 에서 정의된 함수 $f(x)=3x \ln x$ 의 그래프가 점 $(e, 3e)$ 를 지난다. 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라고 할 때,

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(3e+h)-g(3e-h)}{h}$ 의 값은?

[3점][2018년 9월 가06]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 1

34. 열린 구간 $(0, 1)$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 와 $f(x)$ 의 역함수 $g(x)$ 는 미분가능한 함수이다. $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 인 실수 t 에 대하여 $f(\cos t) = \tan t$ 일 때, $g'(1)$ 의 값은?

[3점][2018년 대구11월 가11]

- ① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{5}}{4}$

35. 함수 $f(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g'(f(-1))$ 의 값은?

[3점][2019학년도 수능 가09]

- ① $\frac{1}{(1+e)^2}$ ② $\frac{e}{1+e}$ ③ $\left(\frac{1+e}{e}\right)^2$
④ $\frac{e^2}{1+e}$ ⑤ $\frac{(1+e)^2}{e}$

36. 함수 $f(x)=x^3-5x^2+9x-5$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(4, g(4))$ 에서의 접선의 기울기는?

[4점][2019년 3월 가14]

- ① $\frac{1}{18}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{9}$ ④ $\frac{5}{36}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

37. 열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 정의된 함수

$$f(x) = \ln\left(\frac{\sec x + \tan x}{a}\right)$$

의 역함수를 $g(x)$ 라 하자. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{g(x)}{x+2} = b$ 일 때, 두 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은? (단, $a > 0$)

[4점][2020년 9월 가15]

- ① $\frac{e^2}{4}$ ② $\frac{e^2}{2}$ ③ e^2 ④ $2e^2$ ⑤ $4e^2$

38. 두 상수 a, b ($a < b$)에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$f(x) = (x-a)(x-b)^2$ 이라 하자. 함수 $g(x) = x^3 + x + 1$ 의 역함수 $g^{-1}(x)$ 에 대하여 합성함수 $h(x) = (f \circ g^{-1})(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(8)$ 의 값을 구하시오.

[4점][2021학년도 수능 가28]

- (가) 함수 $(x-1)|h(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) $h'(3) = 2$

39. 함수 $f(x) = x^3 - x$ 와 실수 전체의 집합에서 미분가능한 역함수가 존재하는 삼차함수 $g(x) = ax^3 + x^2 + bx + 1$ 이 있다. 함수 $g(x)$ 의 역함수 $g^{-1}(x)$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 를

$$h(x) = \begin{cases} (f \circ g^{-1})(x) & (x < 0 \text{ 또는 } x > 1) \\ \frac{1}{\pi} \sin \pi x & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $g(a+b)$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이다.)

[4점][2021년 7월 미적분29]

40. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 두 함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여 $f(x)$ 가 함수 $g(x)$ 의 역함수이고,

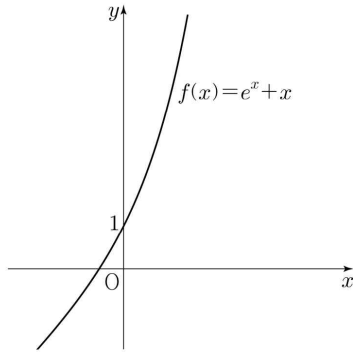
$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-2}{x-2} = \frac{1}{3}$ 이다. 함수 $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ 라 할 때, $h'(2)$ 의 값은?

[3점][2022년 7월 미적분26]

- ① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

41. 함수 $f(x) = e^x + x$ 가 있다. 양수 t 에 대하여 점 $(t, 0)$ 과 점 $(x, f(x))$ 사이의 거리가 $x=s$ 에서 최소일 때, 실수 $f(s)$ 의 값을 $g(t)$ 라 하자. 함수 $g(t)$ 의 역함수를 $h(t)$ 라 할 때, $h'(1)$ 의 값을 구하시오.

[4점][2022년 9월 미적분29]



음함수, 매개변수의 미분법

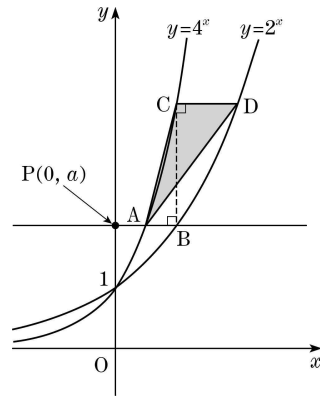
42. 곡선 $e^{3x} \ln y = 2$ 위의 점 $(0, e^2)$ 에서의 접선의 기울기는?

[3점][2012년 4월 가05]

- ① $-6e^2$ ② $-5e^2$ ③ $-4e^2$
 ④ $-3e^2$ ⑤ $-2e^2$

43. 두 곡선 $y = 4^x$, $y = 2^x$ 과 y 축 위의 점 $P(0, a)$ ($a > 1$)가 있다. 점 P 를 지나고 x 축과 평행한 직선이 두 곡선 $y = 4^x$, $y = 2^x$ 과 만나는 점을 각각 A , B 라 하자. 또, 점 B 를 지나고 y 축과 평행한 직선이 곡선 $y = 4^x$ 과 만나는 점을 C 라 하고, 점 C 를 지나고 x 축과 평행한 직선이 곡선 $y = 2^x$ 과 만나는 점을 D 라 하자.

점 P 가 점 $(0, 2)$ 를 출발하여 y 축의 양의 방향으로 매초 1의 일정한 속도로 움직인다. 점 P 가 점 $(0, 4)$ 를 지나는 순간, 삼각형 ADC 의 넓이의 시간(초)에 대한 순간변화율은?

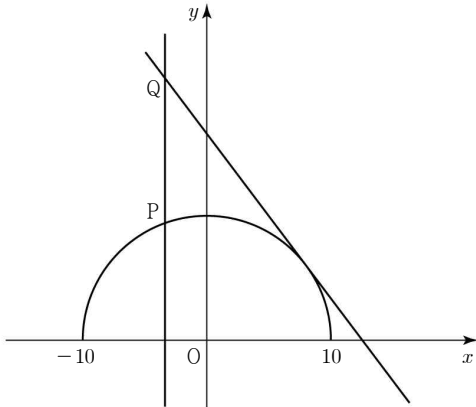


[4점][2013년 3월 가14]

- ① $5 + \frac{3}{2\ln 2}$ ② $5 + \frac{5}{2\ln 2}$ ③ $7 + \frac{1}{2\ln 2}$
 ④ $7 + \frac{3}{2\ln 2}$ ⑤ $7 + \frac{5}{2\ln 2}$

44. 곡선 $C: x^2 + y^2 = 100$ ($y \geq 0$) 과 곡선 C 의 접선 $y = -\sqrt{3}x + 20$ 이 있다. 곡선 C 위의 점 P 에서 y 축에 평행한 직선을 그어 접선과 만나는 점을 Q 라 하자. 점 P 가 점 $A(10, 0)$ 을 출발하여 곡선 위를 매초 5의 일정한 속력으로 점 $B(-10, 0)$ 까지 이동할 때, 시간(초)에 대한 선분 PQ 의 길이의 순간변화율의 최댓값을 구하시오.

[4점][2014년 7월 가26]



45. 좌표평면 위를 움직이는 점 P 의 좌표 (x, y) 가 t ($t > 0$)을 매개변수로 하여

$$x = 2t + 1, \quad y = t + \frac{3}{t}$$

으로 나타내어진다. 점 P 가 그리는 곡선 위의 한 점 (a, b) 에서의 접선의 기울기가 -1 일 때, $a+b$ 의 값은?

[3점][2016년 7월 가11]

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

46. 곡선 $x^2 + 5xy - 2y^2 + 11 = 0$ 위의 점 $(1, 4)$ 에서의 접선과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

[4점][2016년 10월 가14]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

47. 매개변수 t 로 나타내어진 곡선 $x = t - \frac{1}{t}$, $y = t + \frac{1}{t}$ 위의 점 $(0, 2)$ 에서의 접선의 기울기는?

[3점][2018년 전북5월 가08]

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

48. 곡선 $e^x - e^y = y$ 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 기울기가 1일 때, $a+b$ 의 값은?

[3점][2018년 6월 가09]

- ① $1 + \ln(e+1)$ ② $2 + \ln(e^2+2)$ ③ $3 + \ln(e^3+3)$
④ $4 + \ln(e^4+4)$ ⑤ $5 + \ln(e^5+5)$

49. 곡선 $e^y \ln x = 2y + 1$ 위의 점 $(e, 0)$ 에서의 접선의 방정식을 $y = ax + b$ 라 할 때, ab 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.)

[3점][2018년 9월 가11]

- ① $-2e$ ② $-e$ ③ -1 ④ $-\frac{2}{e}$ ⑤ $-\frac{1}{e}$

50. 곡선 $y^2 = \ln(5-x^2) + xy + 3$ 위의 점 $(2, 3)$ 에서의 접선의 방정식은 $y = ax + b$ 이다. $4(a+b)$ 의 값을 구하시오.
(단, a, b 는 상수이다.)

[3점][2018년 경남10월 가25]

51. 좌표평면에서 매개변수 t 로 나타내어진 곡선

$$x = e^t - e^{-t}, \quad y = e^t - 3e^{-t}$$

위의 한 점 (a, b) 에서의 접선의 기울기가 $\frac{6}{5}$ 일 때, $30(a+b)$ 의 값을 구하시오.

[4점][2018년 전북10월 가26]

52. 좌표평면에서 곡선 $\sin x \cos y = \frac{1}{3}$ 위의 점 (a, b)

$(0 \leq a < \pi, 0 \leq b < \pi)$ 에서의 접선의 기울기가 1일 때,

$\sin b \cos a = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[4점][2019년 5월 가27]

53. 곡선 $xy - y^3 \ln x = 2$ 에 대하여 $x=1$ 일 때, $\frac{dy}{dx}$ 의 값은?

[3점][2019년 7월 가08]

- ① 0 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

54. 곡선 $\pi x = \cos y + x \sin y$ 위의 점 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서의 접선의 기울기는?

[3점][2019년 9월 가06]

- ① $1 - \frac{5}{2}\pi$ ② $1 - 2\pi$ ③ $1 - \frac{3}{2}\pi$
④ $1 - \pi$ ⑤ $1 - \frac{\pi}{2}$

55. 곡선 $x^3 - y^3 = e^{xy}$ 위의 점 $(a, 0)$ 에서의 접선의 기울기가 b 일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오.

[3점][2020년 6월 가25]

56. 매개변수 $t (t > 0)$ 으로 나타내어진 함수

$$x = \ln t + t, \quad y = -t^3 + 3t$$

에 대하여 $\frac{dy}{dx}$ 가 $t=a$ 에서 최댓값을 가질 때, a 의 값은?

[3점][2020년 9월 가07]

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

57. 매개변수 t 로 나타내어진 곡선

$$x = e^t + \cos t, \quad y = \sin t$$

에서 $t=0$ 일 때, $\frac{dy}{dx}$ 의 값은?

[3점][2021년 6월 미적분24]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

58. 매개변수 t 로 나타내어진 곡선

$$x = e^t - 4e^{-t}, \quad y = t + 1$$

에서 $t = \ln 2$ 일 때, $\frac{dy}{dx}$ 의 값은?

[3점][2021년 9월 미적분25]

- ① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

59. 매개변수 $t (t > 0)$ 으로 나타내어진 곡선

$$x = t^2 \ln t + 3t, \quad y = 6te^{t-1}$$

에서 $t=1$ 일 때, $\frac{dy}{dx}$ 의 값은?

[3점][2022년 7월 미적분25]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

60. 매개변수 $t (0 < t < \pi)$ 로 나타내어진 곡선

$$x = \sin t - \cos t, \quad y = 3\cos t + \sin t$$

위의 점 (a, b) 에서의 접선의 기울기가 3일 때, $a+b$ 의 값은?

[3점][2022년 10월 미적분25]

- ① 0 ② $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ ③ $-\frac{\sqrt{10}}{5}$
④ $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$ ⑤ $-\frac{2\sqrt{10}}{5}$

초월함수 미분

61. 함수 $f(x) = e^{-x}(\ln x - 2)$ 가 $x=a$ 에서 극값을 가질 때, 다음 중 a 가 속하는 구간은?

[3점][2014년 3월 가10]

- ① $(1, e)$ ② (e, e^2) ③ (e^2, e^3)
 ④ (e^3, e^4) ⑤ (e^4, e^5)

62. 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

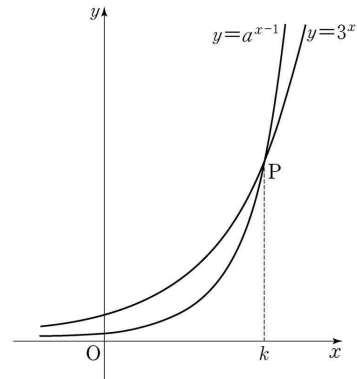
$$g(x) = f(x) \ln x^4$$

이라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(e, -e)$ 에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(e, -4e)$ 에서의 접선이 서로 수직일 때, $100f'(e)$ 의 값을 구하시오.

[4점][2014년 6월 가26]

63. $a > 3$ 인 상수 a 에 대하여 두 곡선 $y=a^{x-1}$ 과 $y=3^x$ 이 점 P 에서 만난다. 점 P 의 x 좌표를 k 라 할 때, 점 P 에서 곡선 $y=3^x$ 에 접하는 직선이 x 축과 만나는 점을 A , 점 P 에서 곡선 $y=a^{x-1}$ 에 접하는 직선이 x 축과 만나는 점을 B 라 하자. 점 $H(k, 0)$ 에 대하여 $\overline{AH} = 2\overline{BH}$ 일 때, a 의 값은?

[4점][2015학년도 수능 가14]



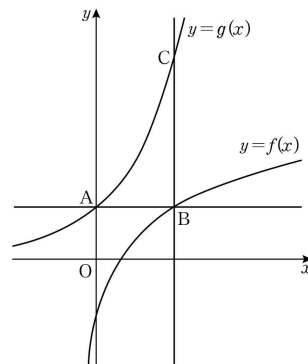
- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

64. 그림과 같이 함수 $f(x) = \log_2\left(x + \frac{1}{2}\right)$ 의 그래프와 함수

$g(x) = a^x (a > 1)$ 의 그래프가 있다. 곡선 $y=g(x)$ 가 y 축과 만나는 점을 A , 점 A 를 지나고 x 축에 평행한 직선이 곡선 $y=f(x)$ 와 만나는 점 중 점 A 가 아닌 점을 B , 점 B 를 지나고 y 축에 평행한 직선이 곡선 $y=g(x)$ 와 만나는 점을 C 라 하자.

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 C 에서의 접선이 x 축과 만나는 점을 D 라 하자. $\overline{AD} = \overline{BD}$ 일 때, $g(2)$ 의 값은?

[4점][2015년 3월 가14]



- ① $e^{\frac{2}{3}}$ ② $e^{\frac{5}{3}}$ ③ $e^{\frac{8}{3}}$ ④ $e^{\frac{11}{3}}$ ⑤ $e^{\frac{14}{3}}$

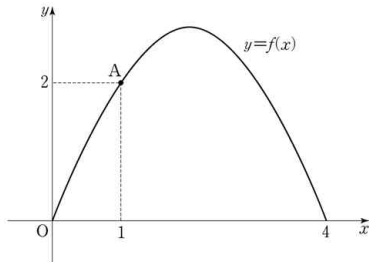
65. 닫힌 구간 $[0, 4]$ 에서 정의된 함수

$$f(x) = 2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4}x$$

의 그래프가 그림과 같고 직선 $y=g(x)$ 가 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점 $A(1, 2)$ 를 지난다.

일차함수 $g(x)$ 가 닫힌 구간 $[0, 4]$ 에서 $f(x) \leq g(x)$ 를 만족시킬 때, $g(3)$ 의 값은?

[4점][2015년 6월 가14]



- ① π ② $\pi+1$ ③ $\pi+2$
④ $\pi+3$ ⑤ $\pi+4$

66. 함수 $f(x) = xe^{-2x+1}$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - a & (x > b) \\ 0 & (x \leq b) \end{cases}$$

가 실수 전체에서 미분가능할 때, 두 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은?

[4점][2016년 4월 가16]

- ① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

67. 양의 실수 t 에 대하여 곡선 $y = \ln x$ 위의 두 점 $P(t, \ln t)$,

$Q(2t, \ln 2t)$ 에서의 접선이 x 축과 만나는 점을 각각 $R(r(t), 0)$,

$S(s(t), 0)$ 이라 하자. 함수 $f(t)$ 를 $f(t) = r(t) - s(t)$ 라 할 때, 함수 $f(t)$ 의 극솟값은?

[4점][2016년 4월 가18]

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $-\frac{1}{5}$ ⑤ $-\frac{1}{6}$

68. 닫힌 구간 $[0, 2\pi]$ 에서 x 에 대한 방정식

$\sin x - x \cos x - k = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 정수 k 의 값의 합은?

[4점][2016년 7월 가16]

- ① -6 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 6

69. 함수 $f(x) = e^{x+1}(x^2 + 3x + 1)$ 이 구간 (a, b) 에서 감소할 때, $b-a$ 의 최댓값은?

[3점][2016년 10월 가13]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

70. 곡선 $y = (\ln x)^2 - x + 1$ 의 변곡점에서의 접선의 기울기는?

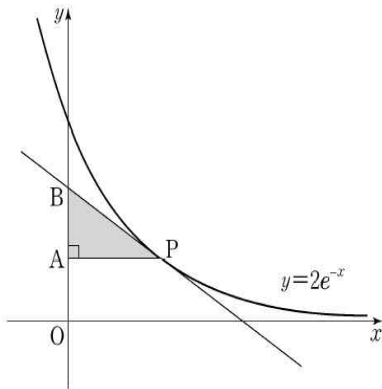
[3점][2017년 3월 가08]

- ① $\frac{1}{e} - 1$ ② $\frac{2}{e} - 1$ ③ $\frac{1}{e}$ ④ $\frac{2}{e} + 1$ ⑤ $\frac{5}{2}$

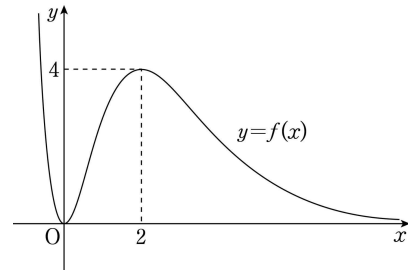
71. 곡선 $y = 2e^{-x}$ 위의 점 $P(t, 2e^{-t})$ ($t > 0$)에서 y 축에 내린 수선의 발을 A라 하고, 점 P에서 접선이 y 축과 만나는 점을 B라 하자. 삼각형 APB의 넓이가 최대가 되도록 하는 t 의 값은?

[4점][2017학년도 수능 가15]

- ① 1 ② $\frac{e}{2}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ e



72. 그림은 함수 $f(x) = x^2 e^{-x+2}$ 의 그래프이다.



함수 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{15}{e^2}$ 의 교점의 개수는?

(단, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$)

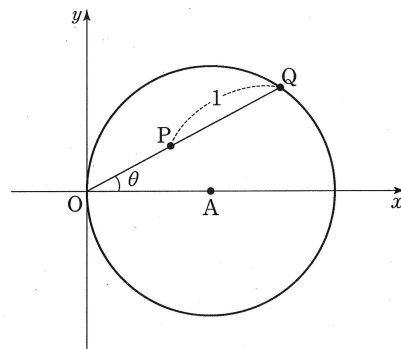
[4점][2017년 3월 가18]

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

73. 그림과 같이 좌표평면에 점 $A(1, 0)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원이 있다. 원 위의 점 Q에 대하여 $\angle AOQ = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{3}$)라 할 때, 선분 OQ 위에 $\overline{PQ} = 1$ 인 점 P를 정한

다. 점 P의 y 좌표가 최대가 될 때 $\cos \theta = \frac{a + \sqrt{b}}{8}$ 이다. $a + b$ 의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, a 와 b 는 자연수이다.)

[4점][2017년 6월 가26]



74. 실수 k 에 대하여 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + k & (x \leq 2) \\ \ln(x-2) & (x > 2) \end{cases}$$

이다. 실수 t 에 대하여 직선 $y=x+t$ 와 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 만나는 점의 개수를 $g(t)$ 라 하자. 함수 $g(t)$ 가 $t=a$ 에서 불연속인 a 의 값이 한 개일 때, k 의 값은?

[4점][2017년 6월 가16]

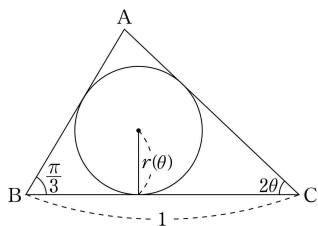
- ① -2 ② $-\frac{9}{4}$ ③ $-\frac{5}{2}$ ④ $-\frac{11}{4}$ ⑤ -3

75. 그림과 같이 $\overline{BC}=1$, $\angle ABC=\frac{\pi}{3}$, $\angle ACB=2\theta$ 인

삼각형 ABC 에 내접하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$ 라 하자.

$h(\theta)=\frac{r(\theta)}{\tan \theta}$ 일 때, $h'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{3}$)

[3점][2017년 10월 가12]



- ① $-\sqrt{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{6}$
④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\sqrt{3}$

76. 양의 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수

$f(x)=x^2 \ln x+ax^2+bx$ 와 함수 $f(x)$ 의 역함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \rightarrow e} \frac{f(x)-k}{x-e} = e$ (k 는 상수)

(나) 양의 실수 x 에 대하여 $g'(x) \leq g'(k)$ 이다.

$f\left(\frac{2}{3}k\right)$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.)

[4점][2018년 경남10월 가19]

- ① $-\frac{3}{2}e^4+3e^3$ ② $-\frac{1}{2}e^4+3e^3$ ③ $\frac{1}{2}e^4+3e^3$
④ $\frac{3}{2}e^4+3e^3$ ⑤ $\frac{5}{2}e^4+3e^3$

77. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=\frac{f(x)\cos x}{e^x}$$

라 하자. $g'(\pi)=e^\pi g(\pi)$ 일 때, $\frac{f'(\pi)}{f(\pi)}$ 의 값은? (단, $f(\pi) \neq 0$)

[4점][2019년 6월 가16]

- ① $e^{-2\pi}$ ② 1 ③ $e^{-\pi}+1$
④ $e^\pi+1$ ⑤ $e^{2\pi}$

78. 함수 $f(x) = 3\sin kx + 4x^3$ 의 그래프가 오직 하나의 변곡점을 가지도록 하는 실수 k 의 최댓값을 구하시오.

[4점][2019년 9월 가26]

79. 양수 k 에 대하여 두 곡선 $y = ke^x + 1$, $y = x^2 - 3x + 4$ 가 점 P에서 만나고, 점 P에서 두 곡선에 접하는 두 직선이 서로 수직일 때, k 의 값은?

[3점][2019년 9월 가13]

- ① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{1}{e^2}$ ③ $\frac{2}{e^2}$ ④ $\frac{2}{e^3}$ ⑤ $\frac{3}{e^3}$

80. 함수 $f(x) = (x^2 + 2)e^{-x}$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 가 미분가능하고

$$g\left(\frac{x+8}{10}\right) = f^{-1}(x), \quad g(1) = 0$$

을 만족시킬 때, $|g'(1)|$ 의 값을 구하시오.

[4점][2020학년도 수능 가26]

81. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x > 0$ 일 때, $f(x) = axe^{2x} + bx^2$

(나) $x_1 < x_2 < 0$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여

$$f(x_2) - f(x_1) = 3x_2 - 3x_1$$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2e$ 일 때, $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.)

[4점][2019년 10월 가17]

- ① $2e$ ② $4e$ ③ $6e$ ④ $8e$ ⑤ $10e$

82. 원점에서 곡선 $y = e^{|x|}$ 에 그은 두 접선이 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $\tan \theta$ 의 값은?

[3점][2021년 6월 미적분25]

- ① $\frac{e}{e^2+1}$ ② $\frac{e}{e^2-1}$ ③ $\frac{2e}{e^2+1}$
④ $\frac{2e}{e^2-1}$ ⑤ 1

83. 두 함수

$$f(x)=e^x, g(x)=k\sin x$$

에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3일 때, 양수 k 의 값은?

[3점][2021년 6월 미적분27]

- ① $\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{2}}$ ② $\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}}$ ③ $\sqrt{2}e^{2\pi}$
 ④ $\sqrt{2}e^{\frac{9\pi}{4}}$ ⑤ $\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{2}}$

84. $t > 2e$ 인 실수 t 에 대하여 함수 $f(x)=t(\ln x)^2-x^2$ 이 $x=k$ 에서 극대일 때, 실수 k 의 값을 $g(t)$ 라 하면 $g(t)$ 는 미분가능한 함수이다. $g(\alpha)=e^2$ 인 실수 α 에 대하여 $\alpha \times \{g'(\alpha)\}^2 = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[4점][2021년 6월 미적분29]

85. 곡선 $y=xe^{-2x}$ 의 변곡점을 A라 하자. 곡선 $y=xe^{-2x}$ 위의 점 A에서의 접선이 x 축과 만나는 점을 B라 할 때, 삼각형 OAB의 넓이는? (단, O는 원점이다.)

[3점][2021년 7월 미적분27]

- ① e^{-2} ② $3e^{-2}$ ③ 1 ④ e^2 ⑤ $3e^2$

86. 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)=\{f(x)+2\}e^{f(x)}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $f(a)=6$ 인 a 에 대하여 $g(x)$ 는 $x=a$ 에서 최댓값을 갖는다.
 (나) $g(x)$ 는 $x=b$, $x=b+6$ 에서 최솟값을 갖는다.

방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 두 실근을 α, β 라 할 때, $(\alpha-\beta)^2$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 실수이다.)

[4점][2021년 9월 미적분29]

87. 함수 $f(x)=6\pi(x-1)^2$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=3f(x)+4\cos f(x)$$

라 하자. $0 < x < 2$ 에서 함수 $g(x)$ 가 극소가 되는 x 의 개수는?

[4점][2022학년도 수능 미적분28]

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

88. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$ 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 가

$$g(x) = \begin{cases} \ln|f(x)| & (f(x) \neq 0) \\ 1 & (f(x) = 0) \end{cases}$$

이고 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 $g(x)$ 의 극솟값은?

[4점][2022년 6월 미적분28]

- (가) 함수 $g(x)$ 는 $x \neq 1$ 인 모든 실수 x 에서 연속이다.
 (나) 함수 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 극대이고,
 함수 $|g(x)|$ 는 $x=2$ 에서 극소이다.
 (다) 방정식 $g(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

- ① $\ln \frac{13}{27}$ ② $\ln \frac{16}{27}$ ③ $\ln \frac{19}{27}$
 ④ $\ln \frac{22}{27}$ ⑤ $\ln \frac{25}{27}$

속도, 가속도

89. 원점을 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t 에서의 위치 x_P , x_Q 는 다음과 같다.

$$x_P = t^2 - at, \quad x_Q = \ln(t^2 - t + 1)$$

두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이는 시각 t 의 범위가 $\frac{1}{2} < t < 2$ 일 때, 실수 a 의 값은?

[3점][2012년 3월 가09]

- ① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

90. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 위치 $x(t)$ 가

$$x(t) = t + \frac{20}{\pi^2} \cos(2\pi t)$$

이다. 점 P의 시각 $t = \frac{1}{3}$ 에서의 가속도의 크기를 구하시오.

[4점][2015년 7월 가26]

91. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 위치 (x, y) 가

$$x = 8\cos t, \quad y = -4\sin t$$

이다. 시각 $t = \frac{\pi}{4}$ 에서의 점 P의 속력이 k 일 때, k^2 의 값을 구하시오.

[3점][2016년 경남10월 가25]

92. 좌표평면 위를 움직이는 점 P 의 시간 $t(t > 0)$ 에서의 위치 (x, y) 가

$$x = t - \frac{2}{t}, y = 2t + \frac{1}{t}$$

이다. 시간 $t=1$ 에서 점 P 의 속력은?

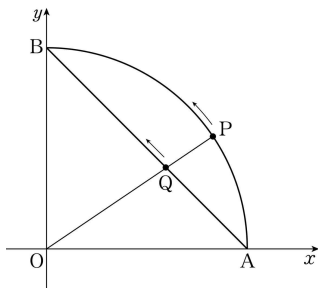
[3점][2017학년도 수능 가10]

- ① $2\sqrt{2}$ ② 3 ③ $\sqrt{10}$ ④ $\sqrt{11}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

93. 원점 O 를 중심으로 하고 두 점 $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ 을 지나는 사분원이 있다. 그림과 같이 점 P 는 점 A 에서 출발하여 호 AB 를 따라 점 B 를 향하여 매초 1의 일정한 속력으로 움직인다. 선분 OP 와 선분 AB 가 만나는 점을 Q 라 하자.

점 P 의 x 좌표가 $\frac{4}{5}$ 인 순간 점 Q 의 속도는 (a, b) 이다. $b-a$ 의 값은?

[4점][2018년 10월 가18]



- ① $\frac{2}{49}$ ② $\frac{8}{49}$ ③ $\frac{18}{49}$ ④ $\frac{32}{49}$ ⑤ $\frac{50}{49}$

94. 좌표평면 위를 움직이는 점 P 의 시간 $t(t \geq 0)$ 에서의 위치 (x, y) 가

$$x = 3t - \sin t, y = 4 - \cos t$$

이다. 점 P 의 속력의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$ 의 값은?

[3점][2018년 9월 가10]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

95. 좌표평면 위를 움직이는 점 P 의 시간 $t(t \geq 0)$ 에서의 위치 (x, y) 가

$$x = 1 - \cos 4t, y = \frac{1}{4} \sin 4t$$

이다. 점 P 의 속력이 최대일 때, 점 P 의 가속도의 크기를 구하시오.

[3점][2019학년도 수능 가24]

96. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시간 t ($t > 0$)에서의 위치 (x, y) 가

$$x = 2\sqrt{t+1}, \quad y = t - \ln(t+1)$$

이다. 점 P의 속력의 최솟값은?

[4점][2019년 6월 가15]

- ① $\frac{\sqrt{3}}{8}$ ② $\frac{\sqrt{6}}{8}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ④ $\frac{\sqrt{6}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

97. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시간 t 에서의 위치 (x, y) 가

$$x = 2t + \sin t, \quad y = 1 - \cos t$$

이다. 시간 $t = \frac{\pi}{3}$ 에서 점 P의 속력은?

[3점][2019년 10월 가07]

- ① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{7}$

98. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시간 t ($0 < t < \frac{\pi}{2}$)에서의 위치 (x, y) 가

$$x = t + \sin t \cos t, \quad y = \tan t$$

이다. $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 에서 점 P의 속력의 최솟값은?

[3점][2020학년도 수능 가09]

- ① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

99. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시간 t ($t > 0$)에서의 위치 (x, y) 가

$$x = 3t - \frac{2}{\pi} \cos \pi t, \quad y = 6 \ln t - \frac{2}{\pi} \sin \pi t$$

이다. 시간 $t = \frac{1}{2}$ 에서 점 P의 속력을 구하시오.

[3점][2020년 7월 가25]

100. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시간 t ($t > 2$)에서의 위치 (x, y) 가

$$x = t \ln t, \quad y = \frac{4t}{\ln t}$$

이다. 시간 $t = e^2$ 에서 점 P의 속력은?

[3점][2021년 10월 미적분25]

- ① $\sqrt{7}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ 3 ④ $\sqrt{10}$ ⑤ $\sqrt{11}$

적분 기본유형

101. $\int_1^e \ln \frac{x}{e} dx$ 의 값은?

[3점][2017학년도 수능 가09]

- ① $\frac{1}{e} - 1$ ② $2 - e$ ③ $\frac{1}{e} - 2$ ④ $1 - e$ ⑤ $\frac{1}{2} - e$

102. 곡선 $y = \sin^2 x \cos x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$)와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

[3점][2017년 3월 가09]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

103. 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = e^x + \int_0^1 t f(t) dt$$

를 만족시킬 때, $f(\ln 10)$ 의 값을 구하시오.

[4점][2017년 7월 가27]

104. 함수 $f(x)$ 가 0이 아닌 모든 실수 x 에 대하여

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \ln |x|$$

를 만족시킨다. $f(1) = e - 1$ 일 때, $f(e)$ 의 값은?

[3점][2018년 전북5월 가10]

- ① $\frac{1}{e}$ ② 1 ③ 2 ④ e ⑤ e^2

105. 곡선 $y = |\sin 2x| + 1$ 과 x 축 및 두 직선 $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{5\pi}{4}$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는?

[3점][2018년 6월 가08]

- ① $\pi + 1$ ② $\pi + \frac{3}{2}$ ③ $\pi + 2$ ④ $\pi + \frac{5}{2}$ ⑤ $\pi + 3$

106. $\int_1^{\sqrt{2}} x^3 \sqrt{x^2 - 1} dx$ 의 값은?

[3점][2018년 6월 가11]

- ① $\frac{7}{15}$ ② $\frac{8}{15}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{11}{15}$

107. $\int_3^6 \frac{2}{x^2 - 2x} dx$ 의 값은?

[3점][2018년 7월 가09]

- ① $\ln 2$ ② $\ln 3$ ③ $\ln 4$ ④ $\ln 5$ ⑤ $\ln 6$

108. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x) = \int_0^x \frac{2t-1}{t^2-t+1} dt$$

의 최솟값은?

[3점][2018년 10월 가13]

- ① $\ln \frac{1}{2}$ ② $\ln \frac{2}{3}$ ③ $\ln \frac{3}{4}$ ④ $\ln \frac{4}{5}$ ⑤ $\ln \frac{5}{6}$

109. 곡선 $y = 2^x$ 과 x 축 및 두 직선 $x = -1$, $x = 0$ 으로 둘러싸인 영역을 A , 곡선 $y = 2^x$ 과 x 축 및 두 직선 $x = 0$, $x = p$ 로 둘러싸인 영역을 B 라 하자. B 의 넓이가 A 의 넓이의 4배가 되도록 하는 양수 p 의 값은?

[3점][2018년 경남10월 가12]

- ① 1 ② $\log_2 3$ ③ 2 ④ $\log_2 5$ ⑤ $1 + \log_2 3$

110. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가

$$f(0) = -4, \quad f(x) = a \sin x + \int_0^x t f'(t) dt$$

를 만족시킬 때, 상수 a 의 값은?

[3점][2018년 전북10월 가08]

- ① -2 ② 0 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

111. $\int_0^1 \frac{\sin \frac{\pi}{3}x}{\cos^2 \frac{\pi}{3}x} dx$ 의 값은?

[3점][2019년 5월 가11]

- ① $\frac{1}{\pi}$ ② $\frac{2}{\pi}$ ③ $\frac{3}{\pi}$ ④ $\frac{4}{\pi}$ ⑤ $\frac{5}{\pi}$

112. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 0이 아닌 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) + xf'(x) = x^2 e^x$$

을 만족시킨다. $f(1) = e$ 일 때, $f(2)$ 의 값은?

[4점][2019년 5월 가14]

- ① $\frac{e}{2}$ ② e ③ $2e$ ④ e^2 ⑤ $2e^2$

113. 곡선 $y = \sqrt{9-x} - 2$ 와 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S 라 할 때, $6S$ 의 값을 구하시오.

[4점][2019년 5월 가26]

114. 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) > 0$ 인 연속함수 $f(x)$ 에 대하여 $\int_3^5 f(x)dx = 36$ 일 때, 곡선 $y = f(2x+1)$ 과 x 축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는?

[3점][2019년 10월 가09]

- ① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

115. $\int_e^{e^2} \frac{\ln x - 1}{x^2} dx$ 의 값은?

[3점][2020학년도 수능 가08]

- ① $\frac{e+2}{e^2}$ ② $\frac{e+1}{e^2}$ ③ $\frac{1}{e}$ ④ $\frac{e-1}{e^2}$ ⑤ $\frac{e-2}{e^2}$

116. $x > 1$ 인 모든 실수 x 의 집합에서 정의되고 미분가능한 함수 $f(x)$ 가

$$\sqrt{x-1}f'(x) = 3x-4$$

를 만족시킬 때, $f(5) - f(2)$ 의 값은?

[3점][2020년 7월 가12]

- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

117. 연속함수 $f(x)$ 가 모든 양의 실수 t 에 대하여

$$\int_0^{\ln t} f(x) dx = (t \ln t + a)^2 - a$$

를 만족시킬 때, $f(1)$ 의 값은? (단, a 는 0이 아닌 상수이다.)

[3점][2020년 10월 가12]

- ① $2e^2 + 2e$ ② $2e^2 + 4e$ ③ $4e^2 + 4e$
 ④ $4e^2 + 8e$ ⑤ $8e^2 + 8e$

118. 곡선 $y = e^{2x}$ 과 x 축 및 두 직선 $x = \ln \frac{1}{2}$, $x = \ln 2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는?

[3점][2021학년도 수능 가08]

- ① $\frac{5}{3}$ ② $\frac{15}{8}$ ③ $\frac{15}{7}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

119. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \cos 2x \sin^2 2x dx$ 의 값은?

[3점][2021년 7월 미적분24]

- ① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{2}{9}$ ④ $\frac{5}{18}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

120. $\int_1^e \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right) \ln x dx - \int_1^e \frac{2}{x^2} \ln x dx$ 의 값은?

[3점][2022년 7월 미적분24]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

초월함수 적분

121. $\int_{e^2}^{e^3} \frac{a + \ln x}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin x) \cos x dx$ 가 성립할 때, 상수 a 의 값은?

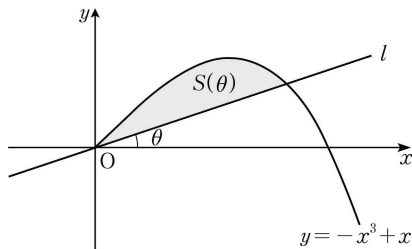
[4점][2014년 4월 가15]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

122. 그림과 같이 원점을 지나고 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ ($0 \leq \theta < \frac{\pi}{4}$)인 직선을 l 이라 하자. 곡선 $y = -x^3 + x$ ($x \geq 0$)과 직선 l 로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할 때,

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}-} \frac{S(\theta)}{\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)^2} \text{의 값은?}$$

[4점][2014년 10월 가19]



- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

123. 양수 a 에 대하여 함수 $f(x) = \int_0^x (a-t)e^t dt$ 의 최댓값이 32이다. 곡선 $y = 3e^x$ 과 두 직선 $x = a$, $y = 3$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

[4점][2015학년도 수능 가28]

124. 양의 실수 k 에 대하여 곡선 $y = k \ln x$ 와 직선 $y = x$ 가 접할 때, 곡선 $y = k \ln x$, 직선 $y = x$ 및 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $ae^2 - be$ 이다. $100ab$ 의 값을 구하시오. (단, a 와 b 는 유리수이다.)

[4점][2015년 7월 가28]

125. 함수 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} + \cos 2\pi x}{x^{2n} + 1}$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

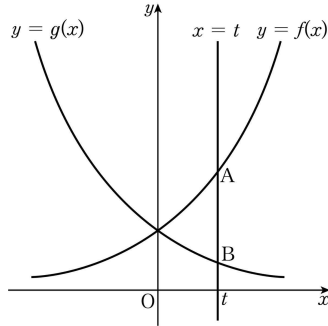
$$g(x) = \int_{-x}^2 f(t) dt + \int_2^x t f(t) dt$$

라 할 때, $g(-2) + g(2)$ 의 값은?

[4점][2016년 3월 가16]

- ① -2 ② 0 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

126. 좌표평면에 두 함수 $f(x)=2^x$ 의 그래프와 $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프가 있다. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 가 직선 $x=t$ ($t>0$)과 만나는 점을 각각 A, B라 하자.



$t=1$ 일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 와 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이는?

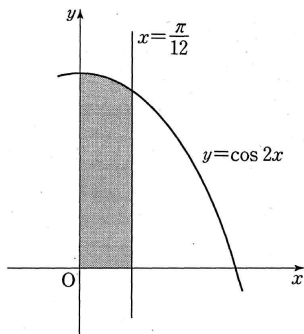
[3점][2016년 3월 가13]

- ① $\frac{5}{4\ln 2}$ ② $\frac{1}{\ln 2}$ ③ $\frac{3}{4\ln 2}$ ④ $\frac{1}{2\ln 2}$ ⑤ $\frac{1}{4\ln 2}$

127. 함수 $y=\cos 2x$ 의 그래프와 x 축, y 축 및 직선 $x=\frac{\pi}{12}$ 로 둘러싸인 영역의 넓이가 직선 $y=a$ 에 의하여 이등분될 때, 상수 a 의 값은?

[3점][2016년 9월 가13]

- ① $\frac{1}{2\pi}$ ② $\frac{1}{\pi}$ ③ $\frac{3}{2\pi}$ ④ $\frac{2}{\pi}$ ⑤ $\frac{5}{2\pi}$



128. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $f(0)=0$ 이고 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x)>0$ 이다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $A(t, f(t))$ ($t>0$)에서 x 축에 내린 수선의 발을 B라 하고, 점 A를 지나고 점 A에서의 접선과 수직인 직선이 x 축과 만나는 점을 C라 하자. 모든 양수 t 에 대하여 삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{1}{2}(e^{3t}-2e^{2t}+e^t)$ 일 때, 곡선

$y=f(x)$ 와 x 축 및 직선 $x=1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는?

[4점][2017년 9월 가18]

- ① $e-2$ ② e ③ $e+2$ ④ $e+4$ ⑤ $e+6$

129. 함수 $f(x)$ 가

$$f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+e^{-t}} dt$$

일 때, $(f \circ f)(a)=\ln 5$ 를 만족시키는 실수 a 의 값은?

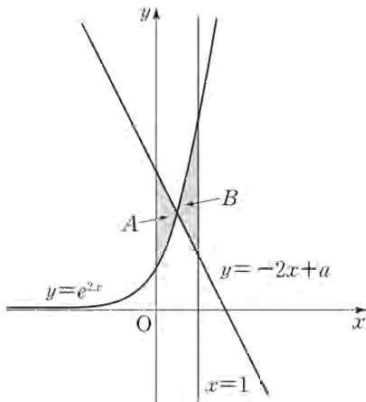
[4점][2018학년도 수능 가15]

- ① $\ln 11$ ② $\ln 13$ ③ $\ln 15$ ④ $\ln 17$ ⑤ $\ln 19$

130. 곡선 $y=e^{2x}$ 과 y 축 및 직선 $y=-2x+a$ 로 둘러싸인 영역을 A , 곡선 $y=e^{2x}$ 과 두 직선 $y=-2x+a$, $x=1$ 로 둘러싸인 영역을 B 라 하자. A 의 넓이와 B 의 넓이가 같을 때, 상수 a 의 값은? (단, $1 < a < e^2$)

[3점][2018학년도 수능 가12]

- ① $\frac{e^2+1}{2}$ ② $\frac{2e^2+1}{4}$ ③ $\frac{e^2}{2}$
 ④ $\frac{2e^2-1}{4}$ ⑤ $\frac{e^2-1}{2}$



131. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt = ae^{2x} - 4x + b$$

를 만족시킬 때, $f(a)f(b)$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이다.)

[4점][2018년 3월 가27]

132. 자연수 n 에 대하여 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

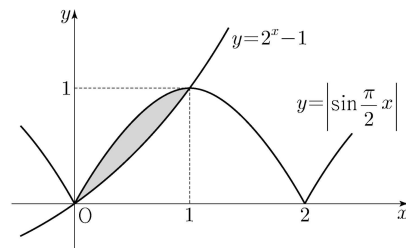
$$f(x) = \int_1^x \frac{n - \ln t}{t} dt$$

의 최댓값을 $g(n)$ 이라 하자. $\sum_{n=1}^{12} g(n)$ 의 값을 구하시오.

[4점][2018년 4월 가27]

133. 그림과 같이 두 곡선 $y=2^x-1$, $y=\left|\sin \frac{\pi}{2}x\right|$ 가 원점 O 와 점 $(1, 1)$ 에서 만난다. 두 곡선 $y=2^x-1$, $y=\left|\sin \frac{\pi}{2}x\right|$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는?

[3점][2018년 9월 가09]



- ① $-\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\ln 2} - 1$ ② $\frac{2}{\pi} - \frac{1}{\ln 2} + 1$ ③ $\frac{2}{\pi} + \frac{1}{2\ln 2} - 1$
 ④ $\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2\ln 2} + 1$ ⑤ $\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\ln 2} - 1$

134. 함수 $f(x) = a \cos(\pi x^2)$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 1}{x} \int_1^{x+1} f(t) dt \right) = 3$$

일 때, $f(a)$ 의 값은? (단, a 는 상수이다.)

[4점][2018년 6월 가15]

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

135. 두 함수 $f(x) = ax^2$ ($a > 0$), $g(x) = \ln x$ 의 그래프가 한 점 P에서 만나고, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기와 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기가 서로 같다. 두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, a 는 상수이다.)

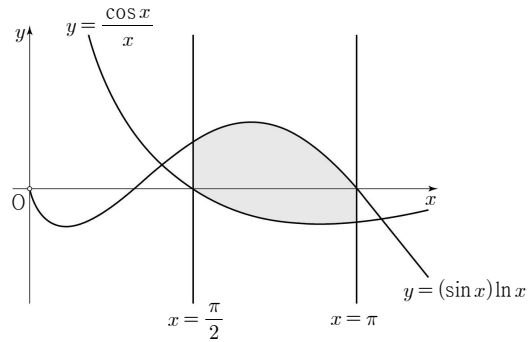
[4점][2019년 3월 가17]

- ① $\frac{2\sqrt{e}-3}{6}$ ② $\frac{2\sqrt{e}-3}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{e}-1}{2}$
 ④ $\frac{4\sqrt{e}-3}{6}$ ⑤ $\sqrt{e}-1$

136. 두 곡선 $y = (\sin x) \ln x$, $y = \frac{\cos x}{x}$ 와 두 직선 $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는?

[4점][2019년 4월 가16]

- ① $\frac{1}{4} \ln \pi$ ② $\frac{1}{2} \ln \pi$ ③ $\frac{3}{4} \ln \pi$ ④ $\ln \pi$ ⑤ $\frac{5}{4} \ln \pi$



137. 닫힌 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \sin x$ 의 그래프

위의 한 점 $P(a, \sin a)$ ($0 < a < \frac{\pi}{2}$)에서의 접선을 l 이라 하자.

곡선 $y = f(x)$ 와 x 축 및 직선 l 로 둘러싸인 부분의 넓이와 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축 및 직선 $x = a$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 같을 때, $\cos a$ 의 값은?

[4점][2019년 4월 가18]

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

138. 함수 $f(x) = \int_x^{x+2} |2^t - 5| dt$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, 2^m 의 값은?

[4점][2019년 10월 가20]

- ① $\left(\frac{5}{4}\right)^8$ ② $\left(\frac{5}{4}\right)^9$ ③ $\left(\frac{5}{4}\right)^{10}$ ④ $\left(\frac{5}{4}\right)^{11}$ ⑤ $\left(\frac{5}{4}\right)^{12}$

139. 실수 전체의 집합에서 $f(x) > 0$ 이고 도함수가 연속인 함수 $f(x)$ 가 있다. 실수 전체의 집합에서 함수 $g(x)$ 가

$$g(x) = \int_0^x \ln f(t) dt$$

일 때, 함수 $g(x)$ 와 $g(x)$ 의 도함수 $g'(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 극값 2를 갖는다.
(나) 모든 실수 x 에 대하여 $g'(-x) = g'(x)$ 이다.

$\int_{-1}^1 \frac{xf'(x)}{f(x)} dx$ 의 값은?

[4점][2020년 7월 가19]

- ① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

140. 함수 $f(x) = \sin(\pi\sqrt{x})$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \int_0^x tf(x-t) dt \quad (x \geq 0)$$

이 $x=a$ 에서 극대인 모든 a 를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n 번째 수를 a_n 이라 하자. $k^2 < a_6 < (k+1)^2$ 인 자연수 k 의 값은?

[4점][2020년 9월 가20]

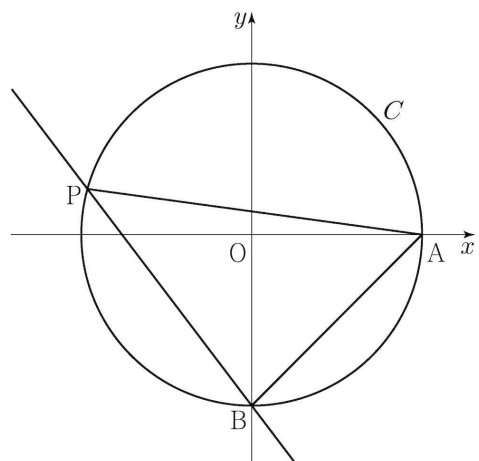
- ① 11 ② 14 ③ 17 ④ 20 ⑤ 23

141. 좌표평면에서 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 C 와 두 점 $A(2, 0)$, $B(0, -2)$ 가 있다. 원 C 위에 있고 x 좌표가 음수인 점 P 에 대하여 $\angle PAB = \theta$ 라 하자.

점 $Q(0, 2\cos\theta)$ 에서 직선 BP 에 내린 수선의 발을 R 라 하고, 두 점 P 와 R 사이의 거리를 $f(\theta)$ 라 할 때, $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta) d\theta$ 의 값은?

[4점][2021년 9월 미적분28]

- ① $\frac{2\sqrt{3}-3}{2}$ ② $\sqrt{3}-1$ ③ $\frac{3\sqrt{3}-3}{2}$
④ $\frac{2\sqrt{3}-1}{2}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{3}-3}{2}$



142. 함수 $f(x) = \sin(ax)$ ($a \neq 0$)에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 a 의 값의 합을 구하시오.

[4점][2021년 10월 미적분29]

(가) $\int_0^{\frac{\pi}{a}} f(x) dx \geq \frac{1}{2}$

(나) $0 < t < 1$ 인 모든 실수 t 에 대하여

$$\int_0^{3\pi} |f(x) + t| dx = \int_0^{3\pi} |f(x) - t| dx$$

이다.

143. 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(-x) = f(x)$

(나) $f(x+2) = f(x)$

$$\int_{-1}^5 f(x)(x + \cos 2\pi x) dx = \frac{47}{2}, \quad \int_0^1 f(x) dx = 2 \text{ 일 때,}$$

$$\int_0^1 f'(x) \sin 2\pi x dx \text{의 값은?}$$

[4점][2022년 7월 미적분28]

① $\frac{\pi}{6}$

② $\frac{\pi}{4}$

③ $\frac{\pi}{3}$

④ $\frac{5}{12}\pi$

⑤ $\frac{\pi}{2}$

144. 닫힌구간 $[0, 4\pi]$ 에서 연속이고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$ 에 대하여 $\int_0^{4\pi} |f(x)| dx$ 의 최솟값은?

[4점][2022년 10월 미적분28]

(가) $0 \leq x \leq \pi$ 일 때, $f(x) = 1 - \cos x$ 이다.

(나) $1 \leq n \leq 3$ 인 각각의 자연수 n 에 대하여

$$f(n\pi + t) = f(n\pi) + f(t) \quad (0 < t \leq \pi)$$

또는

$$f(n\pi + t) = f(n\pi) - f(t) \quad (0 < t \leq \pi)$$

이다.

(다) $0 < x < 4\pi$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 의 변곡점의 개수는 6이다.

① 4π

② 6π

③ 8π

④ 10π

⑤ 12π

145. 세 상수 a, b, c 에 대하여 함수 $f(x) = ae^{2x} + be^x + c$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) + 6}{e^x} = 1$

(나) $f(\ln 2) = 0$

함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때,

$$\int_0^{14} g(x) dx = p + q \ln 2 \text{이다. } p + q \text{의 값을 구하시오.}$$

(단, p, q 는 유리수이고, $\ln 2$ 는 무리수이다.)

[4점][2023학년도 수능 미적분29]

정적분과 급수

146. 함수 $f(x) = \ln x$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} f\left(1 + \frac{k}{n}\right) = \frac{q}{p}$ 일 때,
 $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[4점][2018년 3월 가28]

147. 함수 $f(x) = \sin(3x)$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{n} f\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ 의 값은?

[3점][2019년 3월 가12]

- ① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2

148. 함수 $f(x) = 4x^4 + 4x^3$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} f\left(\frac{k}{n}\right)$ 의 값
 은?

[4점][2019년 9월 나19]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

149. 함수 $f(x) = 4x^3 + x$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{2k}{n}\right)$ 의 값은?

[3점][2020학년도 수능 나11]

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

150. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2}{n} \left(1 + \frac{2k}{n}\right)^4 = a$ 일 때, $5a$ 의 값을 구하시오.

[3점][2020년 9월 가25]

151. 함수 $f(x) = \cos x$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k\pi}{n^2} f\left(\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{n}\right)$ 의 값
 은?

[4점][2020년 10월 가14]

- ① $-\frac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{3}{2}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

152. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{3n}{3n+k}}$ 의 값은?

[3점][2021학년도 수능 가11]

- ① $4\sqrt{3}-6$ ② $\sqrt{3}-1$ ③ $5\sqrt{3}-8$
 ④ $2\sqrt{3}-3$ ⑤ $3\sqrt{3}-5$

153. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2+2kn}{k^3+3k^2n+n^3}$ 의 값은?

[3점][2022학년도 수능 미적분26]

- ① $\ln 5$ ② $\frac{\ln 5}{2}$ ③ $\frac{\ln 5}{3}$ ④ $\frac{\ln 5}{4}$ ⑤ $\frac{\ln 5}{5}$

154. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{(2n-k)^2}$ 의 값은?

[3점][2022년 10월 미적분26]

- ① $\frac{3}{2}-2\ln 2$ ② $1-\ln 2$ ③ $\frac{3}{2}-\ln 3$
 ④ $\ln 2$ ⑤ $2-\ln 3$

155. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1+\frac{3k}{n}}$ 의 값은?

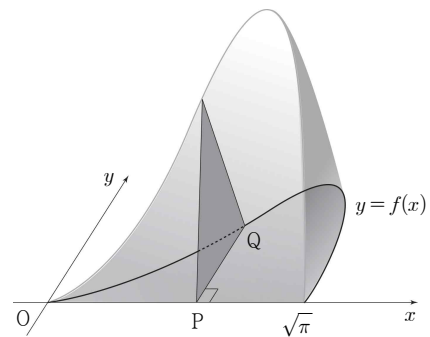
[3점][2023학년도 수능 미적분24]

- ① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{13}{9}$ ③ $\frac{14}{9}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{16}{9}$

부피

156. 그림과 같이 함수 $f(x) = \sqrt{x(x^2+1)}\sin(x^2)$ ($0 \leq x \leq \sqrt{\pi}$)에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 두 점 $P(x, 0)$, $Q(x, f(x))$ 를 지나고 x 축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면이 선분 PQ를 한 변으로 하는 정삼각형이다. 이 입체도형의 부피는?

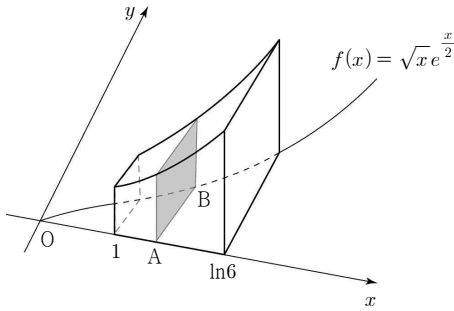
[4점][2016년 4월 가19]



- ① $\frac{\sqrt{3}(\pi+2)}{8}$ ② $\frac{\sqrt{3}(\pi+3)}{8}$ ③ $\frac{\sqrt{3}(\pi+4)}{8}$
 ④ $\frac{\sqrt{3}(\pi+2)}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}(\pi+3)}{4}$

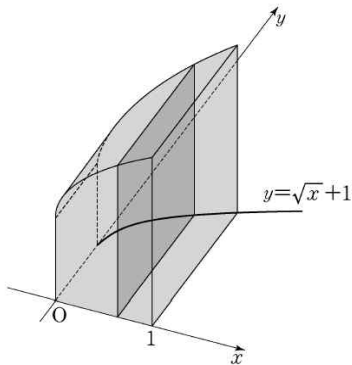
157. 그림과 같이 함수 $f(x) = \sqrt{x}e^{\frac{x}{2}}$ 에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $A(x, 0)$, $B(x, f(x))$ 를 이은 선분을 한 변으로 하는 정사각형을 x 축에 수직인 평면 위에 그린다. 점 A 의 x 좌표가 $x=1$ 에서 $x=\ln 6$ 까지 변할 때, 이 정사각형이 만드는 입체도형의 부피는 $-a+b\ln 6$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하시오.
(단, a 와 b 는 자연수이다.)

[4점][2016년 7월 가27]



158. 그림과 같이 곡선 $y = \sqrt{x}+1$ 과 x 축, y 축 및 직선 $x=1$ 로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는?

[3점][2017학년도 수능 가11]

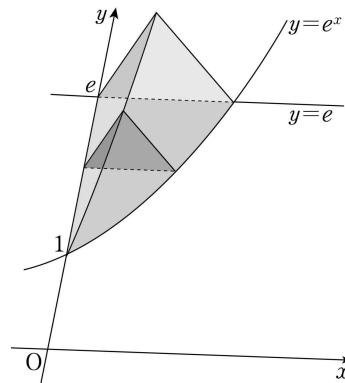


- ① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{17}{6}$ ⑤ 3

159. 곡선 $y=e^x$ 과 y 축 및 직선 $y=e$ 로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 y 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형일 때, 이 입체도형의 부피는?

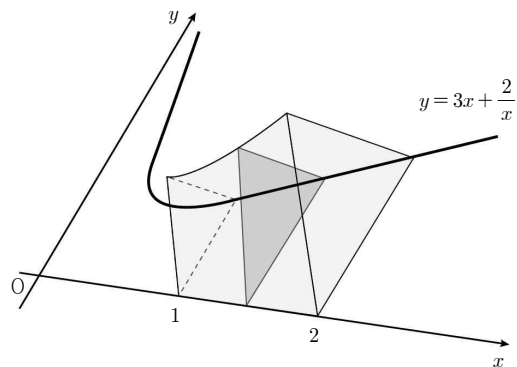
[4점][2017년 3월 가19]

- ① $\frac{\sqrt{3}(e+1)}{4}$ ② $\frac{\sqrt{3}(e-1)}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{3}(e-1)}{4}$
④ $\frac{\sqrt{3}(e-2)}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}(e-2)}{4}$



160. 그림과 같이 곡선 $y = 3x + \frac{2}{x}$ ($x > 0$)와 x 축 및 직선 $x=1$, 직선 $x=2$ 로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형일 때, 이 입체도형의 부피는?

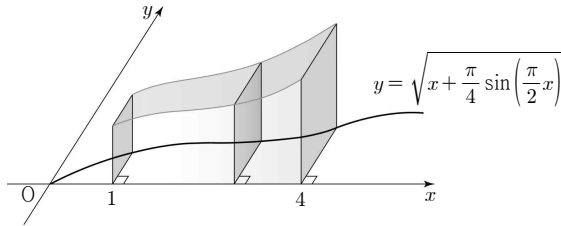
[4점][2017년 7월 가15]



- ① $\frac{35\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{37\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{39\sqrt{3}}{4}$
④ $\frac{41\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{43\sqrt{3}}{4}$

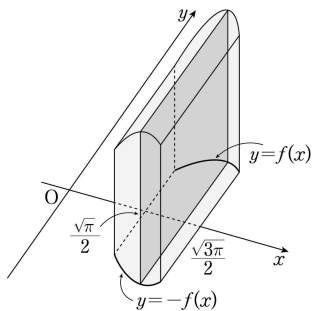
161. 그림과 같이 곡선 $y = \sqrt{x + \frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$ 와 x 축 및 두 직선 $x=1$, $x=4$ 로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피를 구하시오.

[4점][2017년 4월 가27]



162. 그림과 같이 함수 $f(x) = \sqrt{x \sin x^2} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{3\pi}}{2} \right)$ 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 와 곡선 $y=-f(x)$ 및 두 직선 $x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $x=\frac{\sqrt{3\pi}}{2}$ 로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는?

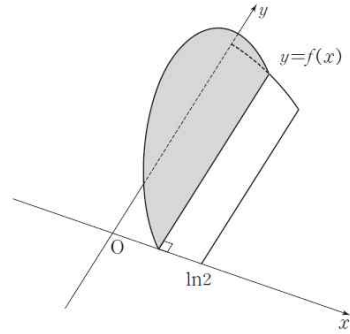
[4점][2018년 10월 가16]



- ① $2\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ 4 ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

163. 그림과 같이 곡선 $f(x) = e^2 - e^x$ ($0 \leq x \leq \ln 2$)와 x 축, y 축 및 직선 $x = \ln 2$ 로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 반원일 때, 이 입체도형의 부피는?

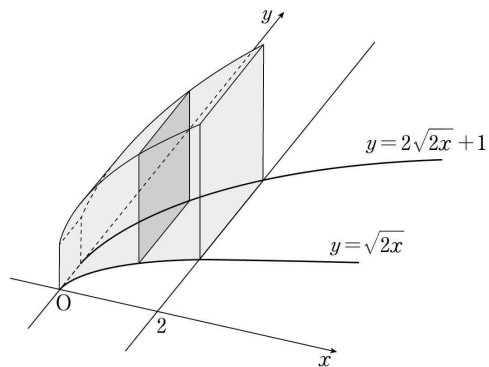
[4점][2018년 전북10월 가15]



- ① $\frac{\pi}{8} \left(e^2 \ln 2 - e + \frac{3}{2} \right)$ ② $\frac{\pi}{8} (e^4 \ln 2 - 2e^2)$
 ③ $\frac{\pi}{8} (e^4 \ln 2 - 2e^2 + \frac{3}{2})$ ④ $\frac{\pi}{4} \left(e^2 \ln 2 - e + \frac{1}{2} \right)$
 ⑤ $\frac{\pi}{4} (e^4 \ln 2 - 2e^2 + \frac{3}{2})$

164. 그림과 같이 두 곡선 $y=2\sqrt{2x}+1$, $y=\sqrt{2x}$ 와 y 축 및 직선 $x=2$ 로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피를 V 라 하자. $30V$ 의 값을 구하시오.

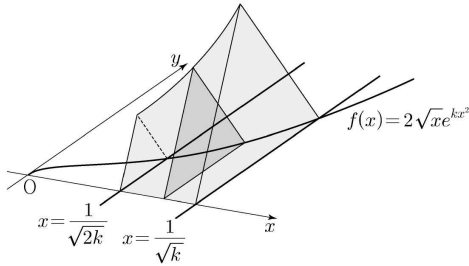
[4점][2019년 3월 가28]



165. 그림과 같이 양수 k 에 대하여 함수 $f(x) = 2\sqrt{x}e^{kx^2}$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x = \frac{1}{\sqrt{2k}}$, $x = \frac{1}{\sqrt{k}}$ 로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형인 입체도형의 부피가 $\sqrt{3}(e^2 - e)$ 일 때, k 의 값은?

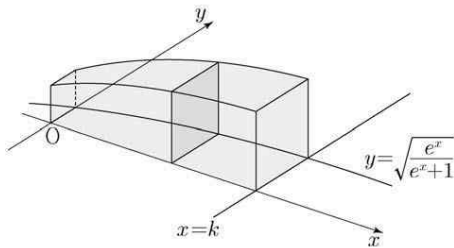
[4점][2019년 9월 가14]

- ① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$



166. 그림과 같이 양수 k 에 대하여 곡선 $y = \sqrt{\frac{e^x}{e^x + 1}}$ 과 x 축, y 축 및 직선 $x = k$ 로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피가 $\ln 7$ 일 때, k 의 값은?

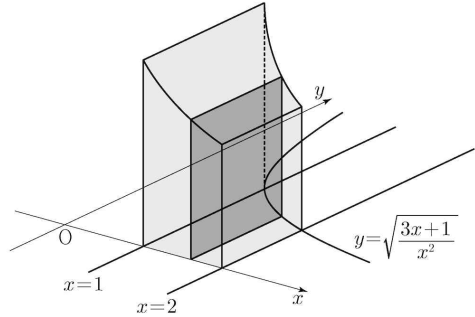
[3점][2020학년도 수능 가12]



- ① $\ln 11$ ② $\ln 13$ ③ $\ln 15$ ④ $\ln 17$ ⑤ $\ln 19$

167. 그림과 같이 곡선 $y = \sqrt{\frac{3x+1}{x^2}}$ ($x > 0$)과 x 축 및 두 직선 $x = 1$, $x = 2$ 로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피는?

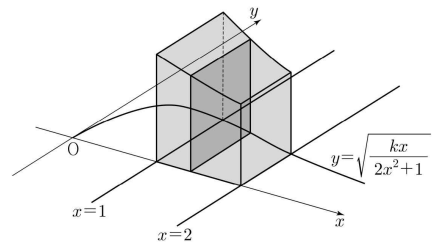
[3점][2021년 9월 미적분26]



- ① $3\ln 2$ ② $\frac{1}{2} + 3\ln 2$ ③ $1 + 3\ln 2$
④ $\frac{1}{2} + 4\ln 2$ ⑤ $1 + 4\ln 2$

168. 그림과 같이 양수 k 에 대하여 곡선 $y = \sqrt{\frac{kx}{2x^2 + 1}}$ 와 x 축 및 두 직선 $x = 1$, $x = 2$ 로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피가 $2\ln 3$ 일 때, k 의 값은?

[3점][2022년 9월 미적분26]

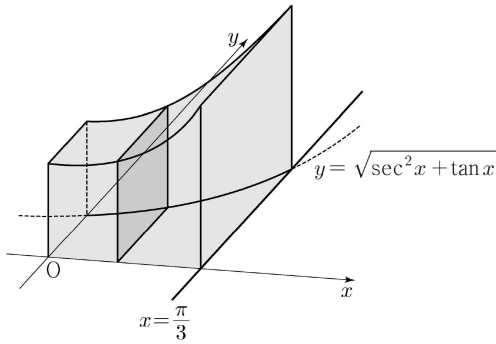


- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

169. 그림과 같이 곡선 $y = \sqrt{\sec^2 x + \tan x}$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$)와 x 축,

y 축 및 직선 $x = \frac{\pi}{3}$ 로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는?

[3점][2023학년도 수능 미적분26]



- ① $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\ln 2}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2} + \ln 2$ ③ $\sqrt{3} + \frac{\ln 2}{2}$
 ④ $\sqrt{3} + \ln 2$ ⑤ $\sqrt{3} + 2\ln 2$

속도, 거리

170. 좌표평면 위의 곡선 $y = \frac{1}{3}x\sqrt{x}$ ($0 \leq x \leq 12$)에 대하여

$x=0$ 에서 $x=12$ 까지의 곡선의 길이를 l 이라 할 때, $3l$ 의 값을 구하시오.

[3점][2016년 7월 가25]

171. 좌표평면 위를 움직이는 점 P 의 시간 t ($0 \leq t \leq 2\pi$)에서의 위치 (x, y) 가

$$x = t + 2\cos t, \quad y = \sqrt{3} \sin t$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점][2017년 7월 가19]

<보 기>

- ㄱ. $t = \frac{\pi}{2}$ 일 때, 점 P 의 속도는 $(-1, 0)$ 이다.
 ㄴ. 점 P 의 속도의 크기의 최솟값은 1이다.
 ㄷ. 점 P 가 $t = \pi$ 에서 $t = 2\pi$ 까지 움직인 거리는 $2\pi + 2$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

172. 좌표평면 위를 움직이는 점 P 의 시간 t ($t > 0$)에서의 위치 (x, y) 가

$$\begin{cases} x = 4\sqrt{2}t + 2 \\ y = \frac{4}{3}\sqrt{t}(t-6) \end{cases}$$

이다. 출발 후 시간 $t=a$ 에서 속력이 최소가 될 때, 시간 $t=1$ 에서 $t=a$ 까지 점 P 가 움직인 거리는 $p\sqrt{2}-q$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 유리수이다.)

[4점][2017년 대구8월 가26]

173. $x=0$ 에서 $x=\ln 2$ 까지의 곡선 $y=\frac{1}{8}e^{2x}+\frac{1}{2}e^{-2x}$ 의 길이는?

[3점][2018년 6월 가12]

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{9}{16}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{11}{16}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

174. 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다

(가) $f(x) \geq 1$

(나) $\{f(x)-f'(x)\}\{f(x)+f'(x)\}=2f(x)$

$x=0$ 에서 $x=2$ 까지 곡선 $y=f(x)$ 의 길이가 6일 때,

$\int_0^2 f(x)dx$ 의 값은?

[4점][2018년 대구11월 가16]

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

175. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t>0)$ 에서의 위치가 곡선 $y=x^2$ 과 직선 $y=t^2x-\frac{\ln t}{8}$ 가 만나는 서로 다른 두 점의 중점일 때, 시각 $t=1$ 에서 $t=e$ 까지 점 P가 움직인 거리는?

[3점][2022학년도 수능 미적분27]

- ① $\frac{e^4}{2}-\frac{3}{8}$ ② $\frac{e^4}{2}-\frac{5}{16}$ ③ $\frac{e^4}{2}-\frac{1}{4}$
④ $\frac{e^4}{2}-\frac{3}{16}$ ⑤ $\frac{e^4}{2}-\frac{1}{8}$

미적분 고난도 문제

176. $t > \frac{1}{2} \ln 2$ 인 실수 t 에 대하여 곡선 $y = \ln(1 + e^{2x} - e^{-2t})$ 과 직선 $y = x + t$ 가 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리를 $f(t)$ 라 할 때, $f'(\ln 2) = \frac{q}{p} \sqrt{2}$ 이다. $p + q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[4점][2021년 6월 미적분30]

177. 서로 다른 두 양수 a, b 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = -\frac{ax^3 + bx}{x^2 + 1}$$

라 하자. 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \neq 0$ 이고, 두 함수 $g(x) = f(x) - f^{-1}(x)$, $h(x) = (g \circ f)(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $g(2) = h(0)$
(나) $g'(2) = -5h'(2)$

$4(b-a)$ 의 값을 구하시오.

[4점][2021년 10월 미적분30]

178. 함수 $f(x) = a \cos x + x \sin x + b$ 와 $-\pi < \alpha < 0 < \beta < \pi$ 인 두 실수 α, β 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} \text{(가)} \quad & f'(\alpha) = f'(\beta) = 0 \\ \text{(나)} \quad & \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{\beta - \alpha} + \frac{1}{\beta} = 0 \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = c$ 일 때, $f\left(\frac{\beta - \alpha}{3}\right) + c = p + q\pi$ 이다.

두 유리수 p, q 에 대하여 $120 \times (p + q)$ 의 값을 구하시오.
(단, a, b, c 는 상수이고, $a < 1$ 이다.)

[4점][2022년 4월 미적분30]

179. 양수 a 에 대하여 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = \frac{x^2 - ax}{e^x}$$

이다. 실수 t 에 대하여 x 에 대한 방정식

$$f(x) = f'(t)(x - t) + f(t)$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$ 라 하자.

$g(5) + \lim_{t \rightarrow 5} g(t) = 5$ 일 때, $\lim_{t \rightarrow k-} g(t) \neq \lim_{t \rightarrow k+} g(t)$ 를 만족시키는 모든

실수 k 의 값의 합은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p + q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[4점][2022년 6월 미적분30]

180. 최고차항의 계수가 3보다 크고 실수 전체의 집합에서 최솟값이 양수인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 가

$$g(x) = e^x f(x)$$

이다. 양수 k 에 대하여 집합 $\{x \mid g(x) = k, x \text{는 실수}\}$ 의 모든 원소의 합을 $h(k)$ 라 할 때, 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $h(k)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $h(k)$ 가 $k=t$ 에서 불연속인 t 의 개수는 1이다.

(나) $\lim_{k \rightarrow 3e^+} h(k) - \lim_{k \rightarrow 3e^-} h(k) = 2$

$g(-6) \times g(2)$ 의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0$)

[4점][2022년 7월 미적분30]

181. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 와 구간 $(0, \infty)$ 에서 $g(x) \geq 0$ 인 함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x \leq -3$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq f(-3)$ 이다.

(나) $x > -3$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $g(x+3)\{f(x)-f(0)\}^2 = f'(x)$ 이다.

$$\int_4^5 g(x) dx = \frac{q}{p} \text{ 일 때, } p+q \text{의 값을 구하시오.}$$

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[4점][2022년 9월 미적분30]

182. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x) = \ln \{f(x) + f'(x) + 1\}$$

이 있다. 상수 a 와 함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) > 0$ 이고

$$\int_{2a}^{3a+x} g(t)dt = \int_{3a-x}^{2a+2} g(t)dt$$

이다.

(나) $g(4) = \ln 5$

$\int_3^5 \{f'(x) + 2a\}g(x)dx = m + n \ln 2$ 일 때, $m+n$ 의 값을 구하시오.

(단, m, n 은 정수이고, $\ln 2$ 는 무리수이다.)

[4점][2022년 10월 미적분30]

183. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$ 와

함수 $g(x) = e^{\sin \pi x} - 1$ 에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 합성함수 $h(x) = g(f(x))$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $h(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값 0을 갖는다.

(나) 열린구간 $(0, 3)$ 에서 방정식 $h(x) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 7이다.

$f(3) = \frac{1}{2}$, $f'(3) = 0$ 일 때, $f(2) = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[4점][2023학년도 수능 미적분30]

184. 두 자연수 a, b 에 대하여 이차함수 $f(x) = ax^2 + b$ 가 있다. 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \ln f(x) - \frac{1}{10} \{f(x) - 1\}$$

이라 하자. 실수 t 에 대하여 직선 $y = |g(t)|$ 와 함수 $y = |g(x)|$ 의 그래프가 만나는 점의 개수를 $h(t)$ 라 하자. 두 함수 $g(x), h(t)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 극솟값을 갖는다.
 (나) 함수 $h(t)$ 가 $t=k$ 에서 불연속인 k 의 값의 개수는 7이다.

$\int_0^a e^x f(x) dx = me^a - 19$ 일 때, 자연수 m 의 값을 구하시오.

[4점][2021년 7월 미적분30]

185. 최고차항의 계수가 9인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi \times f(x))}{x} = 0$

(나) $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값의 곱은 5이다.

함수 $g(x)$ 는 $0 \leq x < 1$ 일 때 $g(x) = f(x)$ 이고 모든 실수 x 에 대하여 $g(x+1) = g(x)$ 이다.

$g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $\int_0^5 x g(x) dx = \frac{q}{p}$ 이다.

$p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[4점][2021년 9월 미적분30]

186. 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \ f(1)=1, \int_1^2 f(x)dx = \frac{5}{4}$$

(나) 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때,
 $x \geq 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $g(2x)=2f(x)$ 이다.

$\int_1^8 xf'(x)dx = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[4점][2022학년도 수능 미적분30]

[해설] 미적분-미분과 적분

1) ③

$$g(x) = \ln f'(x) = \ln(1 + \{f(x)\}^2) \text{에서}$$

$$g'(x) = \frac{2f(x)f'(x)}{1 + \{f(x)\}^2} = \frac{2f(x)[1 + \{f(x)\}^2]}{1 + \{f(x)\}^2} = 2f(x)$$

$$\therefore g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot 1 = 2$$

[다른 풀이]

$$g(x) = \ln f'(x) \text{이므로}$$

$$g'(x) = \frac{f''(x)}{f'(x)} = \frac{2f(x)f'(x)}{f'(x)} = 2f(x)$$

$$\therefore g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot 1 = 2$$

2) ①

[출제의도] 미분법을 이용하여 극솟값을 가질 조건을 찾는다.

$$f(x) = \sin \frac{x}{e^{2x}} = e^{-2x} \sin x \text{이므로}$$

$$f'(x) = -2e^{-2x} \sin x + e^{-2x} \cos x = e^{-2x}(-2\sin x + \cos x)$$

이고

$$f''(x) = -2e^{-2x}(-2\sin x + \cos x) + e^{-2x}(-2\cos x - \sin x) \\ = e^{-2x}(3\sin x - 4\cos x)$$

이다.

이때 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극솟값을 가지므로

$$f'(a) = 0, \quad f''(a) > 0 \text{ 이어야 한다.}$$

이때 $e^{-2a} > 0$ 이므로

$$-2\sin a + \cos a = 0 \quad \cdots \text{㉠}$$

$$3\sin a - 4\cos a > 0 \quad \cdots \text{㉡}$$

이 성립해야 한다.

㉠에서 $\cos a = 2\sin a$ 이므로

$$\tan a = \frac{1}{2}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$-5\sin a > 0$$

따라서 $\tan a > 0$ 이고, $\sin a < 0$ 이므로

$$\pi < a < \frac{3}{2}\pi$$

$$\sec^2 a = 1 + \tan^2 a = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

$$\cos a = \frac{1}{\sec a} = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore \cos a = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \quad (\because \pi < a < \frac{3}{2}\pi)$$

[다른 풀이]

미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극값을 가지므로 $f'(a)=0$ 이어야 한다.

$$f(x) = \sin \frac{x}{e^{2x}} = e^{-2x} \sin x \text{이므로}$$

$$f'(x) = -2e^{-2x} \sin x + e^{-2x} \cos x \\ = e^{-2x}(2\sin x - \cos x)$$

$$\text{이때 } -e^{-2a}(2\sin a - \cos a) = 0 \text{에서 } \tan a = \frac{1}{2}$$

$$\text{i) } 0 < a < \frac{\pi}{2} \text{ 일 때}$$

$$0 < x < a \text{ 이면}$$

$$\sin x < \sin a \text{이고 } \cos x > \cos a \text{이므로}$$

$$2\sin x - \cos x < 2\sin a - \cos a = 0$$

$$\therefore f'(x) > 0$$

$$a < x < \frac{\pi}{2} \text{ 이면}$$

$$\sin x > \sin a \text{이고 } \cos x < \cos a \text{이므로}$$

$$2\sin x - \cos x > 2\sin a - \cos a = 0$$

$$\therefore f'(x) < 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극댓값을 갖는다.

$$\text{ii) } \pi < a < \frac{3}{2}\pi \text{ 일 때}$$

$$\pi < x < a \text{ 이면}$$

$$\sin x > \sin a \text{이고 } \cos x < \cos a \text{이므로}$$

$$2\sin x - \cos x > 2\sin a - \cos a = 0$$

$$\therefore f'(x) < 0$$

$$a < x < \frac{3\pi}{2} \text{ 이면}$$

$$\sin x < \sin a \text{이고 } \cos x > \cos a \text{이므로}$$

$$2\sin x - \cos x < 2\sin a - \cos a = 0$$

$$\therefore f'(x) > 0$$

따라서 $x=a$ 에서 극솟값을 갖는다.

$$\sec^2 a = 1 + \tan^2 a = \frac{5}{4} \text{에서}$$

$$\sec a = -\frac{\sqrt{5}}{2} \quad (\because \pi < a < \frac{3}{2}\pi)$$

$$\therefore \cos a = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

[다른 풀이]

 $f(x) = \sin \frac{x}{e^{2x}}$ 는 미분가능한 함수이므로 몫의 미분법을 사용하면

$$f'(x) = \frac{e^{2x} \cos x - 2e^{2x} \sin x}{(e^{2x})^2} = -\frac{2\sin x - \cos x}{e^{2x}}$$

이때 삼각함수의 합성에 의해서

$$2\sin x - \cos x = \sqrt{5} \sin(x - \alpha) \text{ 이므로}$$

$$(\text{단, } \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}})$$

$$f'(x) = -\frac{\sqrt{5} \sin(x - \alpha)}{e^{2x}}$$

이때 $f'(x)=0$ 에서 $\sin(x - \alpha)=0$ 이므로

$$x - \alpha = 0 \text{ 또는 } x - \alpha = \pi$$

$$\therefore x = \alpha \text{ 또는 } x = \pi + \alpha$$

이때 증가와 감소를 나타내는 표는 다음과 같다.

x	(0)	\cdots	α	\cdots	$\pi + \alpha$	\cdots	(2π)
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		\nearrow	$f(\alpha)$	\searrow	$f(\pi + \alpha)$	\nearrow	

그러므로 함수 $f(x)$ 는 $x = \pi + \alpha$ 에서 극솟값을 갖는다.

$$\therefore a = \pi + \alpha$$

$$\therefore \cos a = \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

3) ①

[출제의도] 함수의 극댓값, 극솟값 이해하기

$$f'(x) = 2e^x \cos x = 0 \quad (0 < x < 2\pi) \text{에서}$$

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x = \frac{3}{2}\pi \text{이다.}$$

함수 $f(x)$ 의 증감표는 다음과 같다.

x	(0)	...	$\frac{\pi}{2}$...	$\frac{3}{2}\pi$...	(2π)
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		\nearrow	$e^{\frac{\pi}{2}}$	\searrow	$-e^{\frac{3}{2}\pi}$	\nearrow	

함수 $f(x)$ 는

$$x = \frac{\pi}{2} \text{에서 극댓값 } M = e^{\frac{\pi}{2}},$$

$$x = \frac{3}{2}\pi \text{에서 극솟값 } m = -e^{\frac{3}{2}\pi} \text{을 갖는다.}$$

$$\text{따라서 } Mm = -e^{2\pi}$$

4) ④

$g(f(x)) = h(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{g(f(x)) - \sqrt{e}}{x - \frac{\pi}{4}} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{h(x) - h\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} \\ &= h'\left(\frac{\pi}{4}\right) = g'\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \cdot f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{e} \cdot 1 = \sqrt{e} \end{aligned}$$

5) ①

도함수의 정의에 의하여 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} = f''(a)$ 이다.

$$f(x) = \frac{1}{x+3} \text{를 미분하면}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+3)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(x+3)^3}$$

$$f''(a) = \frac{2}{(a+3)^3} = 2 \text{ 이므로 } a+3 = 1$$

$$\text{따라서 } a = -2 \text{이다.}$$

6) ②

[출제의도] 분수함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x - 2} = 5 \text{에서 } x \rightarrow 2 \text{일 때}$$

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} \{f(x) - 3\} = 0$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다. 따라서

$$\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x) - 3\} = f(2) - 3 = 0 \text{에서 } f(2) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x - 2} = 5$$

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 5$$

이므로

$$f'(2) = 5$$

$$\text{한편 } g(x) = \frac{f(x)}{e^{x-2}} \text{에서}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{f'(x) \times (e^{x-2}) - f(x) \times (e^{x-2})'}{(e^{x-2})^2} \\ &= \frac{\{f'(x) - f(x)\} \times (e^{x-2})}{(e^{x-2})^2} = \frac{f'(x) - f(x)}{e^{x-2}} \end{aligned}$$

따라서

$$g'(2) = \frac{f'(2) - f(2)}{e^0} = \frac{5 - 3}{1} = 2$$

7) ④

[출제의도] 함수의 도함수를 활용하여 접선의 y 절편을 구한다.

$$f(x) = 0 \text{에서 } \ln(\tan x) = 0$$

$$\tan x = 1$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \text{에서 } x = \frac{\pi}{4} \text{이므로 점 P의 좌표는 } \left(\frac{\pi}{4}, 0\right) \text{이다.}$$

$$f'(x) = \frac{(\tan x)'}{\tan x} = \frac{\sec^2 x}{\tan x}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{(\sqrt{2})^2}{1} = 2 \text{ 이므로}$$

$$\text{점 P에서의 접선의 방정식은 } y = 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = 2x - \frac{\pi}{2} \text{이므로 이 접선의 y절편은 } -\frac{\pi}{2} \text{이다.}$$

8) 96

$$y' = \frac{-4x}{(x^2 + b)^2}$$

$$y'' = \frac{-4(x^2 + b)^2 - (-4x) \times 2(x^2 + b) \times 2x}{(x^2 + b)^4}$$

$$= \frac{-4(x^2 + b - 4x^2)}{(x^2 + b)^3} = \frac{-4(b - 3x^2)}{(x^2 + b)^3}$$

$$(2, a) \text{가 변곡점이므로 } y''_{x=2} = 0$$

$$\therefore b = 12$$

$$\text{곡선 } y = \frac{2}{x^2 + b} \text{는 } (2, a) \text{를 지나므로 곡선에 대입하면}$$

$$a = \frac{2}{2^2 + 12} = \frac{1}{8}$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{12}{\frac{1}{8}} = 96$$

9) 10

$$f(1) = \frac{\pi}{6}, \quad f'(1) = k$$

$$g'(x) = \cos x$$

$$g'(f(1)) = g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$g(f(1)) = \frac{1}{2}$$

$$\left(1, \frac{1}{2}\right) \text{에서의 접선은}$$

$$y = g'(f(1)) \cdot f'(1)(x - 1) + \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot k(x - 1) + \frac{1}{2} \text{이 } (0, 0) \text{을 지난다.}$$

$$0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}k + \frac{1}{2}, \quad \therefore k = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$30k^2 = 30 \times \frac{1}{3} = 10$$

10) ②

[출제의도] 이해능력-지수함수와 로그함수

$$y = \ln x + kx \text{에서 } y' = \frac{1}{x} + k$$

접점의 좌표를 $(t, \ln t + kt)$ 로 놓으면

$$\text{접선의 기울기가 2이므로 } \frac{1}{t} + k = 2$$

$$2t - kt = 1 \dots \textcircled{1}$$

점 $(t, \ln t + kt)$ 는 직선 $y = 2x - 1$ 위의 점이므로

$$\ln t + kt = 2t - 1, \ln t + 1 = 2t - kt \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면 $\ln t + 1 = 1$ 에서 $\ln t = 0$ 이므로

$$t = 1, \textcircled{1}에서 2 - k = 1 \text{ 따라서 } k = 1$$

11) ①

[출제의도] 몫의 미분법 이해하기

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^2 + 2} \text{에서 } g(1) = \frac{f(1)}{3} = \frac{6}{3} = 2 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - 2}{x - 1} = g'(1)$$

$$g'(x) = \frac{f'(x) \times (x^2 + 2) - f(x) \times 2x}{(x^2 + 2)^2}$$

$$\therefore g'(1) = \frac{3f'(1) - 2f(1)}{3^2} = \frac{3 \times 5 - 2 \times 6}{9} = \frac{1}{3}$$

12) ②

[출제의도] 도함수의 성질을 이해하여 극값을 구한다.

$$f(x) = \tan(\pi x^2 + ax) \text{에서}$$

$$f'(x) = (2\pi x + a) \sec^2(\pi x^2 + ax)$$

$$x = \frac{1}{2} \text{에서 극값을 가지므로}$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = (\pi + a) \sec^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = 0$$

$$\sec^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) \neq 0 \text{이므로 } a = -\pi$$

따라서 $f(x) = \tan(\pi x^2 - \pi x)$ 에서 극값 k 는

$$k = f\left(\frac{1}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

13) ④

[출제의도] 주어진 조건을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

조건 (가)에서

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2+4h) - g(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{g(2+4h) - g(2)}{h} \times 4 \right\} = 4g'(2) = 8$$

따라서 $g'(2) = 2$ 이다.

또한 조건 (나)에서

$$f'(g(2)) \times g'(2) = 10 \text{이므로}$$

$$f'(g(2)) = 5$$

그런데 $f'(x) = 2^x$ 이므로

$$f'(g(2)) = 2^{g(2)} = 5$$

따라서 $g(2) = \log_2 5$

14) ④

[출제의도] 곡선의 변곡점의 좌표를 구할 수 있는가?

$$f(x) = xe^x \text{에서}$$

$$f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$$

$$f''(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$$

$$f''(x) = 0 \text{에서}$$

$$(x+2)e^x = 0, x = -2$$

$f''(-2) = 0$ 이고, $x = -2$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 변하므로 곡선

$y = f(x)$ 의 변곡점의 좌표는 $(-2, f(-2))$ 이다.

$$\text{이때, } f(-2) = -2e^{-2} = -\frac{2}{e^2} \text{이므로}$$

$$a = -2, b = -\frac{2}{e^2}$$

따라서

$$ab = (-2) \times \left(-\frac{2}{e^2}\right) = \frac{4}{e^2}$$

15) ④

[출제의도] 삼각함수의 미분법과 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 주어진 \tan 값을 구할 수 있는가?

$$f'(x) = \cos(x + \alpha) - 2\sin(x + \alpha) \text{이므로}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = 0$$

$$\text{즉, } \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \text{에서}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$\frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \alpha}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan \alpha} = \frac{1}{2}, \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = \frac{1}{2}$$

$$2(1 + \tan \alpha) = 1 - \tan \alpha$$

$$\tan \alpha = -\frac{1}{3}$$

16) ⑤

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(e+h) - f(e-2h)}{h} = 3f'(e) \text{이다.}$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2} \text{이므로 } f'(x) = \frac{x - \ln x \times 2x}{x^4} \text{이다.}$$

$$3f'(e) = 3 \times \left(-\frac{1}{e^3}\right) = -\frac{3}{e^3}$$

17) ④

$$f'(x) = (2x)e^{-x} - (x^2 - 3)e^{-x} = -e^{-x}(x^2 - 2x - 3) = -e^{-x}(x-3)(x+1)$$

$x = 3$ 일 때 극값을 갖고 $x = -1$ 일 때 극값을 갖는다.

$$a = f(3) = 6e^{-3}, b = f(-1) = (-2)e \text{이므로}$$

$$a \times b = -\frac{12}{e^2}$$

18) ⑤

[출제의도] 합성함수의 미분법을 이해한다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) + 1}{x - 1} = 2 \text{에서}$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이면 (분자) $\rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \{g(x) + 1\} = g(1) + 1 = 0, g(1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = g'(1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x) - 2}{x - 1} = 12 \text{에서}$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이면 (분자) $\rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \{h(x) - 2\} = h(1) - 2 = 0, h(1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x) - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = h'(1) = 12$$

$h(x) = (f \circ g)(x)$ 에서 $x = 1$ 일 때

$$h(1) = f(g(1)) = f(-1) = 2$$

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) \text{에서 } x = 1 \text{일 때}$$

$$h'(1) = f'(g(1))g'(1) = f'(-1) \times 2 = 12$$

$$\text{즉 } f'(-1) = 6$$

$$\text{따라서 } f(-1) + f'(-1) = 2 + 6 = 8$$

19) ④

[출제의도] 미분법을 이용하여 곡선이 변곡점을 갖도록 하는 조건을 구할 수 있는가?

$$y' = 2ax - 4\cos 2x$$

$$y'' = 2a + 8\sin 2x$$

$$y'' = 0 \text{에서}$$

$$\sin 2x = -\frac{a}{4}$$

곡선 $y = ax^2 - 2\sin 2x$ 가 변곡점을 가져야 하므로

$$-1 < -\frac{a}{4} < 1$$

에서 $-4 < a < 4$

따라서 정수 a 의 값은

$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ 이고 그 개수는 7이다.

20) 4

[출제의도] 도함수를 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

$$f(x) = x^3 \ln x \text{이므로}$$

$$f'(x) = 3x^2 \ln x + x^3 \times \frac{1}{x} = 3x^2 \ln x + x^2$$

따라서,

$$f'(e) = 3e^2 \ln e + e^2 = 4e^2 \text{이므로}$$

$$\frac{f'(e)}{e^2} = 4$$

21) ③

[출제의도] 몫의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

$$g(x) = \frac{f(x)}{(e^x + 1)^2} \text{이므로}$$

$$g'(x) = \frac{f'(x) \times (e^x + 1)^2 - f(x) \times 2(e^x + 1)e^x}{(e^x + 1)^4}$$

$$= \frac{f'(x) \times (e^x + 1) - 2e^x f(x)}{(e^x + 1)^3}$$

따라서

$$g'(0) = \frac{f'(0) \times (e^0 + 1) - 2e^0 f(0)}{(e^0 + 1)^3}$$

$$= \frac{2f'(0) - 2f(0)}{2^3} = \frac{f'(0) - f(0)}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

22) ①

$$f'(x) = (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x - 7)e^x = (x^2 - 9)e^x$$

x		-3		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	\nearrow	극대	\searrow	극소	\nearrow

$$a = f(-3) = 8e^{-3}, b = -4e^3$$

$$ab = -32$$

23) ④

[출제의도] 합성함수의 미분법의 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

$$f(x^3 + x) = e^x \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$f'(x^3 + x) \times (3x^2 + 1) = e^x \quad \dots\dots \text{㉠}$$

이다.

$$x^3 + x = 2 \text{에서}$$

$$x^3 + x - 2 = (x - 1)(x^2 + x + 2) = 0 \text{이므로, } x = 1 \text{이다.}$$

따라서, ㉠의 양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$f'(1 + 1) \times (3 + 1) = e \text{이므로,}$$

$$f'(2) = \frac{e}{4}$$

24) 3

$$\frac{1}{n} = h \text{라 하면, } n \rightarrow \infty \text{일 때, } h \rightarrow 0 \text{이다.}$$

$$\begin{aligned} (\text{준식}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{g(1+h) - g(1)\} - \{g(1-2h) - g(1)\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} + 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1-2h) - g(1)}{-2h} \\ &= g'(1) + 2g'(1) = 3g'(1) \end{aligned}$$

$$g(1) = f^{-1}(1) = a \text{라 하면 } f(a) = 1 \text{이므로}$$

$$f(a) = a^3 + 3a^2 + 4a + 5 = 1 \text{에서 } a = -2 \text{이다.}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + 4 \text{에서 } f'(-2) = 4 \text{이고}$$

$$g(f(x)) = x \text{에서 } g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \text{이므로}$$

$$3g'(1) = 3 \times \frac{1}{f'(-2)} = \frac{3}{4} \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } 4p = 3$$

25) 15

$$\text{주어진 조건에서 } f(2) = 1, f'(2) = 1$$

$$y = f(2x) \text{의 역함수는}$$

$$x = f(2y), 2y = f^{-1}(x), y = \frac{1}{2}f^{-1}(x) = g(x)$$

$$g(1) = \frac{1}{2}f^{-1}(1) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 = a$$

$$g'(1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{2} = b$$

$$\therefore 10(a+b) = 15$$

26) 16

$$y = \ln(\tan x) \text{이면 역함수 } g(x) \text{와 관련하여 } x = \ln(\tan y)$$

$$\therefore \tan(g(x)) = e^x, g(0) = \frac{\pi}{4}$$

$$4g(8h) - \pi = 4\{g(8h) - g(0)\} \text{이므로}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4\{g(8h) - g(0)\}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{32\{g(8h) - g(0)\}}{8h} = 32 \times g'(0)$$

$$\sec^2(g(x))g'(x) = e^x \quad \therefore \sec^2(g(0))g'(0) = 1$$

$$\therefore g'(0) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore 16$$

27) ①

[출제의도] 역함수의 미분법 이해하기

$$g(x) \text{가 함수 } f(x) \text{의 역함수이므로}$$

$$g(1) = t \text{라 하면 } f(t) = 1$$

$$\tan^3 t = 1 \text{에서 } \tan t = 1$$

$$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \text{에서 } t = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{그러므로 } g(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$f'(x) = 3\tan^2 x \sec^2 x$$

따라서 점 $(1, g(1))$ 에서의 접선의 기울기는

$$g'(1) = \frac{1}{f'(g(1))} = \frac{1}{f'(\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{6}$$

28) ②

[출제의도] 역함수의 미분계수 이해하기

함수 $f(e^x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로 $g(f(e^x)) = x$ 가 된다.

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(f(e^x)) \times f'(e^x) \times e^x = 1 \text{ 이 성립하고}$$

$$f(e) = e + 1 \text{ 이므로 } x = 1 \text{ 을 대입하면}$$

$$g'(f(e)) \times f'(e) \times e = 1$$

$$g'(e+1) \times (e+1) = 1$$

$$g'(e+1) = \frac{1}{e+1}$$

29) ⑤

[출제의도] 이해능력-미분법

함수 $f(2x-1)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로

$$g(f(2x-1)) = x \quad \cdots \textcircled{A}$$

①의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(f(2x-1)) \times f'(2x-1) \times 2 = 1 \quad \cdots \textcircled{B}$$

②의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$g'(f(1)) \times f'(1) \times 2 = 1 \text{ 이므로}$$

$$g'(f(1)) = \frac{1}{2f'(1)}$$

$$f'(x) = e^{x-1} + 3 + xe^{x-1} \text{에서}$$

$$f'(1) = 1 + 3 + 1 = 5 \text{ 이므로}$$

$$g'(f(1)) = \frac{1}{2 \times 5} = \frac{1}{10}$$

30) ③

[출제의도] 역함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이고

$$f(1) = 2, f'(1) = 3 \text{ 이므로 } g(2) = 1$$

$$g'(2) = \frac{1}{f'(g(2))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3}$$

한편, 함수 $h(x) = xg(x)$ 에서

$$h'(x) = g(x) + xg'(x)$$

따라서

$$h'(2) = g(2) + 2g'(2) = 1 + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

31) ④

[출제의도] 역함수의 미분을 이용하여 조건을 만족하는 함숫값을 구한다.

$g(f(x)) = x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(f(x))f'(x) = 1$$

조건 (나)에서 $g'(f(x)) \neq 0$ 이고

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \text{ 이므로}$$

$$f(x)g'(f(x)) = \frac{f'(x)}{f'(x)} = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = x^2 + 1$$

양변을 x 에 대하여 적분하면

$$\ln |f(x)| = \frac{1}{3}x^3 + x + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

$$|f(x)| = e^{\frac{1}{3}x^3 + x + C}$$

조건 (가)에서 $f(0) = 1 > 0$ 이고 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$$f(x) = e^{\frac{1}{3}x^3 + x + C}$$

$$f(0) = 1 \text{에서 } C = 0$$

따라서 $f(x) = e^{\frac{1}{3}x^3 + x}$ 이므로

$$f(3) = e^{12}$$

32) 17

$$f'(x) = 15e^{5x} + 1 + \cos x$$

$$f'(0) = 15e^0 + 1 + \cos 0 = 17$$

$g(x)$ 는 $(3, 0)$ 을 지나고 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{g(x)-g(3)} = \frac{1}{g'(3)} = f'(0) = 17$$

33) ①

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(3e+h) - g(3e-h)}{h} = 2g'(3e) \text{이고 } f(e) = 3e \text{이므로}$$

역함수 미분법에 의해

$$g'(3e) = \frac{1}{f'(e)}$$

$$f'(x) = 3\ln x + 3$$

$$f'(e) = 6 \text{이므로 } g'(3e) = \frac{1}{6}$$

$$\therefore 2g'(3e) = \frac{1}{3}$$

34) ②

[출제의도] 역함수의 미분법을 이용하여 문제해결하기

$$t = \frac{\pi}{4} \text{ 일 때, } f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 \text{이므로 } g(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$f(\cos t) = \tan t$ 의 양변을 미분하면

$$(-\sin t) \times f'(\cos t) = \sec^2 t$$

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 \text{ 이므로 } f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2}$$

$$\therefore g'(1) = \frac{1}{f'(g(1))} = \frac{1}{f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{1}{-2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

35) ⑤

[출제의도] 역함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

$$f'(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \text{에서}$$

$$f'(-1) = \frac{e}{(1+e)^2}$$

따라서

$$g'(f(-1)) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{(1+e)^2}{e}$$

36) ⑤

[출제의도] 역함수의 미분법을 이용하여 접선의 기울기를 구한다.

$$g(4) = k \text{라 하면 } f(k) = 4$$

$$k^3 - 5k^2 + 9k - 5 = 4$$

$$k^3 - 5k^2 + 9k - 9 = 0$$

$$(k-3)(k^2 - 2k + 3) = 0$$

k 는 실수이므로 $k = 3$

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 9x - 5 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 9$$

$$\text{이므로 } f'(3) = 6$$

따라서 역함수의 미분법에 의하여

$$g'(4) = \frac{1}{f'(g(4))} = \frac{1}{f'(3)} = \frac{1}{6}$$

37) ③

$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{g(x)}{x+2} = b$ 에서 $x \rightarrow -2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = 0$$

즉, $g(-2) = 0$ 이고 $g(x)$ 는 $f(x)$ 의 역함수이므로 $f(0) = -2$ 이때

$$f(0) = \ln\left(\frac{\sec 0 + \tan 0}{a}\right) = \ln\left(\frac{1+0}{a}\right) = \ln \frac{1}{a}$$

이므로 $\ln \frac{1}{a} = -2$ 에서

$$\frac{1}{a} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}, \text{ 즉 } a = e^2$$

또

$$b = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{g(x)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{g(x) - g(-2)}{x - (-2)} = g'(-2)$$

한편

$$f(x) = \ln\left(\frac{\sec x + \tan x}{a}\right) = \ln\left(\frac{\sec x + \tan x}{e^2}\right) \text{ 에서}$$

$$f'(x) = \frac{e^2}{\sec x + \tan x} \times \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{e^2} = \sec x$$

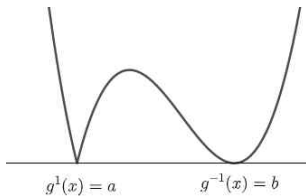
이므로

$$g'(-2) = \frac{1}{f'(g(-2))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{\sec 0} = 1$$

따라서 $a = e^2$, $b = 1$ 이므로 $ab = e^2 \times 1 = e^2$

38) 72

$g^{-1}(x)$ 의 치역이 모든 실수의 집합이므로 $|h(x)|$ 의 그래프는 다음과 같은 모양이다.



$(x-1)|h(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $h(1) = 0$ 이어야 한다.

$$f(g^{-1}(1)) = 0 \text{에서 } g^{-1}(1) = a, g(a) = 1 \text{이므로 } a = 0$$

$$\text{따라서 } f(x) = x(x-b)^2$$

$$h'(x) = f'(g^{-1}(x))(g^{-1})'(x) \text{에서 } h'(3) = f'(1) = 8$$

$$f'(x) = (x-b)^2 + 2x(x-b) \text{이므로}$$

$$(1-b)^2 + 2(1-b) - 8 = b^2 - 4b - 5 = 0 \text{에서}$$

$$a < b \text{이므로 } b = 5$$

$$f(x) = x(x-5)^2$$

$$f(8) = 72$$

39) 15

[출제의도] 역함수의 미분법을 활용하여 문제해결하기

함수 $h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 연속함수이다.

함수 $h(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이므로

$$h(0) = \lim_{x \rightarrow 0-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} h(x) \text{에서}$$

$$h(0) = 0 \text{이고 } f(g^{-1}(0)) = 0$$

$$g^{-1}(0) = \alpha \text{라 하면 } f(\alpha) = 0, g(\alpha) = 0$$

$$f(\alpha) = 0 \text{에서}$$

$$\alpha = -1 \text{ 또는 } \alpha = 0 \text{ 또는 } \alpha = 1 \quad \dots \textcircled{C}$$

함수 $h(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이므로

$$h(1) = \lim_{x \rightarrow 1-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} h(x) \text{에서}$$

$$h(1) = 0 \text{이고 } f(g^{-1}(1)) = 0$$

$$g(0) = 1 \text{이므로 } g^{-1}(1) = 0 \text{이고 } f(0) = 0 \text{이므로}$$

$$f(g^{-1}(1)) = 0 \text{은 성립한다.}$$

함수 $h(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(g^{-1}(x))}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{\pi} \sin \pi x}{x} = 1$$

$$f'(g^{-1}(0))(g^{-1})'(0) = 1$$

$$g^{-1}(0) = \alpha \text{이고 } (g^{-1})'(0) = \frac{1}{g'(\alpha)} \text{이므로}$$

$$f'(\alpha) \times \frac{1}{g'(\alpha)} = 1$$

$$f'(\alpha) = g'(\alpha)$$

$$3\alpha^2 - 1 = 3a\alpha^2 + 2\alpha + b \quad \dots \textcircled{C}$$

함수 $h(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\frac{1}{\pi} \sin \pi x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(g^{-1}(x))}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\frac{1}{\pi} \sin \pi x}{x - 1} \text{에서 } x - 1 = t \text{라 하면}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\frac{1}{\pi} \sin \pi x}{x - 1} = \lim_{t \rightarrow 0-} \frac{-\sin \pi t}{\pi t} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(g^{-1}(x))}{x - 1} = -1 \text{에서}$$

$$f'(g^{-1}(1))(g^{-1})'(1) = -1$$

$$g^{-1}(1) = 0 \text{이고 } (g^{-1})'(1) = \frac{1}{g'(0)} \text{이므로}$$

$$f'(0) \times \frac{1}{g'(0)} = -1$$

$$f'(0) = -1 \text{이므로}$$

$$g'(0) = b = 1$$

삼차함수 $g(x)$ 는 역함수 $g^{-1}(x)$ 를 가지고

$$g'(0) = 1 > 0 \text{이므로 증가함수이다.}$$

$$g(\alpha) = 0, g(0) = 1 \text{이므로 } \alpha < 0$$

$$\textcircled{A} \text{에 의하여 } \alpha = -1$$

$$\textcircled{C} \text{에 의하여 } a = 1$$

$$g(x) = x^3 + x^2 + x + 1$$

$$\text{따라서 } g(a+b) = g(2) = 15$$

40) ②

[출제의도] 역함수의 미분법 이해하기

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2}{x - 2} = \frac{1}{3} \text{에서 } f(2) = 2, f'(2) = \frac{1}{3}$$

$$f(x) \text{는 함수 } g(x) \text{의 역함수이므로 } g(2) = 2$$

$$g'(2) = \frac{1}{f'(g(2))} = \frac{1}{f'(2)} = 3$$

$$f(2) \neq 0 \text{이고 두 함수 } f(x), g(x) \text{는}$$

양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

함수 $h(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하다.

$$h'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$$

$$h'(2) = \frac{g'(2)f(2) - g(2)f'(2)}{\{f(2)\}^2} = \frac{3 \times 2 - 2 \times \frac{1}{3}}{2^2} = \frac{6 - \frac{2}{3}}{4} = \frac{4}{3}$$

41) 3

점 $(t, 0)$ 과 점 $(x, f(x))$ 사이의 거리가 최소일 때, 두 점 $(t, 0)$, $(x, f(x))$ 를 지나는 직선과 점 $(x, f(x))$ 에서의 곡선 $y = f(x)$ 의 접선은 서로 수직이다. 이때 $x = s$ 이므로

$$\frac{f(s)}{s-t} \times f'(s) = -1, \quad t = s + f(s) \times f'(s) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$h(1) = a$ 로 놓으면 $g(a) = 1$ 이고, $h'(1) = \frac{1}{g'(a)}$ 이다

$t = a$ 일 때, $s = b$ 라 하면 $g(a) = f(b) = 1$ 에서

$$e^b + b = 1, \quad b = 0$$

①에서 $a = 0 + f(0) \times f'(0) = 2$ 이다.

①의 양변을 s 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= 1 + f'(s) \times f'(s) + f(s) \times f''(s) \\ &= 1 + (e^s + 1)^2 + (e^s + s)e^s \end{aligned}$$

이므로 $t = 2$, $s = 0$ 일 때 $\frac{dt}{ds} = 6$ 이다.

$g(t) = f(s)$ 의 양변을 s 에 대하여 미분하면

$$g'(t) \times \frac{dt}{ds} = f'(s) \quad \text{이므로}$$

$$g'(2) \times 6 = f'(0), \quad g'(2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore h'(1) = \frac{1}{g'(2)} = 3$$

42) ①

$\ln y = 2e^{-3x}$ 이고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{y'}{y} = -6e^{-3x}$$

$$y' = -6e^{-3x} \cdot y \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①에 $x = 0$, $y = e^2$ 을 대입하면 $y' = -6e^2$

따라서 점 $(0, e^2)$ 에서의 접선의 기울기는 $-6e^2$

43) ④

[출제의도] 함수의 미분법을 이용하여 넓이의 순간변화율을 구한다.

네 점 A, B, C, D의 좌표는

$A(\log_4 a, a)$, $B(\log_2 a, a)$, $C(\log_2 a, a^2)$, $D(2\log_2 a, a^2)$ 이다.

$$\overline{CD} = \log_2 a, \quad \overline{BC} = a^2 - a \text{이므로}$$

삼각형 ADC의 넓이를 $S(a)$ 라 하면

$$S(a) = \frac{1}{2}(a^2 - a) \cdot \log_2 a$$

$$\begin{aligned} \therefore S'(a) &= \frac{1}{2}(2a-1)\log_2 a + \frac{1}{2}(a^2-a) \frac{1}{a \ln 2} \\ &= \frac{1}{2}(2a-1)\log_2 a + \frac{1}{2\ln 2}(a-1) \end{aligned}$$

$$\therefore S'(4) = 7 + \frac{3}{2\ln 2}$$

이때 $\frac{dS}{dt} = S'(a) \frac{da}{dt}$ 이고 $\frac{da}{dt} = 1$ 이므로

구하는 순간변화율은

$$\left(7 + \frac{3}{2\ln 2}\right) \times 1 = 7 + \frac{3}{2\ln 2}$$

[다른 풀이]

점 P가 점 $(0, 2)$ 를 출발한 지 t 초 후의 점 P의 좌표는 $(0, 2+t)$
이므로 삼각형 ADC의 넓이는

$$S(t) = \frac{1}{2}(t^2 + 3t + 2) \cdot \log_2(t+2)$$

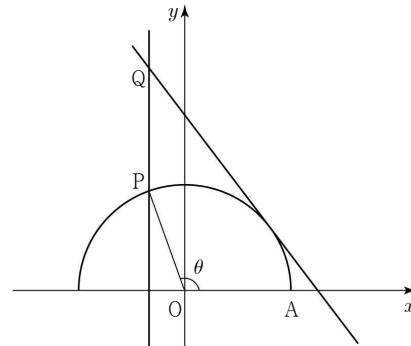
$$\begin{aligned} \therefore S'(t) &= \frac{1}{2}(2t+3)\log_2(t+2) + \frac{1}{2}(t^2+3t+2) \frac{1}{(t+2)\ln 2} \\ &= \frac{1}{2}(2t+3)\log_2(t+2) + \frac{1}{2\ln 2}(t+1) \end{aligned}$$

점 P가 점 $(0, 4)$ 를 지나는 순간은 $t = 2$ 일 때이므로 구하는 순간변화율은

$$\begin{aligned} \therefore S'(2) &= \frac{1}{2}(2 \times 2 + 3)\log_2(2+2) + \frac{1}{2\ln 2}(2+1) \\ &= 7 + \frac{3}{2\ln 2} \end{aligned}$$

44) 10

[출제의도] 속도와 가속도를 이용하여 수학내적 문제해결하기



$\angle AOP = \theta$ 라 하면 호의 길이 $l = 100$

점 $P(10\cos\theta, 10\sin\theta)$ 가 매초 5의 일정한 속력으로 이동하므로
양변을 시간 t 에 대해 미분하면

$$\frac{dl}{dt} = 10 \frac{d\theta}{dt} = 5, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}$$

$$\overline{PQ} = L = 20 - 10\sqrt{3}\cos\theta - 10\sin\theta$$

따라서 L 을 시간 t 에 대해 미분하면

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= (10\sqrt{3}\sin\theta - 10\cos\theta) \frac{d\theta}{dt} \\ &= 10\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

따라서 $\theta = \frac{2\pi}{3}$ 일 때, 최댓값은 10

45) ②

[출제의도] 매개변수로 나타낸 함수의 미분 이해하기

점 $P\left(2t+1, t+\frac{3}{t}\right)$ 이 그리는 곡선 위의 한 점에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{t^2}\right)$$

곡선 위의 한 점 (a, b) 에서의 접선의 기울기가 -1 이므로

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{t^2}\right) = -1$$

$$t = 1 \quad (t > 0)$$

따라서 $a = 3$, $b = 4$ 에서 $a+b = 7$

46) ①

[출제의도] 음함수의 미분법을 이해하여 삼각형의 넓이를 구한다.

$$x^2 + 5xy - 2y^2 + 11 = 0 \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$2x + 5y + 5x \frac{dy}{dx} - 4y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(5x - 4y) \frac{dy}{dx} = -2x - 5y$$

점 (1, 4)에서의 접선의 기울기는 2이므로

접선의 방정식 $y = 2x + 2$ 의

x 절편은 -1 , y 절편은 2이다.

$$\text{따라서 구하는 넓이는 } \frac{1}{2} \times 2 \times |-1| = 1$$

47) ①

[출제의도] 이해능력-평면곡선

$$x = t - \frac{1}{t} = 0 \text{에서 } \frac{t^2 - 1}{t} = 0, t = -1 \text{ 또는 } t = 1$$

$$y = t + \frac{1}{t} = 2 \text{이므로 } t = 1$$

$$x = t - \frac{1}{t} \text{에서 } \frac{dx}{dt} = 1 + \frac{1}{t^2} = \frac{t^2 + 1}{t^2}$$

$$y = t + \frac{1}{t} \text{에서 } \frac{dy}{dt} = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2 - 1}{t^2}$$

$$\text{따라서 } t = 1 \text{일 때 } \frac{dy}{dx} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} = 0$$

따라서 점 (0, 2)에서의 접선의 기울기는 0이다.

48) ①

$e^x - e^y = y \dots \textcircled{1}$ 의 양변을 x 에 대해 미분하면

$$e^x - e^y \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \dots \textcircled{2} \text{이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{1 + e^y} \text{이다.}$$

(a, b)를 $\textcircled{1}$ 과 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^a}{1 + e^b} \text{이고 } e^a - e^b = b \text{이다.}$$

$$\frac{e^a}{1 + e^b} = 1$$

$$e^a - e^b = b$$

연립하면 $e^a - e^b = 1$ 이므로 $b = 1$ 이고, $a = \ln(1 + e)$ 이다.

따라서 정답은 $a + b = 1 + \ln(1 + e)$ 이다.

49) ⑤

음함수 미분법에 의하여 곡선을 미분하면

$$e^y \frac{dy}{dx} \ln x + e^y \frac{1}{x} = 2 \frac{dy}{dx}$$

점 (e, 0)을 대입하면

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{e} = 2 \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{e}$$

따라서 접선의 방정식은

$$y = \frac{1}{e}(x - e) + 0$$

$$y = \frac{1}{e}x - 1$$

$$\therefore ab = -\frac{1}{e}$$

50) 13

[출제의도] 음함수의 미분법을 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

$$y^2 = \ln(5 - x^2) + xy + 3 \text{에서 } y \text{를 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$2y \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{5 - x^2} + y + x \frac{dy}{dx}$$

$$(2y - x) \frac{dy}{dx} = y - \frac{2x}{5 - x^2}$$

$x = 2, y = 3$ 을 대입하면

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 - 4}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{점 (2, 3)에서의 접선의 방정식은 } y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$$

$$a = -\frac{1}{4}, b = \frac{7}{2} \text{이므로}$$

$$4(a + b) = 13$$

51) 140

[출제의도] 이해능력-평면곡선

$$x = e^t - e^{-t}, y = e^t - 3e^{-t} \text{에서}$$

$$\frac{dx}{dt} = e^t + e^{-t}, \frac{dy}{dt} = e^t + 3e^{-t} \text{이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^t + 3e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$$

$$\frac{e^t + 3e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = \frac{6}{5} \text{에서 } \frac{e^{2t} + 3}{e^{2t} + 1} = \frac{6}{5}$$

$$5(e^{2t} + 3) = 6(e^{2t} + 1), e^{2t} = 9, e^t = 3$$

따라서 $t = \ln 3$

$$\text{이때, } a = e^{\ln 3} - e^{-\ln 3} = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

$$b = e^{\ln 3} - 3e^{-\ln 3} = 3 - 1 = 2 \text{이므로}$$

점점의 좌표는 $\left(\frac{8}{3}, 2\right)$ 따라서

$$30(a + b) = 30\left(\frac{8}{3} + 2\right) = 30 \times \frac{14}{3} = 140$$

52) 5

[출제의도] 수학내재 문제해결능력-평면곡선

$$\text{곡선 } \sin x \cos y = \frac{1}{3} \text{은 점 (a, b)를 지나므로}$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{3} \dots \textcircled{1}$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{3} \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$\cos x \cos y - \sin x \sin y \frac{dy}{dx} = 0$$

이때 점 (a, b)에서의 접선의 기울기가 1이므로

$$\cos a \cos b - \sin a \sin b = 0, \text{ 즉 } \cos(a + b) = 0$$

이때 $0 \leq a + b < 2\pi$ 이므로

$$a + b = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } a + b = \frac{3\pi}{2}$$

$$(i) a + b = \frac{\pi}{2} \text{일 때, } \textcircled{1} \text{에서}$$

$$\sin a \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin^2 a = \frac{1}{3}$$

$$0 \leq a < \pi \text{에서 } 0 \leq \sin a \leq 1 \text{이므로 } \sin a = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(ii) $a+b = \frac{3\pi}{2}$ 일 때, ㉠에서

$$\sin a \cos\left(\frac{3\pi}{2}-a\right) = -\sin^2 a = \frac{1}{3}$$

이때 $\sin^2 a \geq 0$ 이므로 등식을 만족시키는 a 의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $a+b = \frac{\pi}{2}$, $\sin a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로

$$\sin b \cos a = \sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right) \cos a = \cos^2 a = 1 - \sin^2 a = \frac{2}{3}$$

따라서 $p=3$, $q=2$ 이므로

$$p+q=5$$

53) ④

[출제의도] 음함수의 미분법 이해하기

음함수의 미분법에 의하여

$$y+x \frac{dy}{dx} - 3y^2 \frac{dy}{dx} \ln x - y^3 \frac{1}{x} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y^3}{x} - y}{x - 3y^2 \ln x} \quad (\text{단, } x - 3y^2 \ln x \neq 0)$$

$$x=1 \text{ 일 때 } y=2 \text{ 이므로 } \frac{dy}{dx} = \frac{8-2}{1-0} = 6$$

54) ④

$\pi x = \cos y + x \sin y$ 를 미분하면

$$\pi = -\sin y \times \frac{dy}{dx} + \sin y + x \times \cos y \times \frac{dy}{dx}$$

이를 정리하면

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pi - \sin y}{x \times \cos y - \sin y}$$

이고 점 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서의 접선의 기울기는 $x=0$, $y=\frac{\pi}{2}$ 일 때의

$$\text{미분계수이므로 } \frac{\pi - \sin \frac{\pi}{2}}{0 \times \cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2}} = 1 - \pi$$

55) 4

[출제의도] 음함수의 미분법을 이용하여 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

점 $(a, 0)$ 는 곡선 $x^3 - y^3 = e^{xy}$ 위의 점이므로 $a^3 = 1$ 에서 $a=1$

$x^3 - y^3 = e^{xy}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$3x^2 - 3y^2 \frac{dy}{dx} = ye^{xy} + xe^{xy} \frac{dy}{dx}$$

이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - ye^{xy}}{xe^{xy} + 3y^2} \quad (\text{단, } xe^{xy} + 3y^2 \neq 0)$$

따라서 곡선 $x^3 - y^3 = e^{xy}$ 위의 점 $(1, 0)$ 에서의 접선의 기울기는

$$b = \frac{3-0}{1+0} = 3$$

따라서

$$\therefore a+b = 1+3 = 4$$

56) ⑤

$x = \ln t + t$, $y = -t^3 + 3t$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-3t^2 + 3}{1} = \frac{-3t(t+1)(t-1)}{t+1} = -3t(t-1)$$

이때, $f(t) = -3t(t-1)$ 이라 하면 함수 $y=f(t)$ 의 그래프는 $t = \frac{1}{2}$ 에서

대칭이고 최고차항의 계수가 음수이므로 $t = \frac{1}{2}$ 에서 최댓값을 갖는다.

따라서 $a = \frac{1}{2}$

57) ②

[출제의도] 매개변수로 나타낸 함수의 도함수를 구할 수 있는가?

$$\frac{dx}{dt} = e^t - \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = \cos t \text{ 이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\cos t}{e^t - \sin t}$$

따라서 $t=0$ 일 때 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은

$$\frac{1}{1-0} = 1$$

58) ④

[출제의도] 매개변수로 나타내어진 곡선에서 미분계수를 구할 수 있는가?

$x = e^t - 4e^{-t}$, $y = t+1$ 에서

$$\frac{dx}{dt} = e^t + 4e^{-t}, \quad \frac{dy}{dt} = 1 \text{ 이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{e^t + 4e^{-t}} \text{ 이다.}$$

따라서 $t = \ln 2$ 일 때, $\frac{dy}{dx}$ 의 값은

$$\frac{1}{e^{\ln 2} + 4e^{-\ln 2}} = \frac{1}{2+4 \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

59) ③

[출제의도] 매개변수로 나타내어진 함수의 미분법 이해하기

$$\frac{dx}{dt} = 2t \ln t + t + 3$$

$$\frac{dy}{dt} = 6e^{t-1} + 6te^{t-1} = 6e^{t-1}(1+t)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{6e^{t-1}(1+t)}{2t \ln t + t + 3} \quad (2t \ln t + t + 3 \neq 0)$$

$$\text{따라서 } t=1 \text{ 일 때, } \frac{dy}{dx} = \frac{6 \times 2}{1+3} = \frac{12}{4} = 3$$

60) ⑤

[출제의도] 매개변수로 나타내어진 함수의 미분법을 이용하여 점의 좌표를 구한다.

$$\frac{dx}{dt} = \cos t + \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = -3\sin t + \cos t \text{ 이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-3\sin t + \cos t}{\cos t + \sin t} \quad (\text{단, } \cos t + \sin t \neq 0)$$

$\frac{dy}{dx} = 3$ 인 t 의 값을 α ($0 < \alpha < \pi$)라 하면

$$\cos \alpha = -3\sin \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ 이므로 } \sin^2 \alpha + 9\sin^2 \alpha = 1$$

$$\sin \alpha > 0 \text{ 이므로 } \sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}, \cos \alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$a = \sin \alpha - \cos \alpha = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

$$b = 3\cos \alpha + \sin \alpha = -\frac{4\sqrt{10}}{5}$$

$$\text{따라서 } a+b = -\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

61) ③

[출제의도] 미분법과 중간값의 정리를 이용하여 극값이 존재하는 구간을 구한다.

미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극값을 가지므로 $f'(a)=0$ 이어야 한다.

$$f(x) = e^{-x}(\ln x - 2) \text{ 이므로}$$

$$f'(x) = -e^{-x}(\ln x - 2) + e^{-x} \times \frac{1}{x} = e^{-x} \left(\frac{1}{x} - \ln x + 2 \right)$$

모든 실수 x 에 대하여 $e^{-x} > 0$ 이므로

$$g(x) = \frac{1}{x} - \ln x + 2 \text{ 라 하면 } g(a) = 0 \text{ 이어야 한다.}$$

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = -\frac{1+x}{x^2} < 0 \quad (\because x > 0)$$

이므로 함수 $g(x)$ 는 $x > 0$ 에서 연속이고 감소한다.

$$g(1) = 1 - \ln 1 + 2 = 3 > 0$$

$$g(e) = \frac{1}{e} - \ln e + 2 = \frac{1}{e} + 1 > 0$$

$$g(e^2) = \frac{1}{e^2} - \ln e^2 + 2 = \frac{1}{e^2} > 0$$

$$g(e^3) = \frac{1}{e^3} - \ln e^3 + 2 = \frac{1}{e^3} - 1 < 0$$

그러므로 중간값의 정리에 의하여 $g(c)=0$ 인 실수 c 가 열린 구간 (e^2, e^3) 에 오직 하나 존재한다.

따라서 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극값을 가질 때, a 가 속하는 구간은 (e^2, e^3) 이다.

62) 50

점 $(e, -e)$ 는 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(e)=-e$

$y=f(x)$ 위의 점 $(e, -e)$ 에서의 접선의 기울기를 $f'(e)=a$ 라 하자.

$y=g(x)$ 를 미분하면

$$g'(x) = f'(x) \cdot \ln x^4 + f(x) \cdot \frac{4}{x} \text{ 이고}$$

$y=g(x)$ 위의 점 $(e, -4e)$ 에서의 접선의 기울기

$$g'(e) = f'(e) \cdot \ln e^4 + f(e) \cdot \frac{4}{e} = 4a - 4$$

$x=e$ 에서 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 접선이 수직이므로

$$f'(e) \times g'(e) = -1$$

$$a(4a-4) = -1$$

$$4a^2 - 4a + 1 = 0$$

$$(2a-1)^2 = 0$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}$$

$$\therefore 100f'(e) = 100a = 50$$

63) ④

$y=3^x$ 에서 $y'=3^x \ln 3$ 이므로 곡선 $y=3^x$ 위의 점 P 에서의 접선의 방정식은

$$y-3^k = (3^k \ln 3)(x-k)$$

위 식에 $y=0$ 을 대입하면

$$-3^k = (3^k \ln 3)(x-k)$$

$$\therefore x = k - \frac{1}{\ln 3}$$

$$\therefore A(k - \frac{1}{\ln 3}, 0)$$

$y=a^{x-1}$ 에서 $y'=a^{x-1} \ln a$ 이므로 곡선 $y=a^{x-1}$ 위의 점 P 에서의 접선의 방정식은

$$y-a^{k-1} = (a^{k-1} \ln a)(x-k)$$

위 식에 $y=0$ 을 대입하면

$$-a^{k-1} = (a^{k-1} \ln a)(x-k)$$

$$\therefore x = k - \frac{1}{\ln a}$$

$$\therefore B(k - \frac{1}{\ln a}, 0)$$

이때, $\overline{AH} = 2\overline{BH}$ 이므로

$$\frac{1}{\ln 3} = \frac{2}{\ln a}, \quad \ln a = 2 \ln 3$$

$$\therefore a = 3^2 = 9$$

64) ③

[출제의도] 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식을 이용하여 문제를 해결한다.

$g(x)=a^x$ 에 대하여 $g'(x)=a^x \ln a$ 이므로

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $C(\frac{3}{2}, a^{\frac{3}{2}})$ 에서 이 곡선에 접하는 직선의

방정식은

$$y-a^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}} \ln a \left(x - \frac{3}{2} \right)$$

이 식에 $y=0$ 을 대입하면

$$-a^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}} \ln a \left(x - \frac{3}{2} \right)$$

$$x - \frac{3}{2} = -\frac{1}{\ln a}$$

$$x = \frac{3}{2} - \frac{1}{\ln a}$$

$$\text{따라서 점 D의 좌표는 } \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{\ln a}, 0 \right) \dots \textcircled{1}$$

조건에서 $\overline{AD} = \overline{BD}$ 이므로

점 D는 두 점 $A(0, 1), B(\frac{3}{2}, 1)$ 에 대하여 선분 AB의

수직이등분선과 x 축의 교점이다.

그러므로 점 D의 좌표는 $(\frac{3}{4}, 0)$ 이다.

$$\textcircled{1} \text{에서 } \frac{3}{2} - \frac{1}{\ln a} = \frac{3}{4} \text{ 이므로}$$

$$\frac{1}{\ln a} = \frac{3}{4}, \quad \ln a = \frac{4}{3}, \quad a = e^{\frac{4}{3}}$$

따라서 $g(x)=e^{\frac{4}{3}x}$ 이므로 $g(2)=e^{\frac{8}{3}}$ 이다.

[참고]

$A(0, 1), B(\frac{3}{2}, 1), D(\frac{3}{2} - \frac{1}{\ln a}, 0)$ 에 대하여

$$\overline{AD}^2 = \overline{BD}^2 \text{ 이므로}$$

$$\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{\ln a} \right)^2 + 1^2 = \left(\frac{1}{\ln a} \right)^2 + 1^2$$

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}$$

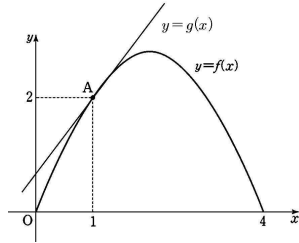
$$\frac{1}{\ln a} = \frac{3}{4}, \quad \ln a = \frac{4}{3}, \quad a = e^{\frac{4}{3}}$$

따라서 $g(x) = e^{\frac{4}{3}x}$ 이므로

$$g(2) = e^{\frac{8}{3}}$$

65) ③

$y = f(x)$ 가 위로 볼록한 함수이므로 닫힌 구간 $[0, 4]$ 에서 $f(x) \leq g(x)$ 를 만족하는 직선 $g(x)$ 는 $f(x)$ 의 $(1, 2)$ 에서의 접선이다.



$$f'(x) = \frac{2\sqrt{2}}{4} \pi \cos \frac{\pi}{4} x \text{ 이므로 } f'(1) = \frac{\pi}{2}$$

$$g(x) = \frac{\pi}{2}(x-1) + 2$$

$$\therefore g(3) = \pi + 2$$

66) ④

[출제의도] 지수함수의 미분을 활용하여 추론하기

함수 $g(x)$ 가 실수 전체에서 미분가능하므로 함수 $g(x)$ 는 실수 전체에서 연속이다.

$y = g(x)$ 가 $x = b$ 에서 연속이므로

$$g(b) = 0, \lim_{x \rightarrow b-} g(x) = 0, \lim_{x \rightarrow b+} g(x) = f(b) - a$$

$$\therefore f(b) - a = 0$$

함수 $g(x)$ 가 $x = b$ 에서 미분가능하므로

$$g'(b) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{g(b+h) - g(b)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{g(b+h) - g(b)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{g(b+h) - g(b)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\{f(b+h) - a\} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$$

$$= f'(b)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{g(b+h) - g(b)}{h} = 0$$

$$\therefore f'(b) = 0$$

$$f'(x) = e^{-2x+1} - 2xe^{-2x+1} = (1-2x)e^{-2x+1} \text{ 이므로}$$

$$f'(b) = (1-2b)e^{-2b+1} = 0 \therefore b = \frac{1}{2}$$

$$f(b) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \text{ 이므로 } a = \frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } ab = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

67) ③

[출제의도] 로그함수의 접선을 활용하여 문제해결하기

$$y = \ln x \text{를 } x \text{에 대하여 미분하면 } y' = \frac{1}{x}$$

점 $P(t, \ln t)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - \ln t = \frac{1}{t}(x - t)$$

$$\therefore r(t) = t - t \ln t$$

점 $Q(2t, \ln 2t)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - \ln 2t = \frac{1}{2t}(x - 2t)$$

$$\therefore s(t) = 2t - 2t \ln 2t$$

$$f(t) = r(t) - s(t) = (2 \ln 2 - 1)t + t \ln t$$

$$f'(t) = 2 \ln 2 + \ln t = 0 \text{에서 } t = \frac{1}{4}$$

함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면

t	(0)	...	$\frac{1}{4}$...
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$		\searrow	$-\frac{1}{4}$	\nearrow

따라서 극솟값은 $-\frac{1}{4}$

68) ⑤

[출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

함수 $f(x) = \sin x - x \cos x$ 라 하면

$$f'(x) = \cos x - (\cos x - x \sin x) = x \sin x$$

x	0	...	π	...	2π
$f'(x)$	0	+	0	-	0
$f(x)$	0	\nearrow	π	\searrow	-2π

방정식 $f(x) = k$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되려면 $0 \leq k < \pi$

따라서 정수 k 는 0, 1, 2, 3이므로 합은 6

69) ③

[출제의도] 도함수의 성질을 이해하여 함수가 감소하는 구간을 구한다.

함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 는

$$f'(x) = e^{x+1}(x^2 + 3x + 1) + e^{x+1}(2x + 3)$$

$$= e^{x+1}(x^2 + 5x + 4)$$

함수 $f(x)$ 가 감소하려면 $f'(x) < 0$

$$e^{x+1}(x^2 + 5x + 4) < 0 \text{에서}$$

$$e^{x+1} > 0 \text{이므로 } x^2 + 5x + 4 < 0$$

함수 $f(x)$ 는 $-4 < x < -1$ 에서 감소한다.

따라서 $b - a$ 의 최댓값은 3이다.

70) ②

[출제의도] 변곡점을 이해하여 접선의 기울기를 구한다.

$$y = (\ln x)^2 - x + 1 \text{에서}$$

$$y' = \frac{2 \ln x}{x} - 1, y'' = \frac{2 - 2 \ln x}{x^2}$$

$$2 - 2 \ln x = 0 \text{에서 } x = e \text{이고, } x = e \text{의 좌우에서 } y'' \text{의 부호가}$$

바뀌므로

곡선 $y = (\ln x)^2 - x + 1$ 은 $x = e$ 에서 변곡점 $(e, 2 - e)$ 를 갖는다.

따라서 변곡점에서의 접선의 기울기는

$$\frac{2 \ln e}{e} - 1 = \frac{2}{e} - 1$$

71) ④

[출제의도] 접선의 방정식을 이용하여 주어진 도형의 넓이가 최대가 되는 t 의 값을 구할 수 있는가?

$$y' = -2e^{-x} \text{이므로 점 } P \text{에서의 접선의 방정식은}$$

$$y - 2e^{-t} = -2e^{-t}(x - t)$$

$x = 0$ 을 대입하면

$$y = 2(1+t)e^{-t} \text{에서}$$

$$A(0, 2e^{-t}), B(0, 2(1+t)e^{-t})$$

$$\overline{AB} = 2te^{-t}$$

삼각형 APB의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = \frac{1}{2} \times 2te^{-t} \times t = t^2e^{-t}$$

$$S'(t) = 2te^{-t} - t^2e^{-t} = t(2-t)e^{-t}$$

$S(t)$ 는 $t = 2$ 일 때, 극대이면서 최대이므로 구하는 t 의 값은 2이다.

72) ③

[출제의도] 합성함수의 미분법을 이용하여 그래프와 직선이 만나는 점의 개수를 추론한다.

$$f(x) = x^2e^{-x+2} \text{에서}$$

$$f'(x) = (-x^2 + 2x)e^{-x+2}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

$$y = (f \circ f)(x) \text{에서 } \frac{dy}{dx} = f'(f(x))f'(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{인 } x \text{의 값을 구하면}$$

$$(i) f'(x) = 0 \text{에서 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

$$(ii) f'(f(x)) = 0 \text{에서}$$

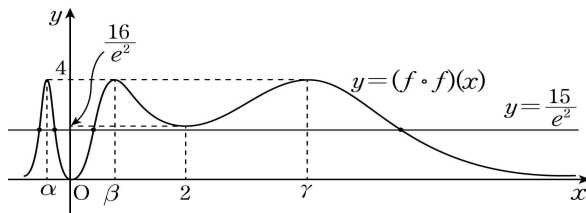
$$f(x) = 0 \text{일 때, } x = 0$$

$$f(x) = 2 \text{일 때, } x = \alpha \text{ 또는 } x = \beta \text{ 또는 } x = \gamma \ (\alpha < \beta < \gamma)$$

로 놓으면 함수 $y = (f \circ f)(x)$ 의 증가와 감소를 나타낸 표는 다음과 같다.

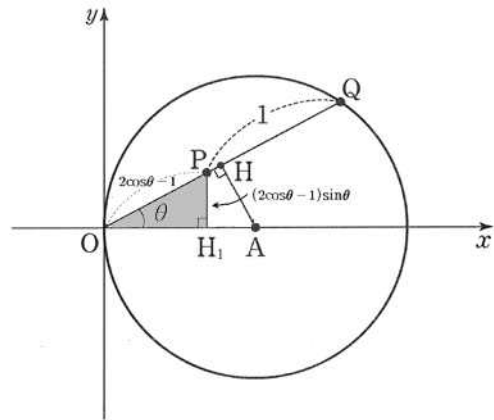
x	\cdots	α	\cdots	0	\cdots	β	\cdots	2	\cdots	γ	\cdots
$f'(x)$	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-
$f'(f(x))$	-	0	+	0	+	0	-	$-\frac{8}{e^2}$	-	0	+
$\frac{dy}{dx}$	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-
y	\nearrow	4	\searrow	0	\nearrow	4	\searrow	$\frac{16}{e^2}$	\nearrow	4	\searrow

위의 표를 이용하여 함수 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프를 나타내면 다음과 같다.



따라서 함수 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{15}{e^2}$ 가 만나는 점의 개수는 4이다.

73) 34



A에서 OQ에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$$\overline{OH} = \overline{OA} \cos \theta = \cos \theta$$

$$\overline{OQ} = 2\overline{OH} = 2\cos \theta$$

$$\therefore \overline{OP} = \overline{OQ} - \overline{PQ} = 2\cos \theta - 1$$

P에서 x축에 내린 수선의 발을 H_1 이라 하면

$$P \text{의 } y \text{좌표는 } f(\theta) = \overline{PH_1} = (2\cos \theta - 1)\sin \theta \text{이다.}$$

$$f'(\theta) = -2\sin^2 \theta + (2\cos \theta - 1)\cos \theta = 4\cos^2 \theta - \cos \theta - 2$$

따라서 $\cos \theta = \frac{1 + \sqrt{33}}{8}$ 일 때 $f(\theta)$ 는 극댓값을 가지며 최댓값이 된다.

74) ④

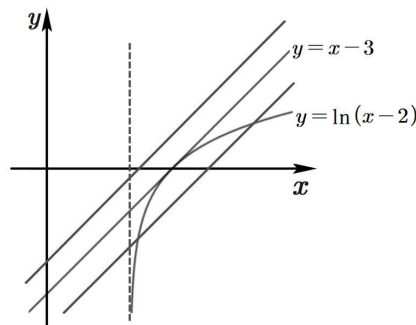
$x > 2$ 일 때

$f(x) = \ln(x-2)$ 와 $y = x+t$ 의 교점의 개수는 두 함수가 접할 때를 기준으로 달라진다.

$$f'(x) = \frac{1}{x-2} \text{에서 } f'(3) = 1 \text{이고 } f(3) = 0 \text{이므로}$$

$$f(x) = \ln(x-2) \text{는 } (3, 0) \text{에서 } y = x-3 \text{에 접한다.}$$

그래프를 이용하여 t 의 범위에 따른 $f(x) = \ln(x-2)$ 와 $y = x+t$ 와의 교점의 개수는



$t < -3$ 일 때 교점의 개수는 2개

$t = -3$ 일 때 교점의 개수는 1개

$t > -3$ 일 때 교점의 개수는 0개

임을 알 수 있다.

한편 $x \leq 2$ 일 때

$f(x) = x^2 + k$ 와 $y = x+t$ 의 교점의 개수는 두 함수가 접할 때를 기준으로 달라진다.

$$f'(x) = 2x \text{에서 } f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \text{이고 } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + k \text{이므로}$$

$$f(x) = x^2 + k \text{는 } \left(\frac{1}{2}, k + \frac{1}{4}\right) \text{에서 } y = x + k - \frac{1}{4} \text{에 접한다.}$$

또한 $(2, k+4)$ 를 지나고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$y = x + k + 2$ 이므로

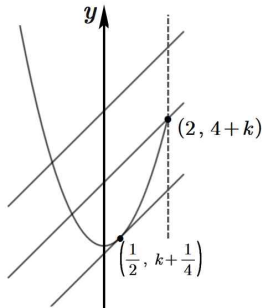
그래프를 이용하여 t 의 범위에 따른 $y = f(x)$ 와 $y = x + t$ 의 교점의 개수는

$t < k - \frac{1}{4}$ 일 때 교점의 개수는 0개

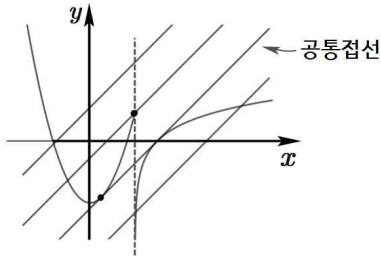
$t = k - \frac{1}{4}$ 일 때 교점의 개수는 1개

$k - \frac{1}{4} < t \leq k + 2$ 일 때 교점의 개수는 2개

$t > k + 2$ 일 때 교점의 개수는 1개임을 알 수 있다.



위의 결과를 이용하면 $g(t)$ 가 한 점에서만 불연속이 되기 위한 그래프의 개형은 아래와 같음을 알 수 있다.



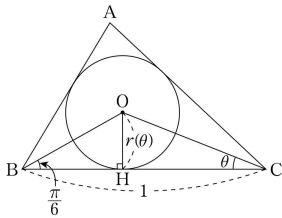
$$g(t) = \begin{cases} 2 & (t \leq -\frac{3}{4}) \\ 1 & (t > -\frac{3}{4}) \end{cases} \text{이므로}$$

$t = -\frac{3}{4}$ 일 때 $g(t)$ 가 불연속이 되고

$y = x + k - \frac{1}{4} = x - 3$ 에서 $k = -\frac{11}{4}$ 이다.

75) ②

[출제의도] 뮈의 미분법을 이해하여 주어진 함수의 미분계수를 구한다.



삼각형 ABC에 내접하는 원의 중심을 O라 하고, 점 O에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

점 O는 삼각형 ABC의 내심이므로

$$\angle OBH = \frac{\pi}{6}, \angle OCH = \theta$$

$$\frac{\overline{OH}}{\overline{BH}} = \tan \frac{\pi}{6} \text{에서 } \frac{r(\theta)}{\overline{BH}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{이므로 } \overline{BH} = \sqrt{3}r(\theta)$$

$$\frac{\overline{OH}}{\overline{CH}} = \tan \theta \text{에서 } \frac{r(\theta)}{\overline{CH}} = \tan \theta \text{이므로 } \overline{CH} = \frac{r(\theta)}{\tan \theta}$$

$$\overline{BH} + \overline{HC} = \overline{BC} \text{이므로}$$

$$\sqrt{3}r(\theta) + \frac{r(\theta)}{\tan \theta} = 1, r(\theta) = \frac{\tan \theta}{1 + \sqrt{3} \tan \theta}$$

$$h(\theta) = \frac{r(\theta)}{\tan \theta} \text{이므로 } h(\theta) = \frac{1}{1 + \sqrt{3} \tan \theta}$$

$h(\theta)$ 를 θ 에 대하여 미분하면

$$h'(\theta) = -\frac{\sqrt{3} \sec^2 \theta}{(1 + \sqrt{3} \tan \theta)^2}$$

$$\text{따라서 } h'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3} \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}{\left(1 + \sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

76) ②

[출제의도] 여러 가지 미분법을 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

$$f(e) = k, f'(e) = e \text{이므로 } g(k) = e, g'(k) = \frac{1}{e}$$

모든 실수 x 에 대하여 $g'(x) \leq g'(k) = \frac{1}{e}$ 이므로

모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq f'(e) = e$

$$f'(x) = 2x \ln x + x + 2ax + b = 2x \ln x + (2a + 1)x + b \cdots \text{㉠}$$

$$f''(x) = 2 \ln x + 3 + 2a$$

$f'(x)$ 는 미분가능한 함수이고 $x = e$ 에서 최솟값을 가지므로

$$f''(e) = 5 + 2a = 0 \text{에서 } a = -\frac{5}{2} \text{이다.}$$

$$\text{㉠에서 } f'(e) = 2e - 4e + b = e \text{이므로 } b = 3e$$

$$f(x) = x^2 \ln x - \frac{5}{2}x^2 + 3ex \text{이고 } f(e) = k \text{이므로}$$

$$f(e) = \frac{3}{2}e^2 = k \text{ 따라서}$$

$$f\left(\frac{2}{3}k\right) = f(e^2) = 2e^4 - \frac{5}{2}e^4 + 3e^3 = -\frac{1}{2}e^4 + 3e^3$$

77) ④

[출제의도] 여러 가지 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

$$g(x) = \frac{f(x) \cos x}{e^x} \text{의 양변에 자연로그를 취하면}$$

$$\ln |g(x)| = \ln |f(x)| + \ln |\cos x| - \ln e^x$$

$$= \ln |f(x)| + \ln |\cos x| - x$$

위 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{-\sin x}{\cos x} - 1$$

위 등식에 $x = \pi$ 를 대입하면

$$\frac{g'(\pi)}{g(\pi)} = \frac{f'(\pi)}{f(\pi)} + \frac{-\sin \pi}{\cos \pi} - 1 \text{이고,}$$

$$\frac{g'(\pi)}{g(\pi)} = e^\pi \text{이므로}$$

$$\frac{f'(\pi)}{f(\pi)} = e^\pi + 1$$

78) 2

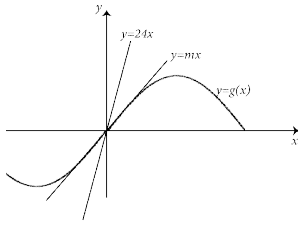
$$f'(x) = 3k \cos kx + 12x^2$$

$$f''(x) = -3k^2 \sin kx + 24x$$

함수 $f(x)$ 의 변곡점이 오직 하나 존재하므로

$f''(x)$ 의 부호가 변하는 지점은 하나이다.

이때 두 함수 $g(x) = 3k^2 \sin kx$ 와 $h(x) = 24x$ 의 위치관계를 보면



$h(0)=g(0)$ 이고, $h(x)-g(x)$ 는 $x=0$ 에서 부호가 변하므로 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 변곡점을 갖고, 그 이외의 변곡점은 존재하지 않는다. 따라서 $x \geq 0$ 일 때, $f''(x)=h(x)-g(x) \geq 0$ 이고, $x \leq 0$ 일 때, $f''(x) \leq 0$ 이다. (1)
 $y=g(x)$ 의 $x=0$ 에서의 접선이 $y=mx$ 일 때, 조건 (1)을 만족하려면 $24 \geq m$ 이다.
 $m=g'(0)=3k^3$ 이므로 $24 \geq 3k^3$ 에서 $k \leq 2$ 이다.
 k 의 최댓값은 2

79) ①

두 곡선의 교점의 x 좌표를 p 라고 하자.
두 곡선이 점 p 에서 만나므로, $ke^p+1=p^2-3p+4 \cdots (\neg)$ 이고 p 에서 접하는 두 직선이 수직이므로 기울기의 곱이 -1 이다.
 $ke^p \times (2p-3) = -1 \cdots (\neg)$
 (\neg) 식을 k 에 관하여 변형하면 $k = \frac{p^2-3p+3}{e^p}$ 이고,
 (\neg) 식을 k 에 관하여 변형하면 $k = \frac{-1}{e^p(2p-3)}$ 이다.
 $\frac{p^2-3p+3}{e^p} = \frac{-1}{e^p(2p-3)} \Rightarrow 2p^3-9p^2+15p-8=0$ 이 성립한다.
따라서 $p=1$ 이므로 $k = \frac{1}{e}$

80) 5

[출제의도] 합성함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

$g\left(\frac{x+8}{10}\right) = f^{-1}(x)$ 에서
 $f\left(g\left(\frac{x+8}{10}\right)\right) = x$
양변을 x 에 대하여 미분하면
 $f'\left(g\left(\frac{x+8}{10}\right)\right) \times g'\left(\frac{x+8}{10}\right) \times \frac{1}{10} = 1$
이 식에 $x=2$ 를 대입하면
 $f'(g(1)) \times g'(1) = 10$
 $f'(0) \times g'(1) = 10$
한편, $f'(x) = 2xe^{-x} - (x^2+2)e^{-x} = (2x-x^2-2)e^{-x}$
이므로 $f'(0) = -2$
따라서 $(-2) \times g'(1) = 10$ 에서
 $g'(1) = -5$
즉 $|g'(1)| = |-5| = 5$

81) ④

[출제의도] 합성함수 미분법을 이용하여 함수를 추론한다.

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하므로 $x=0$ 에서 연속이다. 조건 (가)에서
 $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (axe^{2x} + bx^2) = 0$
조건 (나)에서 임의의 $x_1 (x_1 < 0)$ 에 대하여

$$f'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \lim_{x \rightarrow x_1} 3 = 3$$

이므로 $x < 0$ 일 때 $f'(x) = 3$ 이고

$$f(x) = \int 3dx = 3x + C \quad (C \text{는 적분상수})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = C = f(0) = 0 \text{ 이므로}$$

$$x < 0 \text{ 일 때 } f(x) = 3x$$

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{axe^{2x} + bx^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} (ae^{2x} + bx) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{3x}{x} = 3$$

이므로 $a = 3$ 이다.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3e}{2} + \frac{b}{4} = 2e \text{에서 } b = 2e \text{ 이므로}$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x & (x \leq 0) \\ 3xe^{2x} + 2ex^2 & (x > 0) \end{cases} \text{ 이고}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & (x \leq 0) \\ 3e^{2x} + 6xe^{2x} + 4ex & (x > 0) \end{cases}$$

$$\text{이므로 } f'\left(\frac{1}{2}\right) = 3e + 3e + 2e = 8e$$

82) ④

[출제의도] 두 접선이 이루는 예각의 크기 θ 에 대하여 $\tan \theta$ 의 값을 구할 수 있는가?

곡선 $y = e^{|x|}$ 는 y 축에 대하여 대칭이다.

$x \geq 0$ 일 때 $y = e^x$ 이고 접점을 (t, e^t) 이라 하면 $y' = e^x$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - e^t = e^t(x - t)$$

이 접선이 원점을 지나므로

$$-e^t = e^t(-t), \quad t = 1$$

따라서 접선의 기울기는 e 이고 이 접선과 y 축에 대하여 대칭인 접선의 기울기는 $-e$ 이다.

$$\tan \theta = \frac{-e - e}{1 + (-e) \times e} = \frac{-2e}{1 - e^2} = \frac{2e}{e^2 - 1}$$

83) ④

[출제의도] 방정식의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3일 조건을 구할 수 있는가?

$$e^x = k \sin x \text{에서 } \frac{1}{k} = \frac{\sin x}{e^x} \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \text{이므로}$$

$$h(x) = \frac{\sin x}{e^x} \text{라 하면}$$

$$h'(x) = \frac{e^x \cos x - e^x \sin x}{e^{2x}} = \frac{\cos x - \sin x}{e^x}$$

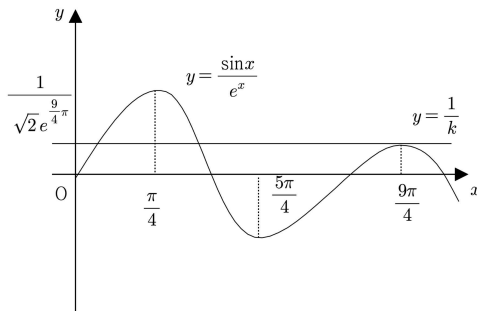
따라서 $x > 0$ 에서 $h'(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값은

$$x = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi, \dots$$

이므로 함수 $y = h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	...	$\frac{\pi}{4}$...	$\frac{5}{4}\pi$...
$h'(x)$	1	+	0	-	0	+
$h(x)$	0	\nearrow	$\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}$	\searrow	$-\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{5}{4}\pi}}$	\nearrow

x	...	$\frac{9\pi}{4}$...	$\frac{13}{4}\pi$...
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	\nearrow	$\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{9\pi}{4}}}$	\searrow	$-\frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{13}{4}\pi}}$	\nearrow



이때 ㉠의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3이기 위해서는 그림과 같이

직선 $y = \frac{1}{k}$ 이 $x = \frac{9}{4}\pi$ 에서 곡선 $y = \frac{\sin x}{e^x}$ 와 접해야 하므로

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}}$$

따라서

$$k = \sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}$$

84) 17

[출제의도] 여러 가지 함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

$$f'(x) = \frac{2t \ln x}{x} - 2x = \frac{2t \ln x - 2x^2}{x}$$

이고 $f(x)$ 는 $x = k$ 에서 극대이므로

$$2t \ln k - 2k^2 = 0$$

$$t \ln k = k^2$$

이때 실수 k 의 값을 $g(t)$ 라 했으므로

$$t \ln g(t) = \{g(t)\}^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

그런데 $g(\alpha) = e^2$ 이므로

㉠에 $t = \alpha$ 를 대입하면

$$\alpha \ln g(\alpha) = \{g(\alpha)\}^2$$

$$2\alpha = e^4, \quad \alpha = \frac{e^4}{2}$$

또한, ㉠의 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$\ln g(t) + t \times \frac{g'(t)}{g(t)} = 2g(t) \times g'(t)$$

이 식에 $t = \alpha$ 를 대입하면

$$\ln g(\alpha) + \alpha \times \frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)} = 2g(\alpha) \times g'(\alpha)$$

$$2 + \frac{e^4}{2} \times \frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)} = 2e^2 \times g'(\alpha)$$

$$\frac{3}{2}e^2 \times g'(\alpha) = 2$$

$$g'(\alpha) = \frac{4}{3e^2}$$

$$\alpha \times \{g'(\alpha)\}^2 = \frac{e^4}{2} \times \frac{16}{9e^4} = \frac{8}{9}$$

따라서 $p = 9$, $q = 8$ 이므로

$$p + q = 17$$

85) ㉠

[출제의도] 접선의 방정식 이해하기

함수 $f(x) = xe^{-2x}$ 이라 하면

$$f'(x) = (1-2x)e^{-2x}$$

$$f''(x) = (4x-4)e^{-2x} = 0 \text{에서 } x = 1$$

$x < 1$ 에서 $f''(x) < 0$ 이고,

$x > 1$ 에서 $f''(x) > 0$ 이다.

$x = 1$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로

변곡점 A의 좌표는 $(1, e^{-2})$

$$f'(1) = -e^{-2} \text{이므로}$$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점 A에서의 접선의 방정식은

$$y - e^{-2} = -e^{-2}(x - 1)$$

$$y = -e^{-2}(x - 2)$$

그러므로 점 B의 좌표는 $(2, 0)$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times e^{-2} = e^{-2}$$

86) 24

[출제의도] 함수의 극대, 극소 및 함수의 그래프의 개형을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

$$g(x) = \{f(x) + 2\}e^{f(x)} \text{이므로 } g'(x) = f'(x)\{f(x) + 3\}e^{f(x)}$$

$$g'(x) = 0 \text{에서 } f'(x) = 0 \text{ 또는 } f(x) + 3 = 0$$

$f(x)$ 가 이차함수이므로 조건 (가), (나)에서 의해

$$f'(a) = 0, \quad f(a) = 6$$

$$f(b) + 3 = 0, \quad f(b+6) + 3 = 0 \text{이어야 한다.}$$

이차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수를 p 라 하면

$$f(b) + 3 = 0, \quad f(b+6) + 3 = 0 \text{이므로}$$

$$f(x) + 3 = p(x-b)(x-b-6)$$

$$\text{즉, } f(x) = p(x-b)(x-b-6) - 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{이 때, } f'(a) = 0 \text{이므로 } \frac{b + (b+6)}{2} = a$$

$$b = a - 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡에서

$$f(x) = p(x-a+3)(x-a-3) - 3$$

이므로

$$f(a) = -9p - 3 = 6 \text{에서 } p = -1$$

방정식 $f(x) = 0$ 에서

$$-(x-a+3)(x-a-3) - 3 = 0$$

$$(x-a)^2 - 6 = 0, \quad x = \pm\sqrt{6}$$

따라서

$$(\alpha - \beta)^2 = \{(a + \sqrt{6}) - (a - \sqrt{6})\}^2 = 24$$

87) ㉡

[출제의도] 합성함수의 미분법을 이용하여 극소가 되는 x 의 개수를 구할 수 있는가?

$$g(x) = 3f(x) + 4\cos f(x) \text{이므로,}$$

$$g'(x) = 3f'(x) - 4f'(x)\sin f(x)$$

$$= f'(x)\{3 - 4\sin f(x)\}$$

$$= 12\pi(x-1)\{3 - 4\sin(6\pi(x-1)^2)\}$$

이므로, $g'(x) = 0$ 에서

$$x = 1 \text{ 또는 } \sin(6\pi(x-1)^2) = \frac{3}{4}$$

(i) $x = 1$ 일 때,

$x = 1$ 일 때, $\sin(6\pi(x-1)^2) = 0$ 이므로,

$x = 1$ 부근에서 $3 - 4\sin(6\pi(x-1)^2) > 0$ 이다.

이 때, $x - 1$ 은 $x = 1$ 의 좌우에서 음에서 양으로 변화하므로,

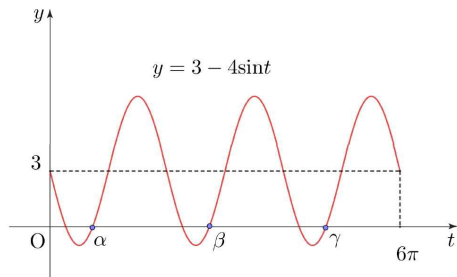
$g'(x) = 12\pi(x-1)\{3 - 4\sin(6\pi(x-1)^2)\}$ 도 $x = 1$ 의 좌우에서 음에서 양으로 변한다. 따라서 함수 $g(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극소이다.

(ii) $1 < x < 2$ 일 때,

$12\pi(x-1) > 0$ 이고, 함수 $f(x)$ 는 구간 $[1, 2]$ 에서 0에서 6π 까지 증가한다. 즉, $f(x) = t$ 라 하면 x 의 값이 1에서 2까지 증가할 때, t 의 값은 0에서 6π 까지 증가한다.

이 때, 함수 $y = 3 - 4\sin t$ 의 그래프는 다음과 같으므로,

$t = \alpha, \beta, \gamma$ 의 좌우에서 $y = 3 - 4\sin t$ 의 값은 음에서 양으로 변한다.



따라서 $f(x) = \alpha, \beta, \gamma$ 인 x 의 좌우에서 $y = 3 - 4\sin f(x)$ 의 값은 음에서 양으로 변하고, 이러한 x 는 세 수 α, β, γ 에 대하여 각각 하나씩 존재한다.

따라서 함수 $g(x)$ 는 $1 < x < 2$ 에서 극소가 되는 x 의 개수는 3이다.

(iii) $0 < x < 1$ 일 때,

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $x = 1$ 에 대하여 대칭이다.

즉, 모든 실수 x 에 대하여

$$f(1-x) = f(1+x) \text{ 가 성립한다.}$$

$$\text{이 때, } g(1-x) = 3f(1-x) + 4\cos f(1-x)$$

$$= 3f(1+x) + 4\cos f(1+x)$$

$$= g(1+x)$$

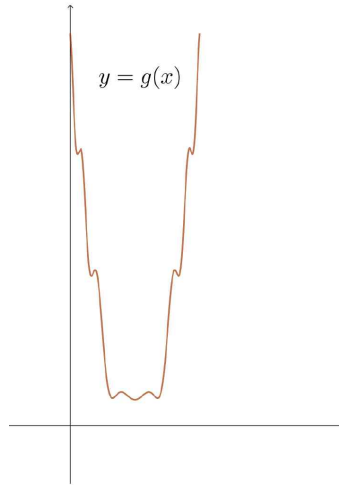
이므로, 함수 $y = g(x)$ 의 그래프도 직선 $x = 1$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 (ii)와 같이 $0 < x < 1$ 에서 함수 $g(x)$ 는 극소가 되는 x 의 개수도 3이다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 x 의 개수는 $1+3+3 = 7$ 이다.

[참고]

$0 < x < 2$ 에서 함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



88) ⑤

[출제의도] 미분과 주어진 조건을 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

함수 $f(x)$ 는 최고차항이 양수인 삼차함수이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 x 축은 적어도 한 점에서 만난다.

조건 (가)에서 함수 $g(x)$ 가 $x \neq 1$ 인 모든 실수 x 에서 연속이므로

$$\begin{cases} x = 1 \text{ 일 때, } f(1) = 0 \\ x \neq 1 \text{ 일 때, } f(x) \neq 0 \end{cases} \dots\dots \textcircled{1}$$

한편,

$$g(x) = \begin{cases} \ln |f(x)| & (f(x) \neq 0) \\ 1 & (f(x) = 0) \end{cases}$$

이므로

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad (f(x) \neq 0)$$

이때, 조건 (나)에서 함수 $g(x)$ 가 $x = 2$ 에서 극값을 가지고 ①을 만족해야 하므로

$$f'(2) = 0 \dots\dots \textcircled{2}$$

한편, 조건 (다)에서 주어진 방정식

$$g(x) = 0$$

은

$$\ln |f(x)| = 0$$

$$|f(x)| = 1$$

$$f(x) = -1 \text{ 또는 } f(x) = 1$$

이때, 이 방정식이 서로 다른 세 실근을 갖고 ①을 만족하려면 함수

$y = f(x)$ 는 극값을 가져야 한다.

한편, ②으로부터 함수 $f(x)$ 는 $x = 2$ 에서 극값을 가지므로

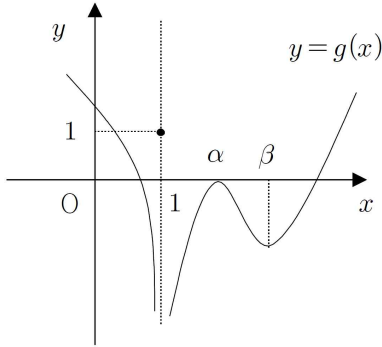
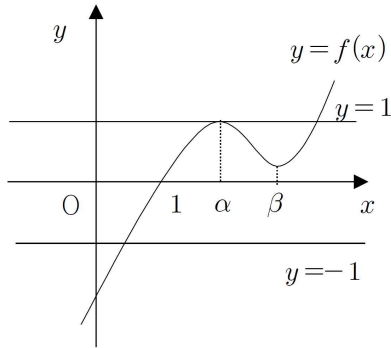
$$f'(\alpha) = f'(\beta) = 0 \quad (1 < \alpha < \beta)$$

로 놓을 수 있다.

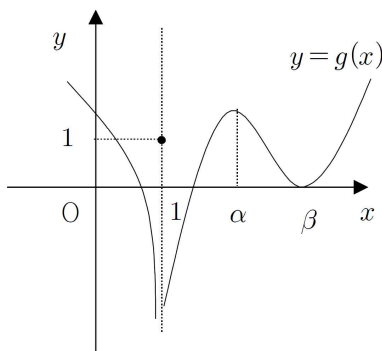
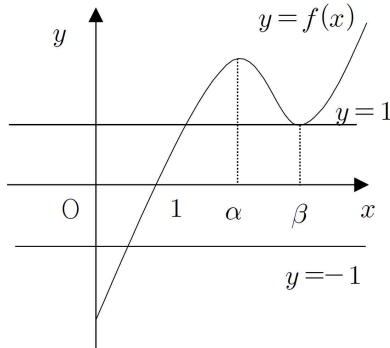
이때, $\alpha = 2$ 이거나 $\beta = 2$ 이다.

이때, 조건 (다)를 만족시키는 함수 $f(x)$ 의 그래프와 $g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.

(i)



(ii)



이때, 조건 (나)로부터 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 극대이고 $|g(x)|$ 가 $x=2$ 에서 극소이기 위해서는 그림 (i)과 같아야 하고
 $\alpha=2$

이때, 함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$f(x)-1=\frac{1}{2}(x-2)^2(x-k) \quad (k \text{는 상수})$$

즉, $f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2(x-k)+1$ 이고 ㉠에서 $f(1)=0$ 이므로

$$f(1)=\frac{1}{2}(1-k)+1=0$$

$$1-k=-2$$

$$k=3$$

이때,

$$f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2(x-3)+1 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-2)(x-3) + \frac{1}{2}(x-2)^2 \\ &= \frac{1}{2}(x-2)\{(2x-6)+(x-2)\} \\ &= \frac{1}{2}(x-2)(3x-8) \end{aligned}$$

이때, $f'(x)=0$ 에서

$$x=2 \text{ 또는 } x=\frac{8}{3}$$

$$\text{그러므로 } \beta=\frac{8}{3}$$

따라서 함수 $g(x)$ 는 $x=\frac{8}{3}$ 에서 극솟값을 갖고 그 값은

$$\ln \left| f\left(\frac{8}{3}\right) \right| = \ln \left| \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 \right| = \ln \frac{25}{27}$$

89) ⑤

두 점 P, Q의 시각 t 에서의 속도를 각각 v_P, v_Q 라 하면

$$v_P = \frac{dx_P}{dt} = 2t - a$$

$$v_Q = \frac{dx_Q}{dt} = \frac{2t-1}{t^2-t+1}$$

두 점 P, Q가 움직이는 방향이 서로 반대 방향이 되려면

$v_P v_Q < 0$ 이어야 한다.

$$v_P v_Q = \frac{(2t-a)(2t-1)}{t^2-t+1} < 0$$

$$\therefore (2t-a)(2t-1) < 0 \dots \text{㉠} \quad (\because t^2-t+1 > 0)$$

$$\text{㉠의 해가 } \frac{1}{2} < t < 2 \text{ 이므로 } \frac{a}{2} = 2$$

$$\therefore a = 4$$

90) 40

[출제외도] 가속도를 활용하여 문제해결하기

$$x'(t) = 1 - \frac{40}{\pi} \sin(2\pi t)$$

$$x''(t) = -80 \cos(2\pi t)$$

따라서 시각 $t = \frac{1}{3}$ 에서의 점 P의 가속도의 크기는

$$\left| x''\left(\frac{1}{3}\right) \right| = \left| -80 \cos \frac{2\pi}{3} \right| = 40$$

91) 40

[출제외도] 평면운동에서 속도와 속력에 관한 문항을 해결할 수 있다.

점 P에서의 속도 $\vec{v} = (-8\sin t, -4\cos t)$ 이므로

점 P의 속력은

$$\sqrt{(-8\sin t)^2 + (-4\cos t)^2} = \sqrt{64\sin^2 t + 16\cos^2 t}$$

$$t = \frac{\pi}{4} \text{ 이면 } k = \sqrt{32+8} = \sqrt{40} \text{ 이므로}$$

$$k^2 = 40$$

92) ③

[출제의도] 좌표평면 위의 움직이는 점의 속력을 구할 수 있는가?

$$\frac{dx}{dt} = 1 + \frac{2}{t^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = 2 - \frac{1}{t^2}$$

이므로 시각 $t = 1$ 에서의 점 P의 속도는 $(3, 1)$

따라서 시각 $t = 1$ 에서의 점 P의 속력은

$$\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

93) ⑤

[출제의도] 좌표평면 위의 점의 운동 상태와 관련된 문제를 해결한다.

점 P의 속력이 매초 1이므로 t 초 후 호 AP의 길이가 t 이고 따라서 선분 OP가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 t 이다. 따라서 직선 OP의 방정식은 $y = (\tan t)x$ 이고, 점 Q는 두 직선 $y = -x + 1$ 과 $y = (\tan t)x$ 의 교점이므로 시각 t 에서의 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{1}{1 + \tan t}, \frac{\tan t}{1 + \tan t} \right) \text{이다.}$$

따라서 점 Q의 속도는

$$\left(-\frac{\sec^2 t}{(1 + \tan t)^2}, \frac{\sec^2 t}{(1 + \tan t)^2} \right) \text{이다.}$$

점 P의 x 좌표가 $\frac{4}{5}$ 일 때, 점 P는 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점이므로 그

좌표는 $P\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ 이다.

따라서 점 P의 x 좌표가 $\frac{4}{5}$ 일 때의 시각을 t_1 이라 하면

$$\tan t_1 = \frac{3}{4} \text{ 이므로 } \sec^2 t_1 = \frac{25}{16}$$

이때 점 Q의 속도는

$$\left(-\frac{\frac{25}{16}}{\left(\frac{7}{4}\right)^2}, \frac{\frac{25}{16}}{\left(\frac{7}{4}\right)^2} \right) = \left(-\frac{25}{49}, \frac{25}{49} \right) \text{이므로}$$

$$b - a = \frac{25}{49} - \left(-\frac{25}{49} \right) = \frac{50}{49}$$

94) ④

$$\frac{dx}{dy} = 3 - \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = \sin t$$

$$\vec{v} = (3 - \cos t, \sin t)$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(3 - \cos t)^2 + \sin^2 t}$$

$$= \sqrt{9 - 6\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}$$

$$= \sqrt{10 - 6\cos t}$$

$$-1 \leq \cos t \leq 1 \text{ 이므로}$$

$$M = \sqrt{10 - 6 \times (-1)} = 4$$

$$m = \sqrt{10 - 6 \times (1)} = 2$$

$$\therefore M + m = 6$$

95) 4

[출제의도] 좌표평면 위의 운동에서의 가속도의 크기를 구할 수 있는가?

$$\frac{dx}{dt} = 4 \sin 4t, \quad \frac{dy}{dt} = \cos 4t \text{ 이므로}$$

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = 16 \sin^2 4t + \cos^2 4t = 15 \sin^2 4t + 1$$

따라서 점 P의 속력은 $\sqrt{15 \sin^2 4t + 1}$ 이므로 속력이 최대가 되기 위해서는 $\sin^2 4t = 1$ 즉, $\cos^2 4t = 0$

또한,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 16 \cos 4t, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -4 \sin 4t \text{ 이므로}$$

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2} \right)^2 = 256 \cos^2 4t + 16 \sin^2 4t$$

따라서 점 P의 가속도의 크기는

$$\sqrt{256 \times 0 + 16 \times 1} = 4$$

96) ⑤

[출제의도] 평면 위의 운동에서의 속력의 최솟값을 구할 수 있는가?

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{t+1}}, \quad \frac{dy}{dt} = 1 - \frac{1}{t+1} \text{ 이므로}$$

시각 t 에서의 점 P의 속력 $|v(t)|$ 는

$$|v(t)| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{t+1}} \right)^2 + \left(1 - \frac{1}{t+1} \right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{t+1} + 1}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}}$$

따라서 $t = 1$ 일 때 점 P의 속력의 최솟값은

$$\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

97) ⑤

[출제의도] 좌표평면에서 점의 운동을 이해한다.

$$x = 2t + \sin t, \quad y = 1 - \cos t \text{ 에서}$$

$$\frac{dx}{dt} = 2 + \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = \sin t$$

$$\text{시각 } t = \frac{\pi}{3} \text{ 에서 속도 } \vec{v} \text{ 는 } \vec{v} = \left(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

따라서 시각 $t = \frac{\pi}{3}$ 에서 점 P의 속력 $|\vec{v}|$ 은

$$|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{5}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} = \sqrt{\frac{25+3}{4}} = \sqrt{7}$$

98) ③

[출제의도] 좌표평면에서 속력의 최댓값을 구할 수 있는가?

점 P의 시각 t ($0 < t < \frac{\pi}{2}$)에서의 위치 (x, y) 가

$$x = t + \sin t \cos t, \quad y = \tan t$$

이므로 P의 시각 t 에서의 속도 $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$ 는

$$\frac{dx}{dt} = 1 + \cos^2 t - \sin^2 t = 2 \cos^2 t$$

$$\frac{dy}{dt} = \sec^2 t$$

P의 시각 t 에서의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} = \sqrt{(2 \cos^2 t)^2 + (\sec^2 t)^2} = \sqrt{4 \cos^4 t + \sec^4 t}$$

이때, $4 \cos^4 t > 0$, $\sec^4 t > 0$ 이므로

$$4 \cos^4 t + \sec^4 t \geq 2 \sqrt{4 \cos^4 t \times \sec^4 t}$$

$$= 2 \sqrt{4 \cos^4 t \times \frac{1}{\cos^4 t}}$$

$$= 4$$

(단, 등호는 $4 \cos^4 t = \sec^4 t$ 일 때 성립한다.)

따라서 P의 시각 t 에서의 속력의 최댓값은 $\sqrt{4} = 2$ 이다.

99) 13

시간 t 에서의 속도는

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \left(3 + 2\sin\pi t, \frac{6}{t} - 2\cos\pi t\right) \text{이므로}$$

따라서 시간 $t = \frac{1}{2}$ 에서의 속력은

$$\sqrt{(3+2)^2 + (12-0)^2} = 13$$

100) ④

[출제의도] 미분법을 이용하여 평면 위를 움직이는 점의 속력을 구한다.

$$\frac{dx}{dt} = \ln t + 1, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{4\ln t - 4}{(\ln t)^2} \text{이므로}$$

시간 t 에서의 점 P 의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \frac{\sqrt{(\ln t + 1)^2 + \{4\ln t - 4\}^2}}{(\ln t)^2}$$

따라서 시간 $t = e^2$ 에서 점 P 의 속력은

$$\frac{\sqrt{(\ln e^2 + 1)^2 + \{4\ln e^2 - 4\}^2}}{(\ln e^2)^2} = \frac{\sqrt{3^2 + 1^2}}{4} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

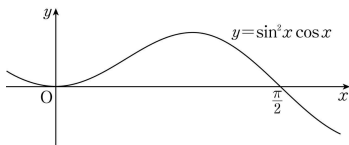
101) ②

[출제의도] 부분적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

$$\begin{aligned} & \int_1^e \ln \frac{x}{e} dx \\ &= \int_1^e (\ln x - 1) dx \\ &= \int_1^e \ln x dx - \int_1^e 1 dx \\ &= \left[x \ln x - x \right]_1^e - \left[x \right]_1^e \\ &= 2 - e \end{aligned}$$

102) ②

[출제의도] 정적분의 치환적분법을 이해하여 곡선과 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.



$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 $\sin^2 x \cos x = 0$ 의 해를 구하면

$$x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{\pi}{2}$$

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 일 때 $\sin^2 x \cos x \geq 0$ 이므로 구하는 넓이는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin^2 x \cos x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$$

$\sin x = t$ 로 놓고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\cos x = \frac{dt}{dx}$$

$$x = 0 \text{ 이면 } t = 0 \text{ 이고, } x = \frac{\pi}{2} \text{ 이면 } t = 1$$

따라서

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

103) 12

[출제의도] 여러 가지 함수의 정적분을 활용하여 문제해결하기

$$\int_0^1 t f(t) dt = a \text{ 라 하면 } f(x) = e^x + a$$

$$a = \int_0^1 t(e^t + a) dt \text{ 에서}$$

$$u'(t) = e^t + a, \quad v(t) = t \text{ 라 하면}$$

$$u(t) = e^t + at, \quad v'(t) = 1 \text{ 이므로}$$

$$a = \int_0^1 t(e^t + a) dt = [t(e^t + at)]_0^1 - \int_0^1 (e^t + at) dt$$

$$= e + a - \left[e^t + \frac{1}{2} at^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} a + 1$$

$$a = 2 \text{ 이므로 } f(x) = e^x + 2$$

$$\text{따라서 } f(\ln 10) = 12$$

104) ④

[출제의도] 이해능력-적분법

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = f'(-x) = \ln |x|$$

$$\text{이므로 } f'(x) = \ln |-x| = \ln |x|$$

양변을 x 에 대하여 적분하면

$$f(x) = \int \ln |x| dx = x \ln |x| - \int \left(x \times \frac{1}{x}\right) dx$$

$$= x \ln |x| - x + C \text{ (단, } C \text{는 적분상수)}$$

이므로

$$f(1) = 1 \ln 1 - 1 + C = -1 + C = e - 1 \text{ 에서 } C = e$$

$$\text{따라서 } f(x) = x \ln |x| - x + e \text{ 이므로}$$

$$f(e) = e \ln e - e + e = e$$

105) ③

$$y = |\sin 2x| \text{ 은 } x = \frac{\pi}{2}, \pi \text{에서 근을 갖는다.}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x + 1) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\sin 2x + 1) dx + \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin 2x + 1) dx$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin 2x + 1) dx$$

$$= 4 \left[-\frac{1}{2} \cos 2x + x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 4 \left(-\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{1}{2} \right) \right) = \pi + 2$$

$$\text{따라서 } y = |\sin 2x| + 1 \text{ 과 } x \text{ 축 및 두 직선 } x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{5\pi}{4} \text{로}$$

둘러싸인 부분의 넓이는 $\pi + 2$ 이다.

106) ②

$$\int_1^{\sqrt{2}} x^3 \sqrt{x^2 - 1} dx \text{에서 } \sqrt{x^2 - 1} = t \text{ 라 하자.}$$

양변을 x 에 대해 미분하면

$$\frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{dt}{dx} \text{ 이고}$$

$$x^2 = t^2 + 1 \text{ 이므로}$$

$$\int_0^1 (t^2 + 1)t^2 dt = \int_0^1 (t^4 + t^2) dt = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{8}{15}$$

107) ①

[출제의도] 분수함수의 정적분 이해하기

$$\int_3^6 \frac{2}{x^2 - 2x} dx = \int_3^6 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} \right) dx$$

$$= [\ln |x-2| - \ln |x|]_3^6$$

$$= \ln 2$$

108) ③

[출제의도] 정적분으로 정의된 함수를 이해하고 최솟값을 구하는 문제를 해결한다.

$$f'(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+1} = 0 \text{ 에서 } x = \frac{1}{2} \text{ 이고 } x = \frac{1}{2} \text{ 의 좌우에서 } f'(x) \text{ 의}$$

부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$ 는 $x = \frac{1}{2}$ 에서 극소이면서
최소이다.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2t-1}{t^2-t+1} dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(t^2-t+1)'}{t^2-t+1} dt \\ &= \left[\ln |t^2-t+1| \right]_0^{\frac{1}{2}} = \ln \frac{3}{4} \end{aligned}$$

109) ②

[출제의도] 정적분의 활용을 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

영역 A 의 넓이를 S_1 , 영역 B 의 넓이를 S_2 라 하자.

$$S_1 = \int_{-1}^0 2^x dx = \left[\frac{2^x}{\ln 2} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{2\ln 2}$$

$$S_2 = \int_0^p 2^x dx = \left[\frac{2^x}{\ln 2} \right]_0^p = \frac{2^p-1}{\ln 2}$$

그런데 $S_2 = 4S_1$ 이므로

$$\frac{2^p-1}{\ln 2} = 4 \times \frac{1}{2\ln 2}$$

따라서 $2^p = 3$ 이므로 $p = \log_2 3$

110) ③

[출제의도] 이해능력-적분법

$$\int_0^\pi t f'(t) dt = k \text{ (} k \text{ 는 실수)라 놓으면}$$

$$f(x) = a \sin x + k \text{ 이고, } f'(x) = a \cos x$$

$$\int_0^\pi t f'(t) dt = \int_0^\pi (t \times a \cos t) dt$$

$$= a \left([t \sin t]_0^\pi - \int_0^\pi \sin t dt \right)$$

$$= a(0 - [-\cos t]_0^\pi)$$

$$= a \times (-1 - 1) = -2a$$

따라서 $f(x) = a \sin x - 2a$ 이고

조건에서 $f(0) = -4$ 이므로 $-2a = -4$

따라서 $a = 2$

111) ③

[출제의도] 이해능력-적분법

$$\int_0^1 \frac{\sin \frac{\pi}{3} x}{\cos^2 \frac{\pi}{3} x} dx \text{ 에서 } \frac{\pi}{3} x = t \text{ 로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = \frac{\pi}{3} \text{ 이고}$$

$$x = 0 \text{ 일 때 } t = 0, x = 1 \text{ 일 때 } t = \frac{\pi}{3} \text{ 이므로}$$

$$\text{주어진 식} = \frac{3}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt$$

$$= \frac{3}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec t \tan t dt$$

$$= \frac{3}{\pi} [\sec t]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{\pi} \left(\sec \frac{\pi}{3} - \sec 0 \right)$$

$$= \frac{3}{\pi} (2 - 1) = \frac{3}{\pi}$$

112) ④

[출제의도] 이해능력-적분법

함수 $f(x)$ 에 대하여

$$f(x) + x f'(x) = \frac{d}{dx} \{x f(x)\} = x^2 e^x \text{ 이므로}$$

$$x f(x) = \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx$$

$$= x^2 e^x - (2x e^x - \int 2e^x dx)$$

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$

$$= e^x (x^2 - 2x + 2) + C \text{ (} C \text{ 는 적분상수)}$$

이때, $f(1) = e + C = e$ 이므로 $C = 0$

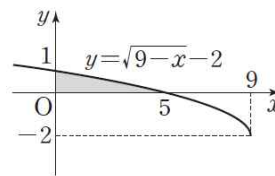
따라서 $x f(x) = e^x (x^2 - 2x + 2)$

이때 $x = 2$ 를 대입하면 $2f(2) = 2e^2$

$$f(2) = e^2$$

113) 16

[출제의도] 이해능력-적분법



곡선 $y = \sqrt{9-x} - 2$ 와 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분은 그림의 색칠한 부분과 같으므로

$$S = \int_0^5 (\sqrt{9-x} - 2) dx$$

$$9-x = t \text{ 로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = -1 \text{ 이고}$$

$x = 0$ 일 때 $t = 9$, $x = 5$ 일 때 $t = 4$ 이므로

$$S = - \int_9^4 (\sqrt{t} - 2) dt = \int_4^9 (\sqrt{t} - 2) dt$$

$$= \left[\frac{2}{3} t \sqrt{t} - 2t \right]_4^9 = \frac{8}{3}$$

$$\text{따라서 } 6S = 6 \times \frac{8}{3} = 16$$

114) ②

[출제의도] 치환적분법을 이해하여 넓이를 구한다.

모든 실수 x 에 대하여 $f(x) > 0$ 이므로 $f(2x+1) > 0$

$$\text{구하는 넓이는 } \int_1^2 f(2x+1) dx$$

$$2x+1 = t \text{ 라 하면 } \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \text{ 이고}$$

$x = 1$ 일 때 $t = 3$, $x = 2$ 일 때 $t = 5$ 이므로

$$\int_1^2 f(2x+1) dx = \int_3^5 \frac{f(t)}{2} dt = \frac{1}{2} \int_3^5 f(t) dt = 18$$

115) ⑤

[출제의도] 부분적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

$$\int_e^{e^2} \frac{\ln x - 1}{x^2} dx \text{ 에서}$$

$$u(x) = \ln x - 1, v'(x) = \frac{1}{x^2} \text{ 으로 놓으면}$$

$$u'(x) = \frac{1}{x}, \quad v(x) = -\frac{1}{x} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_e^{e^2} \frac{\ln x - 1}{x^2} dx &= \left[-\frac{\ln x - 1}{x} \right]_e^{e^2} + \int_e^{e^2} \frac{1}{x^2} dx \\ &= \left[-\frac{\ln x - 1}{x} \right]_e^{e^2} + \left[-\frac{1}{x} \right]_e^{e^2} = -\frac{1}{e^2} + \left(-\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e} \right) \\ &= \frac{e-2}{e^2} \end{aligned}$$

116) ⑤

$$f'(x) = \frac{3x-4}{\sqrt{x-1}} \text{ 이므로 } f(x) = \int \frac{3x-4}{\sqrt{x-1}} dx \text{ 에서}$$

$$x-1=t \text{ 로 치환하면 } 1 = \frac{dt}{dx} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-4}{\sqrt{x-1}} dx &= \int \frac{3t-1}{\sqrt{t}} dt = \int \left(3t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}} \right) dt \\ &= 2t^{\frac{3}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}} + C \quad (C \text{ 는 적분상수}) \\ &= 2(x-1)^{\frac{3}{2}} - 2(x-1)^{\frac{1}{2}} + C \\ f(5) &= 12 + C, \quad f(2) = C \\ \text{따라서 } f(5) - f(2) &= 12 \end{aligned}$$

117) ③

[출제의도] 적분과 미분의 관계와 합성함수의 미분을 이용하여 합숫값을 구한다.

$$\text{주어진 식에서 } t=1 \text{ 이면 } a^2 - a = a(a-1) = 0$$

$$\text{이때 } a \neq 0 \text{ 이므로 } a=1$$

$$\text{주어진 식의 양변을 } t \text{ 에 대하여 미분하면}$$

$$f(\ln t) \times \frac{1}{t} = 2(t \ln t + 1)(\ln t + 1)$$

$$f(\ln t) = 2t(t \ln t + 1)(\ln t + 1), \quad \ln t = 1 \text{ 이면 } t = e$$

$$\text{따라서 } f(1) = 2e(e+1) \times 2 = 4e^2 + 4e$$

118) ②

$$\text{구하는 넓이는}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\ln 2}^{\ln 2} e^{2x} dx &= \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_{-\ln 2}^{\ln 2} \\ &= \frac{1}{2} (e^{2 \ln 2} - e^{-2 \ln 2}) = \frac{1}{2} \left(4 - \frac{1}{4} \right) = \frac{15}{8} \end{aligned}$$

119) ⑤

[출제의도] 치환적분 이해하기

$$\sin 2x = t \text{ 라 하면}$$

$$2 \cos 2x = \frac{dt}{dx}$$

$$x=0 \text{ 일 때 } t=0, \quad x=\frac{\pi}{4} \text{ 일 때 } t=1 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \cos 2x \sin^2 2x dx = \int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

120) ③

[출제의도] 치환적분법 이해하기

$$\int_1^e \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right) \ln x dx - \int_1^e \frac{2}{x^2} \ln x dx = \int_1^e \frac{3}{x} \ln x dx$$

$$\ln x = t \text{ 라 하면 } \frac{1}{x} = \frac{dt}{dx}$$

$$x=1 \text{ 일 때 } t=0, \quad x=e \text{ 일 때 } t=1$$

$$\text{따라서 } \int_1^e \frac{3}{x} \ln x dx = 3 \int_0^1 t dt = 3 \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^1 = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

121) ②

[출제의도] 치환적분법 이해하기

$$\text{주어진 등식의 좌변에서 } \ln x = s \text{ 라 하면}$$

$$\int_{e^2}^{e^3} \frac{a + \ln x}{x} dx = \int_2^3 (a + s) ds = \left[as + \frac{1}{2} s^2 \right]_2^3 = a + \frac{5}{2}$$

$$\text{주어진 등식의 우변에서 } \sin x = t \text{ 라 하면}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin x) \cos x dx = \int_0^1 (1 + t) dt = \left[t + \frac{1}{2} t^2 \right]_0^1 = \frac{3}{2}$$

$$a + \frac{5}{2} = \frac{3}{2} \quad \therefore a = -1$$

$$\text{따라서 } a \text{의 값은 } -1$$

122) ④

[출제의도] 정적분을 이용하여 삼각함수의 극한값 구하는 문제를 해결한다.

$$\text{직선 } l \text{의 방정식은 } y = (\tan \theta)x \text{ 이므로}$$

$$-x^3 + x = (\tan \theta)x \text{에서 } x(x^2 + \tan \theta - 1) = 0$$

$$x \geq 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x = \sqrt{1 - \tan \theta} \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이는}$$

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \int_0^{\sqrt{1 - \tan \theta}} \{(-x^3 + x) - (\tan \theta)x\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} (1 - \tan \theta)x^2 \right]_0^{\sqrt{1 - \tan \theta}} \\ &= \frac{1}{4} (1 - \tan \theta)^2 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}-} \frac{S(\theta)}{\left(\theta - \frac{\pi}{4} \right)^2} = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}-} \frac{1}{4} \left(\frac{\tan \theta - 1}{\theta - \frac{\pi}{4}} \right)^2 \text{ 이다.}$$

$$f(\theta) = \tan \theta \text{ 라 하면 } f'(\theta) = \sec^2 \theta, \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}-} \frac{\tan \theta - 1}{\theta - \frac{\pi}{4}} = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}-} \frac{f(\theta) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\theta - \frac{\pi}{4}} = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$$

$$\text{따라서 } \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}-} \frac{S(\theta)}{\left(\theta - \frac{\pi}{4} \right)^2} = \frac{1}{4} \left(f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)^2 = \frac{1}{4} \times 2^2 = 1$$

123) 96

$$f(x) = \int_0^x (a-t)e^t dt \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$f'(x) = (a-x)e^x$$

$$f'(x) = 0 \text{ 에서 } x=a \text{ 이므로 } f(x) \text{는 } x=a \text{에서 최댓값을 갖는다}$$

$$f(a) = \int_0^a (a-t)e^t dt = [(a-t)e^t]_0^a - \int_0^a (-e^t) dt$$

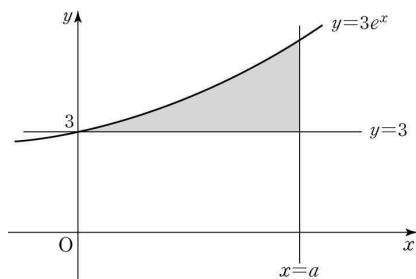
$$= -a - [-e^t]_0^a = -a - (-e^a + 1)$$

$$e^a - a - 1 = 32 \quad \dots\dots (1)$$

$$\text{따라서, 구하는 넓이는}$$

$$\int_0^a (3e^x - 3) dx = [3e^x - 3x]_0^a = 3e^a - 3a - 3$$

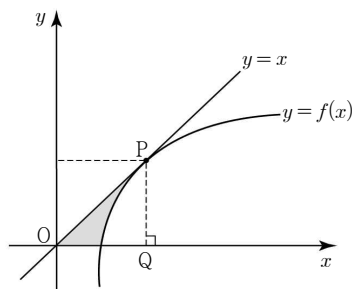
$$= 3(e^a - a - 1) = 96 \quad (\because (1))$$



124) 50

[출제의도] 정적분과 접선의 기술키를 활용하여 문제해결하기

$f(x) = k \ln x$ 라 하자.



접점의 좌표를 $P(p, p)$ 라 하면

$$f(p) = k \ln p = p \quad \dots \textcircled{1}$$

$$f'(x) = \frac{k}{x} \text{ 이므로 } f'(p) = \frac{k}{p} = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에 의하여 $p = e, k = e$

$$f(x) = e \ln x$$

구하고자 하는 넓이 S 는

$$S = (\text{삼각형 OPQ의 넓이}) - \int_1^e f(x) dx$$

$$= \frac{1}{2} e^2 - \int_1^e e \ln x dx$$

$$= \frac{1}{2} e^2 - e [x \ln x - x]_1^e$$

$$= \frac{1}{2} e^2 - e(e \ln e - e + 1)$$

$$= \frac{1}{2} e^2 - e$$

따라서 $a = \frac{1}{2}, b = 1$ 이므로

$$100ab = 50$$

125) ③

[출제의도] 극한으로 표현된 함수의 대칭성을 이용하여 정적분의 값을 구한다.

i) $x > 1$ 또는 $x < -1$ 일 때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{2n}} = 0 \text{ 이므로}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} + \cos 2\pi x}{x^{2n} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^{2n}} \times \cos 2\pi x}{1 + \frac{1}{x^{2n}}} = 1$$

ii) $x = 1$ 일 때

$$f(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{2n} + \cos 2\pi}{1^{2n} + 1} = 1$$

iii) $x = -1$ 일 때

$$f(-1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{2n} + \cos 2\pi(-1)}{(-1)^{2n} + 1} = 1$$

iv) $-1 < x < 1$ 일 때

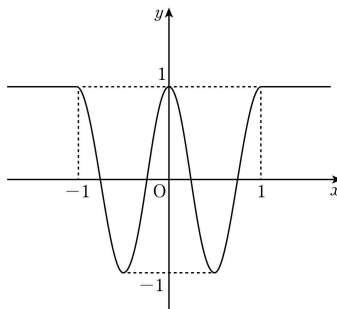
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = 0 \text{ 이므로}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} + \cos 2\pi x}{x^{2n} + 1} = \cos 2\pi x$$

i), ii), iii), iv)로부터 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \geq 1) \\ \cos 2\pi x & (|x| < 1) \end{cases}$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.



$$g(x) = \int_{-x}^2 f(t) dt + \int_2^x t f(t) dt \text{ 에서}$$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이고,

함수 $y = x f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

$$g(-2) = \int_2^{-2} f(t) dt + \int_2^{-2} t f(t) dt$$

$$= 0 + \int_2^{-2} t f(t) dt = \int_2^{-2} t f(t) dt = 0$$

$$g(2) = \int_{-2}^2 f(t) dt + \int_2^2 t f(t) dt = \int_{-2}^2 f(t) dt + 0$$

$$= 2 \int_0^2 f(t) dt = 2 \left\{ \int_0^1 f(t) dt + \int_1^2 f(t) dt \right\}$$

$$= 2 \left[\frac{1}{2\pi} \sin 2\pi t \right]_0^1 + 2 \left[t \right]_1^2$$

$$= 0 + 2 = 2$$

$$\text{따라서 } g(-2) + g(2) = 0 + 2 = 2$$

[참고]

함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 y 축에 대하여 대칭이면

$$f(-x) = f(x) \text{ 이고,}$$

$$g(x) = x f(x) \text{ 라 하면}$$

$$g(-x) = (-x) f(-x) = -x f(x) = -g(x) \text{ 이므로}$$

함수 $y = x f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

126) ④

[출제의도] 정적분을 이용하여 두 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구한다.

두 곡선 $y = f(x), y = g(x)$ 와 직선 AB 로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^1 \left\{ 2^x - \left(\frac{1}{2} \right)^x \right\} dx = \left[\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{\left(\frac{1}{2} \right)^x}{\ln \left(\frac{1}{2} \right)} \right]_0^1$$

$$= \left\{ \frac{2}{\ln 2} - \frac{\frac{1}{2}}{\ln \left(\frac{1}{2} \right)} \right\} - \left\{ \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln \left(\frac{1}{2} \right)} \right\}$$

$$= \frac{5}{2 \ln 2} - \frac{2}{\ln 2} = \frac{1}{2 \ln 2}$$

127) ③

함수 $y = \cos 2x$ 의 그래프와 x 축, y 축 및 직선 $x = \frac{\pi}{12}$ 로 둘러싸인

영역의 넓이는

$$\int_0^{\frac{\pi}{12}} \cos 2x dx = \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{12}} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4} \text{ 이다.}$$

이 넓이가 $y = a$ 에 의하여 이등분되면 그 넓이는 $\frac{1}{8}$ 이다.

따라서 x 축, y 축 및 직선 $x = \frac{\pi}{12}$ 와 $y = a$ 에 의하여

둘러싸인 넓이는 $\frac{\pi}{12} \times a$ 이므로 $\frac{1}{8} = \frac{\pi}{12} \times a$ 이다.

$$\therefore a = \frac{3}{2\pi} \text{ 이다}$$

128) ①

점 $A(t, f(t))$ 에서 x 축에 내린 수선의 발은 $B(t, 0)$ 이고

점 A 에서의 접선과 수직인 직선의 방정식

$$y = -\frac{1}{f'(t)}(x-t) + f(t) \text{ 가 } x \text{ 축과 만나는 점은}$$

$C(f'(t)f(t)+t, 0)$ 이다.

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} |f(t)f'(t)f(t)|$$

$$= \frac{1}{2} | \{f(t)\}^2 f'(t) |$$

$$= \frac{1}{2} \{f(t)\}^2 f'(t) \quad (\because f'(x) > 0)$$

$$= \frac{1}{2} (e^{3t} - 2e^{2t} + e^t)$$

따라서

$$f'(t)(f(t))^2 = e^t(e^t - 1)^2$$

양변을 적분하면

$$\frac{1}{3} f(t)^3 = \frac{1}{3} (e^t - 1)^3 + C \text{ 이고}$$

$$f(0) = 0 \text{ 에서 } C = 0$$

$$\{f(t)\}^3 = (e^t - 1)^3$$

$$\therefore f(t) = e^t - 1$$

$y = f(x)$ 와 x 축 및 직선 $x = 1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^1 (e^x - 1) dx = [e^x - x]_0^1 = e - 1 - 1 = e - 2$$

129) ④

[출제의도] 치환적분법과 로그의 적분법을 활용하여 실수 a 의 값을 구할 수 있는가?

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+e^{-t}} dt = \int_0^x \frac{e^t}{1+e^t} dt$$

에서 $1+e^t = s$ 로 놓으면

$$e^t = \frac{ds}{dt}$$

이고, $t = 0$ 일 때 $s = 2$ 이고, $t = x$ 일 때 $s = 1+e^x$ 이므로

$$f(x) = \int_2^{1+e^x} \frac{1}{s} ds = [\ln s]_2^{1+e^x} = \ln(1+e^x) - \ln 2 = \ln \frac{1+e^x}{2}$$

$$(f \circ f)(a) = f(f(a)) = f\left(\ln \frac{1+e^a}{2}\right) = \ln \frac{1+e^{\ln \frac{1+e^a}{2}}}{2}$$

이때,

$$e^{\ln \frac{1+e^a}{2}} = \left(\frac{1+e^a}{2}\right)^{\ln e} = \frac{1+e^a}{2}$$

이므로

$$(f \circ f)(a) = \ln \frac{1+e^{\ln \frac{1+e^a}{2}}}{2} = \ln \frac{1+\frac{1+e^a}{2}}{2} = \ln \frac{3+e^a}{4}$$

한편, $(f \circ f)(a) = \ln 5$ 이므로

$$\ln \frac{3+e^a}{4} = \ln 5$$

이때, $y = \ln x$ 는 일대일 함수이므로

$$\frac{3+e^a}{4} = 5, \quad e^a = 17$$

따라서

$$a = \ln 17$$

130) ①

[출제의도] 정적분을 활용하여 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구할 수 있는가?

A 의 넓이와 B 의 넓이가 같으므로 두 직선 $y = -2x + a$ 와 $x = 1$ 및

x 축, y 축으로 둘러싸인 영역의 넓이와 곡선 $y = e^{2x}$ 와 직선 $x = 1$ 및

x 축, y 축으로 둘러싸인 영역의 넓이가 같다.

두 직선 $y = -2x + a$ 와 $x = 1$ 및 x 축, y 축으로 둘러싸인 영역의 넓이는

$$\int_0^1 (-2x + a) dx = [-x^2 + ax]_0^1 = -1 + a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

곡선 $y = e^{2x}$ 와 직선 $x = 1$ 및 x 축, y 축으로 둘러싸인 영역의 넓이는

$$\int_0^1 e^{2x} dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 = \frac{e^2 - 1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ 에서 } -1 + a = \frac{e^2 - 1}{2}$$

$$\text{따라서 } a = \frac{e^2 + 1}{2}$$

131) 64

[출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 함수값을 구한다.

$$x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt = ae^{2x} - 4x + b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $x = 0$ 을 대입하면 $0 = a + b \quad \dots\dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f(t) dt + x f(x) - x f(x) = 2ae^{2x} - 4$$

$$\text{즉 } \int_0^x f(t) dt = 2ae^{2x} - 4 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{3}$ 의 양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$0 = 2a - 4, \quad \text{즉 } a = 2$$

이므로 $\textcircled{3}$ 에서 $b = -2$ 이다.

$$\int_0^x f(t) dt = 4e^{2x} - 4 \text{ 의 양변을 } x \text{ 에 대하여 미분하면}$$

$$f(x) = 8e^{2x} \text{ 이므로}$$

$$f(a)f(b) = f(2)f(-2)$$

$$= (8e^4) \times (8e^{-4})$$

$$= 64e^{4-4}$$

$$= 64$$

132) 325

[출제의도] 여러 가지 적분법을 활용하여 문제해결하기

$$f(x) = \int_1^x \frac{n - \ln t}{t} dt \text{ 의 양변을 } x \text{ 에 대하여 미분하면}$$

$$f'(x) = \frac{n - \ln x}{x}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = e^n$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	(0)	...	e^n	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	극대	↘

함수 $f(x)$ 는 $x = e^n$ 에서 최댓값을 가지므로

$$g(n) = f(e^n) = \int_1^{e^n} \frac{n - \ln t}{t} dt$$

$$n - \ln t = s \text{라 하면 } \frac{ds}{dt} = -\frac{1}{t} \text{이고,}$$

$t = 1$ 일 때 $s = n$, $t = e^n$ 일 때 $s = 0$ 이므로

$$g(n) = \int_n^0 (-s) ds = \left[-\frac{1}{2}s^2 \right]_n^0 = \frac{1}{2}n^2$$

$$\text{따라서 } \sum_{n=1}^{12} g(n) = \sum_{n=1}^{12} \frac{n^2}{2} = 325$$

133) ②

둘러싸인 부분의 넓이는

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\sin \frac{\pi}{2} x \right) - (2^x - 1) dx &= \left[-\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} x \right]_0^1 - \left[2^x \frac{1}{\ln 2} \right]_0^1 + [x]_0^1 \\ &= \frac{2}{\pi} - \frac{1}{\ln 2} + 1 \end{aligned}$$

134) ⑤

$f(x)$ 의 부정적분을 $F(x)$ 라 하면, 준식은

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{x^2 + 1}{x} F(x+1) - F(1) \right\} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (x^2 + 1) \frac{F(x+1) - F(1)}{x} \right\} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \{ (x^2 + 1) \} \times F'(1) = f(1) \end{aligned}$$

$$= a \cos \pi$$

$$a \cos \pi = 3, \therefore a = -3$$

$$\therefore f(x) = -3 \cos(\pi x^2)$$

$$f(-3) = -3 \cos 9\pi = 3$$

135) ②

[출제의도] 정적분을 이용하여 곡선과 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구한다.

$$f(x) = ax^2, g(x) = \ln x \text{에서}$$

두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 만나는 점 P의 x 좌표를 k 라 하면

$$ak^2 = \ln k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f'(x) = 2ax, g'(x) = \frac{1}{x}$$

두 곡선 위의 점 P에서의 접선의 기울기가 서로 같으므로

$$2ak = \frac{1}{k}$$

$$2ak^2 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

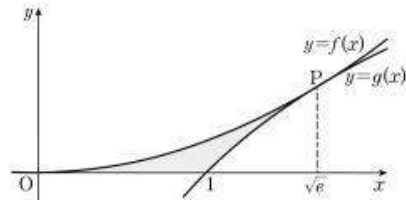
①, ②에 의하여

$$\ln k = \frac{1}{2}, k = \sqrt{e}$$

$$a = \frac{1}{2e}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{2e} \text{이고 점 P의 좌표는 } \left(\sqrt{e}, \frac{1}{2} \right) \text{이므로}$$

두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{e}} \frac{x^2}{2e} dx - \int_1^{\sqrt{e}} \ln x dx \\ = \left[\frac{x^3}{6e} \right]_0^{\sqrt{e}} - \left\{ [x \ln x]_1^{\sqrt{e}} - \int_1^{\sqrt{e}} \left(x \times \frac{1}{x} \right) dx \right\} \\ = \left[\frac{x^3}{6e} \right]_0^{\sqrt{e}} - [x \ln x]_1^{\sqrt{e}} + [x]_1^{\sqrt{e}} \\ = \left(\frac{\sqrt{e}}{6} - 0 \right) - \left(\frac{\sqrt{e}}{2} - 0 \right) + (\sqrt{e} - 1) \\ = \frac{2\sqrt{e} - 3}{3} \end{aligned}$$

136) ④

[출제의도] 부분적분법을 활용하여 문제해결하기

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left\{ (\sin x) \ln x - \frac{\cos x}{x} \right\} dx \\ = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x) \ln x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos x}{x} dx \\ = \left\{ [(-\cos x) \ln x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(-\frac{\cos x}{x} \right) dx \right\} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos x}{x} dx \\ = [(-\cos x) \ln x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ = \ln \pi \end{aligned}$$

137) ②

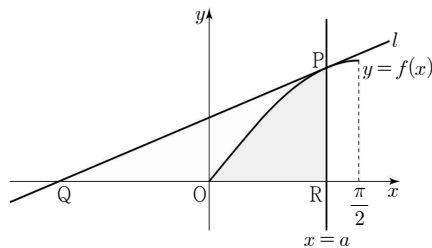
[출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

$$f'(x) = \cos x \text{이므로 점 P에서 그은 접선 } l \text{의 방정식은}$$

$$y = \cos a(x - a) + \sin a \text{이다.}$$

$$\text{직선 } l \text{이 } x \text{축과 만나는 점을 Q라 하면 점 } Q \left(a - \frac{\sin a}{\cos a}, 0 \right) \text{이고,}$$

$$\text{점 P에서 } x \text{축에 내린 수선의 발을 R라 하면 점 } R(a, 0) \text{이다.}$$



그림과 같이 곡선 $y = \sin x$ 와 x 축 및 직선 l 로 둘러싸인 부분의 넓이를

S_1 , 곡선 $y = \sin x$ 와 x 축 및 직선 $x = a$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를

S_2 라 하면

$$S_1 = \frac{1}{2} \times \frac{\sin a}{\cos a} \times \sin a - \int_0^a \sin x dx$$

$$S_2 = \int_0^a \sin x dx$$

$S_1 = S_2$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times \frac{\sin a}{\cos a} \times \sin a - \int_0^a \sin x dx = \int_0^a \sin x dx$$

$$\frac{\sin^2 a}{2 \cos a} = 2 \int_0^a \sin x dx$$

$$\frac{1 - \cos^2 a}{2 \cos a} = 2 \left[-\cos x \right]_0^a$$

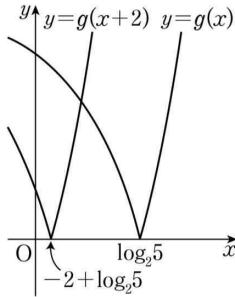
$$3 \cos^2 a - 4 \cos a + 1 = (3 \cos a - 1)(\cos a - 1) = 0$$

$$0 < a < \frac{\pi}{2} \text{이므로 } \cos a = \frac{1}{3}$$

138) ③

[출제의도] 정적분으로 정의된 함수를 이용하여 최솟값에 대한 문제를 해결한다.

$g(x) = |2^x - 5|$ 라 하면 함수 $y = g(x+2)$ 의 그래프와 함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표는 그림과 같이 $-2 + \log_2 5$ 보다 크고 $\log_2 5$ 보다 작다.



$f'(x) = g(x+2) - g(x)$ 이므로 $f'(x) = 0$ 에서

$$f'(x) = 2^{x+2} - 5 - (-2^x + 5) = 0, \quad 5 \times 2^x = 10, \quad x = 1$$

$x < 1$ 에서 $f'(x) < 0$ 이고, $x > 1$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로

함수 $y = f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극소이면서 최소이다.

$$\begin{aligned} f(1) &= \int_1^3 |2^t - 5| dt \\ &= \int_1^{\log_2 5} (-2^t + 5) dt + \int_{\log_2 5}^3 (2^t - 5) dt \\ &= \left[-\frac{2^t}{\ln 2} + 5t \right]_1^{\log_2 5} + \left[\frac{2^t}{\ln 2} - 5t \right]_{\log_2 5}^3 \\ &= \left(-\frac{3}{\ln 2} + 5 \log_2 5 - 5 \right) + \left(\frac{3}{\ln 2} + 5 \log_2 5 - 15 \right) \\ &= 10 \log_2 5 - 20 \end{aligned}$$

따라서 $m = 10 \log_2 5 - 20 = \log_2 \left(\frac{5}{4} \right)^{10}$ 이므로

$$2^m = 2^{\log_2 \left(\frac{5}{4} \right)^{10}} = \left(\frac{5}{4} \right)^{10}$$

139) ①

$$g(x) = \int_0^x \ln f(t) dt \text{에서}$$

$$g(0) = 0, \quad g'(x) = \ln f(x), \quad g''(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

조건 (가)에 의하여 $g(1) = 2, \quad g'(1) = 0$

조건 (나)에 의하여 $g'(-1) = g'(1) = 0$

$$\int_{-1}^1 \frac{x f'(x)}{f(x)} dx = \int_{-1}^1 x g''(x) dx$$

$$= \left[x g'(x) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 g'(x) dx$$

$$\begin{aligned} &= g'(1) + g'(-1) - 2 \int_0^1 g'(x) dx \\ &= 2g'(1) - 2\{g(1) - g(0)\} \\ &= 2 \times 0 - 2(2 - 0) = -4 \end{aligned}$$

140) ①

$$\int_0^x t f(x-t) dt \text{에서 } x-t=s \text{라 하면}$$

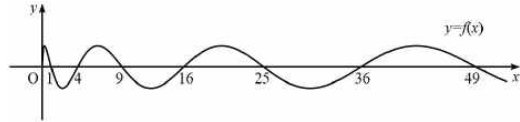
$$\int_0^x t f(x-t) dt = \int_x^0 (x-s) f(s) (-ds) = \int_0^x (x-s) f(s) ds$$

이므로

$$g(x) = x \int_0^x f(s) ds - \int_0^x s f(s) ds \text{ 이고,}$$

$$g'(x) = \int_0^x f(s) ds + x f(x) - x f(x) = \int_0^x f(s) ds$$

이때 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



따라서

$$1^2 < a_1 < 2^2,$$

$$3^2 < a_2 < 4^2,$$

$$5^2 < a_3 < 6^2,$$

...

$$11^2 < a_6 < 12^2$$

이므로 $k = 11$

[참고]

$$\int_{n^2}^{(n+1)^2} \sin(\pi \sqrt{x}) dx \text{에서}$$

$$\sqrt{x} = t \text{라 하면 } x = t^2, \quad dx = 2t dt$$

$$\int_{n^2}^{(n+1)^2} \sin(\pi \sqrt{x}) dx = \int_n^{n+1} 2t \sin \pi t dt$$

$$= \left[2t \times \left(-\frac{1}{\pi} \cos \pi t \right) \right]_n^{n+1} + \frac{2}{\pi} \int_n^{n+1} \cos \pi t dt$$

$$= \left[2t \times \left(-\frac{1}{\pi} \cos \pi t \right) \right]_n^{n+1} + \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{\pi} \sin \pi t \right]_n^{n+1}$$

$$= \frac{2n}{\pi} \cos n\pi - \frac{2(n+1)}{\pi} \cos(n+1)\pi$$

$$n=0 \text{일 때 : } \frac{2}{\pi}$$

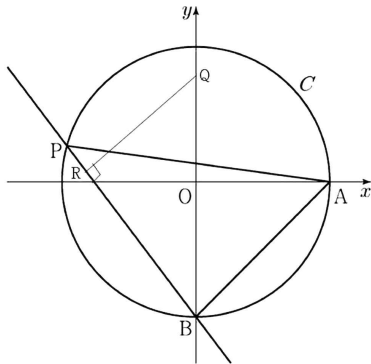
$$n=1 \text{일 때 : } -\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} = -\frac{6}{\pi}$$

$$n=2 \text{일 때 : } \frac{4}{\pi} + \frac{6}{\pi} = \frac{10}{\pi}$$

...

141) ①

[출제의도] 삼각함수의 적분법과 부분적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?



$\overline{QB} = 2 + 2\cos\theta = 2(1 + \cos\theta)$ 이고 직각삼각형 QRB에서

$\angle QBR = \frac{\pi}{2} - \theta$ 이므로

$$\overline{BR} = \overline{QB} \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 2(1 + \cos\theta)\sin\theta$$

삼각형 APB의 외접원의 반지름의 길이가 2이므로 사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{BP}}{\sin\theta} = 2 \times 2 \text{이므로 } \overline{BP} = 4\sin\theta$$

따라서 $f(\theta) = \overline{BP} - \overline{BR}$

$$= 4\sin\theta - 2(1 + \cos\theta)\sin\theta$$

$$= 2\sin\theta - 2\cos\theta\sin\theta \text{이므로}$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta) d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (2 - 2\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

$$= \left[-2\cos\theta - \sin^2\theta \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \left(-2\cos\frac{\pi}{3} - \sin^2\frac{\pi}{3} \right) - \left(-2\cos\frac{\pi}{6} - \sin^2\frac{\pi}{6} \right)$$

$$= \left(-1 - \frac{3}{4} \right) - \left(-\sqrt{3} - \frac{1}{4} \right)$$

$$= \frac{2\sqrt{3}-3}{2}$$

142) 14

[출제의도] 정적분의 성질과 삼각함수의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

조건 (가)에서

$$\int_0^{\frac{\pi}{a}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{a}} \sin(ax) dx = \left[-\frac{1}{a} \cos(ax) \right]_0^{\frac{\pi}{a}} = \frac{2}{a}$$

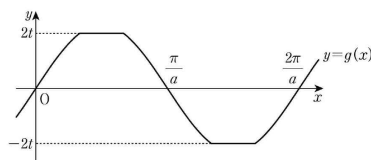
$$\frac{2}{a} \geq \frac{1}{2} \text{이므로 } 0 < a \leq 4 \dots\dots \textcircled{㉑}$$

조건 (나)에서

$$\int_0^{3\pi} \{ |f(x) + t| - |f(x) - t| \} dx = 0$$

$$g(x) = |f(x) + t| - |f(x) - t| \text{라 하면}$$

$$g(x) = \begin{cases} -2t & (-1 \leq \sin(ax) < -t) \\ 2\sin(ax) & (-t \leq \sin(ax) < t) \\ 2t & (t \leq \sin(ax) \leq 1) \end{cases}$$



함수 $y = g(x)$ 의 그래프가 그림과 같으므로

$0 < k < \frac{2\pi}{a}$ 인 모든 실수 k 에 대하여

$$\int_0^k g(x) dx > 0 \text{이고, } \int_0^{\frac{2\pi}{a}} g(x) dx = 0 \text{이다.}$$

함수 $g(x)$ 는 주기가 $\frac{2\pi}{a}$ 이고 $\int_0^{3\pi} g(x) dx = 0$ 이므로

$$3\pi = \frac{2\pi}{a} \times n \quad (n \text{은 자연수}), \quad a = \frac{2}{3}n$$

$$\textcircled{㉑} \text{에서 } 0 < \frac{2}{3}n \leq 4$$

따라서 구하는 모든 실수 a 의 값은

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2, \frac{8}{3}, \frac{10}{3}, 4 \text{이므로 그 합은 } 14 \text{이다.}$$

143) ①

[출제의도] 부분적분법 이해하기

$$\int_{-1}^5 f(x)(x + \cos 2\pi x) dx$$

$$= \int_{-1}^5 xf(x) dx + \int_{-1}^5 f(x) \cos 2\pi x dx \dots \textcircled{㉑}$$

조건 (가)에 의하여

$$\int_{-1}^1 xf(x) dx = 0, \quad \int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx$$

$$\int_{-1}^5 xf(x) dx$$

$$= \int_{-1}^1 xf(x) dx + \int_1^3 xf(x) dx + \int_3^5 xf(x) dx$$

$$= \int_{-1}^1 xf(x) dx + \int_{-1}^1 (x+2)f(x+2) dx + \int_{-1}^1 (x+4)f(x+4) dx$$

$$= \int_{-1}^1 xf(x) dx + \int_{-1}^1 (x+2)f(x) dx + \int_{-1}^1 (x+4)f(x) dx$$

$$= 3 \int_{-1}^1 xf(x) dx + 6 \int_{-1}^1 f(x) dx$$

$$= 12 \int_0^1 f(x) dx = 24 \dots \textcircled{㉒}$$

조건 (가), (나)에 의하여 모든 실수 x 에 대하여

$$f(-x) \cos 2\pi(-x) = f(x) \cos 2\pi x$$

$$f(x+2) \cos 2\pi(x+2) = f(x) \cos 2\pi x$$

$$\int_{-1}^5 f(x) \cos 2\pi x dx$$

$$= \int_{-1}^1 f(x) \cos 2\pi x dx + \int_1^3 f(x) \cos 2\pi x dx + \int_3^5 f(x) \cos 2\pi x dx$$

$$= \int_{-1}^1 f(x) \cos 2\pi x dx + \int_{-1}^1 f(x+2) \cos 2\pi(x+2) dx$$

$$+ \int_{-1}^1 f(x+4) \cos 2\pi(x+4) dx$$

$$= \int_{-1}^1 f(x) \cos 2\pi x dx + \int_{-1}^1 f(x) \cos 2\pi x dx + \int_{-1}^1 f(x) \cos 2\pi x dx$$

$$= 3 \int_{-1}^1 f(x) \cos 2\pi x dx$$

$$= 6 \int_0^1 f(x) \cos 2\pi x dx$$

㉑, ㉒에 의하여

$$\int_0^1 f(x) \cos 2\pi x dx = \frac{1}{6} \left(\frac{47}{2} - 24 \right) = -\frac{1}{12}$$

따라서

$$\int_0^1 f'(x) \sin 2\pi x dx = \left[f(x) \sin 2\pi x \right]_0^1 - 2\pi \int_0^1 f(x) \cos 2\pi x dx$$

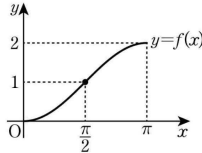
$$= -2\pi \int_0^1 f(x) \cos 2\pi x dx = \frac{\pi}{6}$$

144) ②

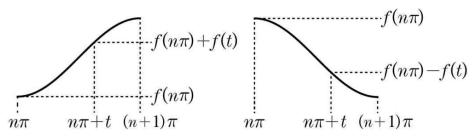
[출제의도] 곡선의 오목과 볼록을 이용하여 정적분의 값을 구하는 문제를 해결한다.

조건 (가)에서 곡선 $y=f(x)$ 는 구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 아래로 볼록이고,

구간 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 에서 위로 볼록이므로 점 $\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점이다.

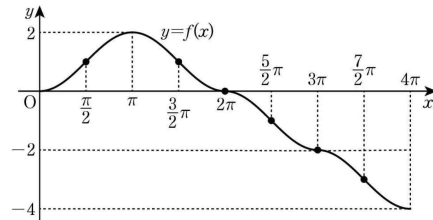


조건 (나)에 의하여 $n\pi < x \leq (n+1)\pi$ 에서 곡선의 모양은 다음 두 가지 중 하나이다.



$0 < x < 4\pi$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점의 개수가 6인 경우는 다음과 같다.

(i) 함수 $y=f(x)$ 가 $x=\pi$ 에서 극대일 때



위 그림에서 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점은

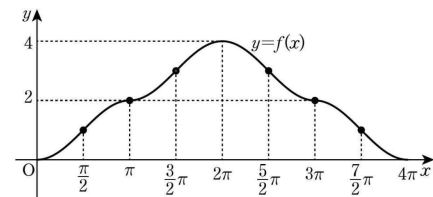
x 좌표가 $\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, 2\pi, \frac{5}{2}\pi, 3\pi, \frac{7}{2}\pi$ 인 점이다.

$$\int_0^{4\pi} |f(x)| dx = 4 \int_0^{\pi} f(x) dx + \pi \times 2$$

$$= 4 \int_0^{\pi} (1 - \cos x) dx + 2\pi$$

$$= \left[x - \sin x \right]_0^{\pi} + 2\pi = 6\pi$$

(ii) 함수 $y=f(x)$ 가 $x=2\pi$ 에서 극대일 때

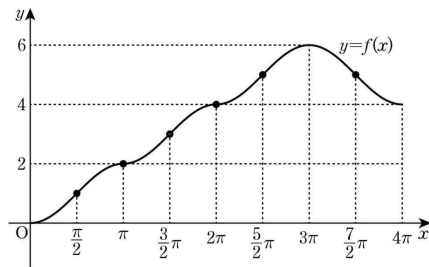


위 그림에서 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점은

x 좌표가 $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, 3\pi, \frac{7}{2}\pi$ 인 점이다.

$$\int_0^{4\pi} |f(x)| dx = 4 \int_0^{\pi} f(x) dx + 2\pi \times 2 = 8\pi$$

(iii) 함수 $y=f(x)$ 가 $x=3\pi$ 에서 극대일 때



위 그림에서 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점은

x 좌표가 $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi, \frac{5}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi$ 인 점이다.

$$\int_0^{4\pi} |f(x)| dx = 4 \int_0^{\pi} f(x) dx + 2\pi \times 5 = 14\pi$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 최솟값은 6π 이다.

145) 26

[출제의도] 여러 가지 조건을 만족시키는 함수를 구한 후 정적분의 값을 구할 수 있는가?

조건 (가)에서

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)+6}{e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ae^{2x} + be^x + c + 6}{e^x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(ae^x + b + \frac{c+6}{e^x} \right) = 1$$

따라서, $b=1, c=-6$ 이므로

$$f(x) = ae^{2x} + e^x - 6$$

조건 (나)에서

$$f(\ln 2) = ae^{2\ln 2} + e^{\ln 2} - 6 = 4a + 2 - 6 = 0$$

$$a = 1$$

$$\text{즉, } f(x) = e^{2x} + e^x - 6$$

따라서,

$$f(\ln 4) = e^{2\ln 4} + e^{\ln 4} - 6 = 16 + 4 - 6 = 14$$

이므로

$$g(0) = \ln 2, \quad g(14) = \ln 4$$

따라서, $\int_0^{14} g(x) dx$ 에서 $g(x)=t$ 로 놓으면 $g'(x)=\frac{dt}{dx}$ 이고

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{f'(t)}$$

이므로

$$\int_0^{14} g(x) dx = \int_{\ln 2}^{\ln 4} t f'(t) dt = \left[t f(t) \right]_{\ln 2}^{\ln 4} - \int_{\ln 2}^{\ln 4} f(t) dt$$

$$= 14 \ln 4 - \int_{\ln 2}^{\ln 4} (e^{2t} + e^t - 6) dt = 14 \ln 4 - \left[\frac{1}{2} e^{2t} + e^t - 6t \right]_{\ln 2}^{\ln 4}$$

$$= 28 \ln 2 - (8 - 6 \ln 2) = 34 \ln 2 - 8$$

따라서 $p=-8, q=24$ 이므로

$$p+q=26$$

146) 5

[출제의도] 정적분의 정의를 이용하여 급수의 합을 구한다.

$x_k = 1 + \frac{k}{n}$ 로 놓으면 $\Delta x = \frac{1}{n}$ 이므로 정적분의 정의에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} f\left(1 + \frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \frac{1}{n}$$

$$= \int_1^2 (x-1)f(x) dx$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}
 \int_1^2 (x-1) \ln x \, dx &= \left[\left(\frac{1}{2}x^2 - x \right) \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2}x^2 - x \right) dx \\
 &= (0-0) - \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x - 1 \right) dx \\
 &= - \left[\frac{1}{4}x^2 - x \right]_1^2 = -(1-2) + \left(\frac{1}{4} - 1 \right) = \frac{1}{4} \\
 p &= 4, \quad q = 1 \text{ 이므로} \\
 p+q &= 5
 \end{aligned}$$

147) ①

[출제의도] 정적분의 정의와 치환적분법을 이해하여 정적분의 값을 구한다.

$$\begin{aligned}
 x_k &= \frac{k\pi}{n}, \quad \Delta x = \frac{\pi}{n} \text{ 라 하면 정적분의 정의에 의하여} \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{n} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x \\
 &= \int_0^\pi f(x) dx = \int_0^\pi \sin(3x) dx \\
 t = 3x \text{ 로 놓으면 } \frac{dt}{dx} &= 3 \text{ 이고} \\
 x = 0 \text{ 일 때 } t = 0, \quad x = \pi \text{ 일 때 } t = 3\pi \text{ 이므로} \\
 \int_0^\pi \sin(3x) dx &= \int_0^{3\pi} \frac{1}{3} \sin t dt = \left[-\frac{1}{3} \cos t \right]_0^{3\pi} \\
 &= \left(-\frac{1}{3} \cos 3\pi \right) - \left(-\frac{1}{3} \cos 0 \right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\
 &= \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

148) ①

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} f\left(\frac{k}{n}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) \\
 &= \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x} dx = \int_0^1 (4x^3) dx = 1
 \end{aligned}$$

149) ④

[출제의도] 정적분의 정의를 이용하여 급수의 합을 구할 수 있는가?

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{2k}{n}\right) &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2}{n} f\left(\frac{2k}{n}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 (4x^3 + x) dx = \frac{1}{2} \left[x^4 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^2 \\
 &= \frac{1}{2} \times 18 = 9
 \end{aligned}$$

150) 242

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2}{n} \left(1 + \frac{2k}{n} \right)^4 &\text{에서} \\
 f(x) = x^4, \quad x_k = 1 + \frac{2k}{n} \text{ 라 하면} \\
 \Delta x &= \frac{2}{n}, \quad x_0 = 1, \quad x_n = 3 \\
 \text{따라서} \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2}{n} \left(1 + \frac{2k}{n} \right)^4 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x \\
 &= \int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 x^4 dx = \left[\frac{1}{5}x^5 \right]_1^3 = \frac{1}{5}(3^5 - 1) = \frac{242}{5} \\
 \text{이므로 } 5a &= 242
 \end{aligned}$$

151) ④

[출제의도] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다.

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k\pi}{n^2} f\left(\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{n}\right) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x(-\sin x) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\left[x \cos x \right]_0^\pi - \int_0^\pi \cos x dx \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(-\pi - \left[\sin x \right]_0^\pi \right) = \frac{1}{\pi} \times (-\pi) = -1
 \end{aligned}$$

152) ①

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{3n}{3n+k}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{3}{3+\frac{k}{n}}} \\
 &= \sqrt{3} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3+x}} dx = 2\sqrt{3} \left[\sqrt{x+3} \right]_0^1 = 4\sqrt{3} - 6
 \end{aligned}$$

153) ③

[출제의도] 급수와 정적분의 관계를 이용하여 값을 구할 수 있는가?

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2 + 2kn}{k^3 + 3k^2n + n^3} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 2 \times \frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}\right)^3 + 3 \times \left(\frac{k}{n}\right)^2 + 1} \times \frac{1}{n} \right\} \\
 &= \int_0^1 \frac{x^2 + 2x}{x^3 + 3x^2 + 1} dx \\
 &= \left[\frac{1}{3} \ln(x^3 + 3x^2 + 1) \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{3} (\ln 5 - \ln 1) \\
 &= \frac{\ln 5}{3}
 \end{aligned}$$

154) ②

[출제의도] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이용하여 급수의 합을 구한다.

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{(2n-k)^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n} - 2\right)^2} \times \frac{1}{n} = \int_{-2}^{-1} \frac{x+2}{x^2} dx \\
 &= \int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right) dx = \left[\ln|x| - \frac{2}{x} \right]_{-2}^{-1} \\
 &= 1 - \ln 2
 \end{aligned}$$

155) ③

[출제의도] 급수와 정적분의 관계를 이용하여 급수의 합을 구할 수 있는가?

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{3k}{n}} &= \int_0^1 \sqrt{1+3x} dx \\
 &= \left[\frac{2}{9} (1+3x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{9} (8-1) = \frac{14}{9}
 \end{aligned}$$

156) ①

[출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

선분 PQ를 한 변으로 하는 정삼각형의 넓이 $S(x)$ 는

$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ \sqrt{x(x^2+1)} \sin(x^2) \right\}^2$$

입체도형의 부피 V 는

$$V = \int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{3}}{4} x(x^2+1) \sin(x^2) dx$$

$$x^2 = t \text{라 하면 } 2x \frac{dx}{dt} = 1$$

$$x=0 \text{일 때 } t=0, \quad x=\sqrt{\pi} \text{일 때 } t=\pi \text{이므로}$$

$$V = \frac{\sqrt{3}}{8} \int_0^{\pi} (t+1) \sin t \, dt$$

$$u(t)=t+1, \quad v'(t)=\sin t$$

$$u'(t)=1, \quad v(t)=-\cos t$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{\sqrt{3}}{8} \times \left[-(t+1)\cos t \right]_0^{\pi} - \frac{\sqrt{3}}{8} \int_0^{\pi} (-\cos t) dt \\ &= \frac{\sqrt{3}(\pi+2)}{8} \end{aligned}$$

157) 12

[출제의도] 입체도형의 부피 이해하기

선분 AB를 한 변으로 하는 정삼각형의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = xe^x$$

구하는 입체도형의 부피는

$$\begin{aligned} \int_1^{\ln 6} xe^x dx &= [xe^x]_1^{\ln 6} - \int_1^{\ln 6} e^x dx \\ &= [xe^x - e^x]_1^{\ln 6} = -6 + 6\ln 6 \end{aligned}$$

$$a=6, \quad b=6$$

$$\text{따라서 } a+b=12$$

158) ④

[출제의도] 정적분을 이용하여 입체도형의 부피를 구할 수 있는가?

직선 $x=t$ ($0 \leq t \leq 1$)을 포함하고 x 축에 수직인 평면으로 자른단면의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

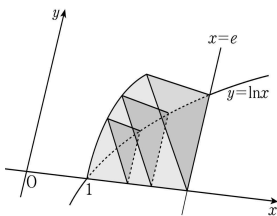
$$S(t) = (\sqrt{t}+1)^2 = t+2\sqrt{t}+1$$

구하는 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 S(t) dt \\ &= \int_0^1 (t+2\sqrt{t}+1) dt \\ &= \left[\frac{1}{2}t^2 + \frac{4}{3}t\sqrt{t} + t \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + 1 = \frac{17}{6} \end{aligned}$$

159) ⑤

[출제의도] 정적분을 활용하여 입체도형의 부피 구하는 문제를 해결한다.

 $y=e^x$ 의 역함수는 $y=\ln x$ 이므로점 $(0, 1)$ 은 점 $(1, 0)$ 으로, 점 $(0, e)$ 는 점 $(e, 0)$ 으로 이동한다.그런데 $x=t$ ($1 \leq t \leq e$)일 때 정삼각형의 한 변의 길이는 $\ln t$ 이므로정삼각형의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\ln t)^2$$

따라서 구하는 부피는

$$\begin{aligned} \int_1^e S(t) dt &= \frac{\sqrt{3}}{4} \int_1^e (\ln t)^2 dt \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ \left[t(\ln t)^2 \right]_1^e - \int_1^e t \left(2 \times \frac{1}{t} \times \ln t \right) dt \right\} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ \left[t(\ln t)^2 \right]_1^e - 2 \int_1^e \ln t dt \right\} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ \left[t(\ln t)^2 \right]_1^e - 2 \left[t \ln t - t \right]_1^e \right\} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} (e-2) \end{aligned}$$

[다른 풀이]

 $\int \ln x dx = x \ln x - x + C$ (단, C 는 적분상수)이므로

$$\begin{aligned} \int_1^e S(t) dt &= \frac{\sqrt{3}}{4} \int_1^e (\ln t)^2 dt \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ \left[\ln t (t \ln t - t) \right]_1^e - \int_1^e (\ln t - 1) dt \right\} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ \left[\ln t (t \ln t - t) \right]_1^e - \left[t \ln t - 2t \right]_1^e \right\} = \frac{\sqrt{3}}{4} (e-2) \end{aligned}$$

[다른 풀이]

함수 $f(x)=e^x$ 의 역함수를 $f^{-1}(x)$ 라 하고, 입체도형의 부피를 V 라 하면

$$V = \int_1^e \frac{\sqrt{3}}{4} \{f^{-1}(y)\}^2 dy$$

이다. $y=f(x)$ 에서 $f^{-1}(y)=x$ 이고 $y=f(x)$ 의 양변을 x 에 대하여

$$\text{미분하면 } \frac{dy}{dx} = f'(x) = e^x \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^1 x^2 f'(x) dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^1 x^2 e^x dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ \left[x^2 e^x \right]_0^1 - 2 \int_0^1 x e^x dx \right\} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ \left[x^2 e^x \right]_0^1 - 2 \left(\left[x e^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \right) \right\} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ \left[x^2 e^x \right]_0^1 - 2 \left(\left[x e^x \right]_0^1 - \left[e^x \right]_0^1 \right) \right\} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} (e-2) \end{aligned}$$

160) ①

[출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

직선 $x=t$ ($1 \leq t \leq 2$)를 포함하고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(3t + \frac{2}{t} \right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(9t^2 + 12 + \frac{4}{t^2} \right) \text{ 따라서 구하는 부피}$$

 V 는

$$\begin{aligned} V &= \int_1^2 S(t) dt = \int_1^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \left(9t^2 + 12 + \frac{4}{t^2} \right) dt \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left[3t^3 + 12t - \frac{4}{t} \right]_1^2 = \frac{35\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

161) 7

[출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \left\{ \sqrt{x + \frac{\pi}{4} \sin \left(\frac{\pi}{2} x \right)} \right\}^2$$

입체도형의 부피 V 는

$$V = \int_1^4 S(x) dx = \int_1^4 \left\{ x + \frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right\} dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right]_1^4 = 7$$

162) ①

[출제의도] 정적분을 이용하여 입체도형의 부피 문제를 해결한다.

점 $(t, 0) \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \leq t \leq \frac{\sqrt{3\pi}}{2} \right)$ 를 지나고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이는 $2f(t) \times 2f(t) = 4t \sin t^2$ 이다.

따라서 구하는 입체도형의 부피는 $\int_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{3\pi}}{2}} 4t \sin t^2 dt$

$t^2 = u$ 로 놓으면 $\frac{du}{dt} = 2t$ 이므로

$$\int_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{3\pi}}{2}} 4t \sin t^2 dt = 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin u du$$

$$= 2 \times \left[-\cos u \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = 2\sqrt{2}$$

163) ③

[출제의도] 이해능력-적분법

x 좌표가 x ($0 \leq x \leq \ln 2$)인 점을 지나고 x 축에 수직인 평면으로 입체도형을 자를 때, 그 단면은 지름의 길이가 $e^2 - e^x$ ($0 \leq x \leq \ln 2$)인 반원이다. 따라서 단면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{e^2 - e^x}{2} \right)^2 \pi = \frac{\pi}{8} (e^{2x} - 2e^{x+2} + e^4) \pi$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V 라 하면

$$V = \int_0^{\ln 2} S(x) dx = \frac{\pi}{8} \int_0^{\ln 2} (e^{2x} - 2e^{x+2} + e^4) dx$$

$$= \frac{\pi}{8} \left[\frac{1}{2}e^{2x} - 2e^{x+2} + e^4 x \right]_0^{\ln 2}$$

$$= \frac{\pi}{8} \left(e^4 \ln 2 - 2e^2 + \frac{3}{2} \right)$$

164) 340

[출제의도] 정적분을 이용하여 입체도형의 부피를 구한다.

입체도형을 직선 $x=t$ ($0 \leq t \leq 2$)를 포함하고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가

$$(2\sqrt{2t+1}) - \sqrt{2t} = \sqrt{2t+1}$$

인 정사각형이므로 단면의 넓이 $S(t)$ 는

$$S(t) = (\sqrt{2t+1})^2$$

$$= 2t + 2\sqrt{2t+1}$$

구하는 입체도형의 부피 V 는

$$V = \int_0^2 (2t + 2\sqrt{2t+1}) dt$$

$$= \left[t^2 + \frac{4\sqrt{2}}{3} t \sqrt{t+1} \right]_0^2$$

$$= \left(4 + \frac{16}{3} + 2 \right) - 0$$

$$= \frac{34}{3}$$

따라서 $30V = 340$

165) ③

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2k}}}^{\frac{1}{\sqrt{k}}} \sqrt{3} x e^{2kx^2} dx = \sqrt{3} (e^2 - e) \text{ 일 때 } k \text{ 값을 구하면 된다.}$$

$$e^{2kx^2} = t \text{ 라고 치환하면 } 4kx e^{2kx^2} dx = dt \Rightarrow x e^{2kx^2} dx = \frac{dt}{4k}$$

$$\sqrt{3} \int_e^{e^2} \frac{1}{4k} dt = \sqrt{3} \frac{e^2 - e}{4k} = \sqrt{3} (e^2 - 2) \text{ 이 성립한다.}$$

$$\text{따라서 } k = \frac{1}{4}$$

166) ②

[출제의도] 정적분을 이용하여 입체도형의 부피를 구할 수 있는가?

주어진 입체도형의 부피는

$$\int_0^k \left(\sqrt{\frac{e^x}{e^x+1}} \right)^2 dx = \int_0^k \frac{e^x}{e^x+1} dx$$

$e^x + 1 = t$ 로 놓으면

$$\frac{dt}{dx} = e^x$$

이때 $x=0$ 일 때, $t=2$ 이고 $x=k$ 일 때, $t=e^k+1$ 이므로

$$\int_0^k \frac{e^x}{e^x+1} dx = \int_2^{e^k+1} \frac{1}{t} dt = \left[\ln t \right]_2^{e^k+1}$$

$$= \ln(e^k+1) - \ln 2$$

$$= \ln \frac{e^k+1}{2}$$

주어진 입체도형의 부피가 $\ln 7$ 이므로

$$\ln \frac{e^k+1}{2} = \ln 7$$

$$\frac{e^k+1}{2} = 7, \quad e^k = 13$$

따라서 $k = \ln 13$

167) ②

[출제의도] 정적분을 이용하여 입체도형의 부피를 구할 수 있는가?

x 좌표가 t ($1 \leq t \leq 2$)인 점을 지나고 x 축에 수직인 평면으로 자른

단면은 한 변의 길이가 $\sqrt{\frac{3t+1}{t^2}}$ 인 정사각형이므로 단면의 넓이를

$$S(t) \text{라 하면 } S(t) = \frac{3t+1}{t^2}$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V 라 하면

$$V = \int_1^2 S(t) dt = \int_1^2 \frac{3t+1}{t^2} dt = \int_1^2 \left(\frac{3}{t} + \frac{1}{t^2} \right) dt$$

$$= \left[3 \ln |t| - \frac{1}{t} \right]_1^2$$

$$= \left(3 \ln 2 - \frac{1}{2} \right) - \left(3 \ln 1 - \frac{1}{1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} + 3 \ln 2$$

168) ③

부피는

$$\int_1^2 \frac{kx}{2x^2+1} dx$$

$$= \int_1^2 \left\{ \frac{k}{4} \times \frac{(2x^2+1)'}{2x^2+1} \right\} dx$$

$$= \left[\frac{k}{4} \ln(2x^2+1) \right]_1^2$$

$$= \frac{k}{4}(\ln 9 - \ln 3)$$

$$= \frac{k}{4} \ln 3$$

따라서 $\frac{k}{4} \ln 3 = 2 \ln 3$ 에서

$k = 8$ 이다.

169) ④

[출제의도] 입체도형의 부피를 구할 수 있는가?

$0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$ 인 실수 t 에 대하여 직선 $x = t$ 를 포함하고 x 축에 수직인

평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = (\sqrt{\sec^2 t + \tan t})^2 = \sec^2 t + \tan t$$

이므로 구하는 입체도형의 부피는

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sec^2 t + \tan t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\sec^2 x + \frac{\sin x}{\cos x} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left\{ \sec^2 x - \frac{(\cos x)'}{\cos x} \right\} dx \\ &= \left[\tan x - \ln |\cos x| \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \tan \frac{\pi}{3} - \ln \cos \frac{\pi}{3} \\ &= \sqrt{3} - \ln \frac{1}{2} = \sqrt{3} + \ln 2 \end{aligned}$$

170) 56

[출제의도] 곡선의 길이 이해하기

$$y' = \frac{1}{2} \sqrt{x} \text{ 이므로}$$

$$l = \int_0^{12} \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^{12} \sqrt{1 + \frac{x}{4}} dx$$

$$\sqrt{1 + \frac{x}{4}} = t \text{ 라 놓으면}$$

$$1 + \frac{x}{4} = t^2, \quad \frac{1}{4} \frac{dx}{dt} = 2t$$

$x = 0$ 일 때 $t = 1$, $x = 12$ 일 때 $t = 2$ 이므로

$$l = \int_1^2 8t^2 dt = \left[\frac{8}{3} t^3 \right]_1^2 = \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{56}{3}$$

따라서 $3l = 56$

171) ⑤

[출제의도] 평면운동의 성질 추론하기

점 P의 속도 \vec{v} 는 $\vec{v} = (1 - 2\sin t, \sqrt{3} \cos t)$

ㄱ. $t = \frac{\pi}{2}$ 일 때, 점 P의 속도는 $(-1, 0)$ 이다. (참)

ㄴ. 속도의 크기 $|\vec{v}|$ 는

$$|\vec{v}| = \sqrt{\sin^2 t - 4\sin t + 4} = \sqrt{(\sin t - 2)^2} = |\sin t - 2| = 2 - \sin t$$

$t = \frac{\pi}{2}$ 일 때, $|\vec{v}|$ 의 최솟값은 1이다. (참)

ㄷ. 점 P가 $t = \pi$ 에서 $t = 2\pi$ 까지 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{2\pi} |\vec{v}| dt &= \int_{\pi}^{2\pi} (2 - \sin t) dt \\ &= [2t + \cos t]_{\pi}^{2\pi} = 2\pi + 2 \text{ (참)} \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

172) 20

[출제의도] 점의 운동 문제해결하기

점 P의 시간 t 에서의 위치 (x, y) 가

$$\begin{cases} x = 4\sqrt{2}t + 2 \\ y = \frac{4}{3}\sqrt{t}(t-6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4\sqrt{2} \\ \frac{dy}{dt} = 2\left(\sqrt{t} - \frac{2}{\sqrt{t}}\right) \end{cases}$$

점 P의 속력은

$$|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = 2\sqrt{t} + \frac{4}{\sqrt{t}}$$

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$|\vec{v}| = 2\sqrt{t} + \frac{4}{\sqrt{t}} \geq 2\sqrt{2\sqrt{t} \times \frac{4}{\sqrt{t}}} = 4\sqrt{2}$$

(단, 등호는 $t = 2$ 일 때 성립)

$$|\vec{v}| = 2\sqrt{t} + \frac{4}{\sqrt{t}} \text{ 는 } t = 2 \text{ 일 때 최소이므로 } a = 2 \text{ 이다.}$$

$t = 1$ 에서 $t = 2$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^2 |\vec{v}| dt = \int_1^2 \left(2\sqrt{t} + \frac{4}{\sqrt{t}} \right) dt = \frac{32}{3}\sqrt{2} - \frac{28}{3}$$

$$\therefore p + q = 20$$

173) ⑤

$x = 0$ 에서 $x = \ln 2$ 까지의 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} & \int_0^{\ln 2} \sqrt{\left(\frac{1}{4}e^{2x} - e^{-2x}\right)^2 + 1} dx = \int_0^{\ln 2} \sqrt{\left(\frac{1}{4}e^{2x} + e^{-2x}\right)^2} dx \\ &= \int_0^{\ln 2} \sqrt{\left(\frac{1}{4}e^{2x} + e^{-2x}\right)^2} dx = \int_0^{\ln 2} \left(\frac{1}{4}e^{2x} + e^{-2x}\right) dx \\ &= \frac{1}{8}e^{2\ln 2} - \frac{1}{2}e^{-2\ln 2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

따라서 곡선의 길이는 $\frac{3}{4}$ 이다

174) ④

[출제의도] 평면곡선의 미분법을 이용하여 문제해결하기

$\{f(x) - f'(x)\}\{f(x) + f'(x)\} = 2f(x)$ 에서

$\{f(x)\}^2 - \{f'(x)\}^2 = 2f(x)$ 이므로

$\{f'(x)\}^2 = \{f(x)\}^2 - 2f(x)$

$x = 0$ 에서 $x = 2$ 까지 곡선 $y = f(x)$ 의 길이는

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx = \int_0^2 \sqrt{1 + \{f(x)\}^2 - 2f(x)} dx \\ &= \int_0^2 \sqrt{(f(x) - 1)^2} dx = \int_0^2 |f(x) - 1| dx \\ &= \int_0^2 f(x) dx - 2 = 6 \\ &\therefore \int_0^2 f(x) dx = 8 \end{aligned}$$

175) ①

[출제의도] 평면 위의 점이 움직인 거리를 구할 수 있는가?

곡선 $y = x^2$ 과 직선 $y = t^2x - \frac{\ln t}{8}$ 가 만나는 두 점 x 좌표를 각각

α, β 라 하면 두 점의 좌표는 $(\alpha, \alpha^2), (\beta, \beta^2)$ 이므로,

이 두 점의 중점의 좌표는 $\left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}\right)$ ①

이 다. 두 식 $y = x^2, y = t^2x - \frac{\ln t}{8}$ 를 연립하면

$$x^2 = t^2 x - \frac{\ln t}{8}, \quad x^2 - t^2 x + \frac{\ln t}{8} = 0$$

이 방정식의 두 근이 α, β 이므로, 근과 계수와의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = t^2, \quad \alpha\beta = \frac{\ln t}{8}$$

$$\text{따라서, } \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = t^4 - \frac{\ln t}{4}$$

$$\text{이므로, ㉠에서 중점의 좌표는 } \left(\frac{1}{2}t^2, \frac{1}{2}t^4 - \frac{\ln t}{8} \right) \text{이다.}$$

$$\text{그러므로, 점 } P \text{의 시각 } t \text{에서의 위치는 } x = \frac{1}{2}t^2,$$

$$y = \frac{1}{2}t^4 - \frac{\ln t}{8} \text{이다.}$$

$$\text{이 때, } \frac{dx}{dt} = t, \quad \frac{dy}{dt} = -2t^3 - \frac{1}{8t} \text{이므로,}$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{t^2 + \left(2t^3 - \frac{1}{8t}\right)^2}$$

$$= \sqrt{t^2 + 4t^6 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{64t^2}}$$

$$= \sqrt{4t^6 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{64t^2}}$$

$$= \sqrt{\left(2t^3 + \frac{1}{8t}\right)^2}$$

$$= 2t^3 + \frac{1}{8t}$$

따라서, 시각 $t=1$ 에서 $t=2$ 까지 점 P 가 움직인 거리는

$$\int_1^e \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

$$= \int_1^e \left(2t^3 + \frac{1}{8t}\right) dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{8} \ln |t| \right]_1^e$$

$$= \frac{1}{2}e^4 + \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{2} - 0 \right)$$

$$= \frac{e^4}{2} - \frac{3}{8}$$

176) 11

[출제외도] 여러 가지 함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

곡선 $y = \ln(1 + e^{2x} - e^{-2t})$ 과 직선 $y = x + t$ 가 만나는 두 점을

$P(\alpha, \alpha + t), Q(\beta, \beta + t) \quad (\alpha < \beta)$

로 놓으면

$$f(t) = \sqrt{(\beta - \alpha)^2 + (\beta - \alpha)^2} = \sqrt{2}(\beta - \alpha)$$

이때, α, β 는 방정식

$$\ln(1 + e^{2x} - e^{-2t}) = x + t$$

의 서로 다른 두 실근이므로

$$1 + e^{2x} - e^{-2t} = e^{x+t}$$

$$e^{2x} - e^t \times e^x + 1 - e^{-2t} = 0$$

$$e^x = k \quad (k > 0) \text{로 놓으면}$$

$$k^2 - e^t k + 1 - e^{-2t} = 0$$

따라서,

$$k = \frac{e^t \pm \sqrt{e^{2t} + 4e^{-2t} - 4}}{2}$$

이므로

$$e^\alpha = \frac{e^t - \sqrt{e^{2t} + 4e^{-2t} - 4}}{2}$$

$$e^\beta = \frac{e^t + \sqrt{e^{2t} + 4e^{-2t} - 4}}{2}$$

즉

$$\alpha = \ln \frac{e^t - \sqrt{e^{2t} + 4e^{-2t} - 4}}{2}$$

$$\beta = \ln \frac{e^t + \sqrt{e^{2t} + 4e^{-2t} - 4}}{2}$$

이므로

$$\beta - \alpha = \ln \frac{e^t + \sqrt{e^{2t} + 4e^{-2t} - 4}}{e^t - \sqrt{e^{2t} + 4e^{-2t} - 4}}$$

$$= \ln \frac{(e^t + \sqrt{e^{2t} + 4e^{-2t} - 4})^2}{4(1 - e^{-2t})}$$

$$= 2\ln(e^t + \sqrt{e^{2t} + 4e^{-2t} - 4}) - \ln 4 - \ln(1 - e^{-2t})$$

따라서

$$g(t) = 2\ln(e^t + \sqrt{e^{2t} + 4e^{-2t} - 4}) - \ln 4 - \ln(1 - e^{-2t})$$

라 하면

$$g'(t) = 2 \times \frac{e^t + \frac{2e^{2t} - 8e^{-2t}}{2\sqrt{e^{2t} + 4e^{-2t} - 4}}}{e^t + \sqrt{e^{2t} + 4e^{-2t} - 4}} - \frac{2e^{-2t}}{1 - e^{-2t}}$$

이므로

$$g'(\ln 2) = 2 \times \frac{2 + \frac{8-2}{2}}{2+1} - \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

즉, $f(t) = \sqrt{2}g(t)$ 에서

$$f'(\ln 2) = \sqrt{2}g'(\ln 2) = \frac{8}{3}\sqrt{2}$$

이므로 $p=3, q=8$

따라서 $p+q=11$

177) 10

[출제외도] 합성함수의 미분법과 역함수의 미분법을 이용하여 문제를 해결한다.

$$f(x) = -\frac{ax^3 + bx}{x^2 + 1} \text{에서}$$

$$f'(x) = -\frac{(3ax^2 + b)(x^2 + 1) - (ax^3 + bx)(2x)}{(x^2 + 1)^2}$$

이므로

$$f'(x) = -\frac{ax^4 + (3a-b)x^2 + b}{(x^2 + 1)^2} \dots\dots \textcircled{1}$$

모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 1 \neq 0$ 이므로

함수 $f'(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \neq 0$ 이고 $f'(0) = -b < 0$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) < 0$ 이다.

$$h(x) = g(f(x)) = f(f(x)) - x \text{이므로}$$

$$h(0) = f(f(0)) - 0 = f(0) = 0 \text{이다.}$$

조건 (가)에서

$$g(2) = f(2) - f^{-1}(2) = h(0) = 0 \text{이므로}$$

$$f(2) = f^{-1}(2) = t \quad (t \text{는 상수}) \text{라 하면 } f(t) = 2 \text{이다.}$$

모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 이므로

$$f(-2) = -f(2) = -t \text{이다.}$$

즉 두 점 $(t, 2), (-2, -t)$ 는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위에 있다.

$t \neq -2$ 일 때, 두 점 $(t, 2), (-2, -t)$ 를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{2 - (-t)}{t - (-2)} = 1 \text{이므로 평균값 정리에 의하여}$$

$f'(c) = 1$ 인 상수 c 가 존재한다. 그러나 모든 실수 x 에 대하여

$$f'(x) < 0 \text{이므로 모순이다. 즉 } t = -2$$

$$f(2) = -2 \text{에서 } -\frac{8a+2b}{5} = -2$$

그러므로 $4a+b=5 \dots\dots \textcircled{2}$

$f^{-1}(2) = -2$ 이므로 역함수의 미분법에 의하여

$$g'(2) = f'(2) - (f^{-1})'(2) = f'(2) - \frac{1}{f'(-2)}$$

㉠에서 모든 실수 x 에 대하여 $f'(-x) = f'(x)$ 이므로

$$f'(-2) = f'(2) \text{이다.}$$

$$\text{즉 } g'(2) = f'(2) - \frac{1}{f'(2)}$$

$$h(x) = f(f(x)) - x \text{에서}$$

$$h'(x) = f'(f(x))f'(x) - 1 \text{이므로}$$

$$h'(2) = f'(f(2))f'(2) - 1 = f'(-2)f'(2) - 1 = \{f'(2)\}^2 - 1$$

조건 (나)에서 $g'(2) = -5h'(2)$ 이므로

$$f'(2) - \frac{1}{f'(2)} = -5\{f'(2)\} + 5$$

$$5\{f'(2)\}^3 + \{f'(2)\}^2 - 5f'(2) - 1 = 0$$

$$\{5f'(2) + 1\}\{f'(2) + 1\}\{f'(2) - 1\} = 0$$

$f'(x) < 0$ 이므로

$$f'(2) = -\frac{1}{5} \text{ 또는 } f'(2) = -1 \text{이다.}$$

㉠에서

$$f'(2) = -\frac{16a+4(3a-b)+b}{(4+1)^2} = -\frac{28a-3b}{25}$$

$$(i) f'(2) = -\frac{1}{5} \text{ 일 때, } -\frac{28a-3b}{25} = -\frac{1}{5} \text{ 이므로}$$

$$28a-3b=5 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{을 연립하면 } a = \frac{1}{2}, b = 3 \text{ 이다.}$$

$$(ii) f'(2) = -1 \text{ 일 때, } -\frac{28a-3b}{25} = -1 \text{ 이므로}$$

$$28a-3b=25 \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{을 연립하면 } a = 1, b = 1 \text{ 이므로 모순이다.}$$

따라서 (i), (ii)에 의하여

$$4(b-a) = 4 \times \left(3 - \frac{1}{2}\right) = 10$$

178) 135

[출제의도] 삼각함수의 극한과 미분을 활용하여 문제해결하기

$$f(x) = a \cos x + x \sin x + b \text{에서}$$

$$f'(x) = (1-a) \sin x + x \cos x$$

$\cos x = 0$ 이면 $\sin x \neq 0$ 이고 $a < 1$ 이므로 $f'(x) \neq 0$

그러므로 $f'(x) = 0$ 이면 $\cos x \neq 0$ 이고

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$x \cos x = (a-1) \sin x$$

$$\tan x = \frac{x}{a-1} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

함수 $y = \tan x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{x}{a-1}$ 는 모두 원점에 대하여

대칭이고

$a < 1$ 에서 직선 $y = \frac{x}{a-1}$ 의 기울기가 음수이므로

$-\pi < x < \pi$ 에서 함수 $y = \tan x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{x}{a-1}$ 는 원점을

포함한 서로 다른 세 점에서 만난다.

조건 (가)에서 원점을 제외한 두 점의 x 좌표는 α, β 이고 원점을 제외한 두 점은 원점에 대하여 대칭이므로 $\alpha = -\beta$ 이다.

조건 (나)에서

$$\frac{1}{\beta} = -\frac{\tan \beta - \tan(-\beta)}{\beta - (-\beta)} = -\frac{\tan \beta}{\beta}$$

$$\tan \beta = -1$$

$$0 < \beta < \pi \text{이므로 } \beta = \frac{3}{4}\pi, \alpha = -\frac{3}{4}\pi$$

$$\textcircled{1} \text{에 } x = \frac{3}{4}\pi \text{를 대입하면}$$

$$\tan \frac{3}{4}\pi = \frac{3}{4(a-1)}\pi, -4(a-1) = 3\pi$$

$$a = 1 - \frac{3}{4}\pi \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = c \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (a \cos x + x \sin x + b) = a + b = 0$$

$$b = -a \text{이고}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(\cos x - 1) + x \sin x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{a(\cos x - 1)}{x^2} + \frac{\sin x}{x} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{a(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x^2(\cos x + 1)} + \frac{\sin x}{x} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{a \sin^2 x}{x^2(\cos x + 1)} + \frac{\sin x}{x} \right\} \\ &= -\frac{a}{2} + 1 = c \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } c = -\frac{a}{2} + 1 = \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{3}{4}\pi\right) + 1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\pi$$

따라서

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\beta - \alpha}{3}\right) + c &= f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\pi \\ &= \frac{\pi}{2} - \left(1 - \frac{3}{4}\pi\right) + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\pi \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{13}{8}\pi = p + q\pi \end{aligned}$$

$$\text{에서 } p = -\frac{1}{2}, q = \frac{13}{8} \text{이므로 } 120 \times (p + q) = 135$$

179) 16

[출제의도] 미분을 이용하여 함수의 그래프를 개형을 그릴 수 있으며 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

$$f(x) = \frac{x^2 - ax}{e^x} = (x^2 - ax)e^{-x}$$

이므로

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x - a)e^{-x} + (x^2 - ax)e^{-x} \times (-1) \\ &= e^{-x} \{-x^2 + (a+2)x - a\} \\ &= -e^{-x} \{x^2 - (a+2)x + a\} \end{aligned}$$

이때, $f'(x) = 0$ 에서

$$x^2 - (a+2)x + a = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = (a+2)^2 - 4a = a^2 + 4 > 0$$

또, ①의 서로 다른 두 근은

$$x = \frac{(a+2) \pm \sqrt{a^2 + 4}}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이때, $a > 0$ 이므로

$$a+2 = \sqrt{(a+2)^2} > \sqrt{a^2 + 4}$$

그러므로 두 양의 실근을 갖는다.

②의 두 근을 α, β ($0 < \alpha < \beta$)라 하면 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 나타내는 표는 다음과 같다.

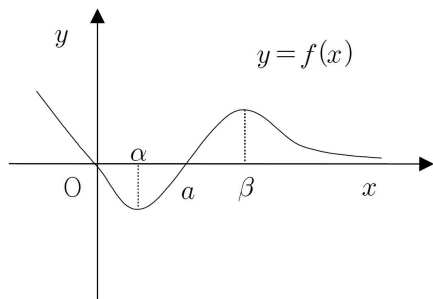
x	\cdots	α	\cdots	β	\cdots
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	\searrow		\nearrow		\searrow

이때,

$$f(0) = 0, f(a) = 0 \text{ 이고}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - ax}{e^x} = 0$$

이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



또,

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^{-x} \{x^2 - (a+2)x + a\} - e^{-x} \{2x - (a+2)\} \\ &= e^{-x} \{x^2 - (a+4)x + 2a + 2\} \end{aligned}$$

이때, $f''(x)=0$ 에서

$$x^2 - (a+4)x + 2a + 2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = (a+4)^2 - 4 \times 1 \times (2a+2) = a^2 + 8 > 0$$

그러므로 함수 $f(x)$ 가 변곡점을 갖는 x 의 값의 개수는 2이다.

한편, 방정식

$$f(x) = f'(x)(x-t) + f(t)$$

의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수

$$y=f(x), y=f'(t)(x-t)+f(t)$$

의 그래프의 교점의 개수이다. 이때, 직선 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$ 는 곡선

$y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선이다.

한편, 함수 $g(x)$ 가 $t=a$ 에서 연속이면

$$g(a) = \lim_{t \rightarrow a} g(t) \text{ 이므로}$$

$g(a) + \lim_{t \rightarrow a} g(t)$ 의 값은 짝수이어야 한다.

그런데

$$g(5) + \lim_{t \rightarrow 5} g(t) = 5 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

이므로 함수 $g(t)$ 는 $t=5$ 에서 불연속이다. 함수 $g(t)$ 가 불연속이 되는 t 의 값은 함수 $f(x)$ 가 극값을 갖는 x 의 값이거나 변곡점을 갖는 x 의 값이다.

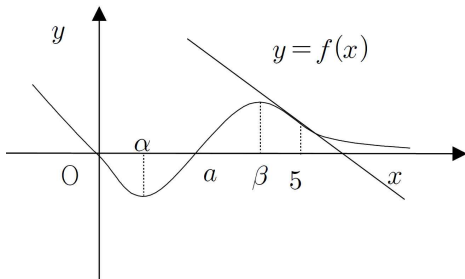
한편, 함수 $f(x)$ 가 극값을 갖는 x 의 값을 m 이라 하면 함수 $g(t)$ 는

$t=m$ 에서 극한값을 갖지 않는다.

또, 함수 $f(x)$ 가 변곡점을 갖는 x 의 값을 n 이라 하면 함수 $g(t)$ 는

$t=n$ 에서 극한값을 갖는다.

그러므로 \textcircled{B} 를 만족시키는 t 의 값은 함수 $f(x)$ 가 변곡점을 갖는 x 의 값 중 큰 값이다.



즉, 함수 $f(x)$ 는 $X=5$ 에서 변곡점을 갖고 이때

$$\lim_{t \rightarrow 5} g(t) = 3, g(5) = 2$$

이므로 조건을 만족시킨다.

따라서, $x=5$ 가 방정식 \textcircled{B} 의 근이므로 대입하면

$$\begin{aligned} 5^2 - (a+4) \times 5 + 2a + 2 &= 0 \\ -3a + 7 &= 0 \end{aligned}$$

$$a = \frac{7}{3} \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

한편,

$$\lim_{t \rightarrow k-} g(t) \neq \lim_{t \rightarrow k+} g(t)$$

를 만족시키는 k 의 값은 함수 $f(x)$ 가 극값을 갖는 x 의 값이다. \textcircled{A} 에

\textcircled{C} 을 대입하면

$$x^2 - \left(\frac{7}{3} + 2\right)x + \frac{7}{3} = 0$$

$$x^2 - \frac{13}{3}x + \frac{7}{3} = 0$$

따라서, 구하는 모든 실수 k 의 값의 합은 근과 계수의 관계를 이용하면

$$\frac{13}{3} \text{ 이므로}$$

$$p+q = 3+13 = 16$$

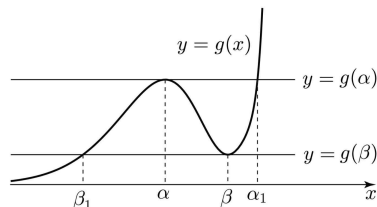
180) 129

[출제의도] 미분법을 활용하여 추론하기

$f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$g'(x) = e^x \{f(x) + f'(x)\} = e^x \{ax^2 + (2a+b)x + b+c\}$$

함수 $g(x)$ 가 극값을 갖지 않으면 조건 (가)를 만족시키지 않으므로 함수 $g(x)$ 는 극값을 갖는다.



함수 $g(x)$ 가 $x=\alpha$ 에서 극댓값, $x=\beta$ 에서 극솟값을 갖는다고 하면

$$g'(x) = e^x \{a(x-\alpha)(x-\beta)\}$$

함수 $h(k)$ 는 $k=t$ ($t \neq g(\alpha), t \neq g(\beta)$)에서

$$\lim_{k \rightarrow t-} h(k) = \lim_{k \rightarrow t+} h(k) = h(t)$$

그러므로 함수 $h(k)$ 는

$k=t$ ($t \neq g(\alpha), t \neq g(\beta)$)에서 연속이다.

조건 (가)에 의하여 함수 $h(k)$ 가 $k=t$ 에서 불연속인 t 의 개수가

1 이므로

함수 $h(k)$ 는 $k=g(\alpha)$ 에서 연속이고 $k=g(\beta)$ 에서 불연속 또는

$k=g(\alpha)$ 에서 불연속이고 $k=g(\beta)$ 에서 연속이다.

(i) 함수 $h(k)$ 가 $k=g(\alpha)$ 에서 연속이고 $k=g(\beta)$ 에서 불연속인 경우

$$\lim_{k \rightarrow g(\alpha)-} h(k) = 2\alpha + \alpha_1$$

$$\lim_{k \rightarrow g(\alpha)+} h(k) = \alpha_1$$

$$h(g(\alpha)) = \alpha + \alpha_1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{k \rightarrow g(\alpha)-} h(k) = \lim_{k \rightarrow g(\alpha)+} h(k) = h(g(\alpha)) \text{ 에서}$$

$$2\alpha + \alpha_1 = \alpha_1 = \alpha + \alpha_1$$

$$\text{그러므로 } \alpha = 0$$

함수 $h(k)$ 는 $k=g(\beta)$ 에서 불연속이므로

$$\lim_{k \rightarrow g(\beta)+} h(k) - \lim_{k \rightarrow g(\beta)-} h(k) = 2\beta \neq 0$$

조건 (나)에 의하여 $\beta = 1, g(\beta) = 3e$

$$g'(0) = 0, g'(1) = 0 \text{ 이므로}$$

$$g'(x) = e^x \{a(x-1)\}$$

$$g(x) = e^x \{a(x^2 - 3x + 3)\}$$

$$g(1) = 3e \text{ 이므로 } a = 3$$

최고차항의 계수가 3 이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) 함수 $h(k)$ 가 $k=g(\alpha)$ 에서 불연속이고 $k=g(\beta)$ 에서 연속인 경우

$$\lim_{k \rightarrow g(\beta)^-} h(k) = \beta_1$$

$$\lim_{k \rightarrow g(\beta)^+} h(k) = 2\beta + \beta_1$$

$$h(g(\beta)) = \beta + \beta_1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{k \rightarrow g(\beta)^-} h(k) = \lim_{k \rightarrow g(\beta)^+} h(k) = h(g(\beta)) \text{ 에서}$$

$$\beta_1 = 2\beta + \beta_1 = \beta + \beta_1$$

$$\text{그러므로 } \beta = 0$$

함수 $h(k)$ 는 $k = g(\alpha)$ 에서 불연속이므로

$$\lim_{k \rightarrow g(\alpha)^+} h(k) - \lim_{k \rightarrow g(\alpha)^-} h(k) = -2\alpha \neq 0$$

$$\text{조건 (나)에 의하여 } \alpha = -1, g(\alpha) = 3e$$

$$g'(0) = 0, g'(-1) = 0 \text{ 이므로}$$

$$g'(x) = e^x \{ax(x+1)\}$$

$$g(x) = e^x \{a(x^2 - x + 1)\}$$

$$g(-1) = 3e \text{ 이므로 } a = e^2$$

$$g(x) = e^{x+2}(x^2 - x + 1)$$

$$\text{따라서 } g(-6) \times g(2) = 43e^{-4} \times 3e^4 = 129$$

181) 283

$x > 0$ 일 때, $g(x) \geq 0$ 이므로 $x = -3$ 일 때

$$g(x+3) \geq 0 \text{ 이다.}$$

따라서 조건 (나)에서 $x > -3$ 일 때 $f'(x) \geq 0$ 이다.

또, 조건 (가)에서 $f(x) \geq f(-3)$ 이므로

함수 $f(x)$ 는 $x = -3$ 에서 극소이면서 최소이다.

조건 (나)에 $x = 0$ 을 대입하면 $f'(0) = 0$ 이므로

$$f'(x) = 4x^2(x+3) = 4x^3 + 12x^2$$

$$f(x) = x^4 + 4x^3 + C \quad (\text{단, } C \text{ 는 적분상수})$$

$$\therefore \int_4^5 g(x) dx = \int_1^2 g(x+3) dx = \int_1^2 \frac{f'(x)}{\{f(x) - f(0)\}^2} dx$$

$f(x) - f(0) = t$ 로 치환하면

$$f(1) - f(0) = 5, f(2) - f(0) = 48$$

$$f'(x) dx = dt \text{ 이므로}$$

$$\int_1^2 \frac{f'(x)}{\{f(x) - f(0)\}^2} dx = \int_5^{48} \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_5^{48}$$

$$= -\frac{1}{48} + \frac{1}{5} = \frac{48-5}{240} = \frac{43}{240}$$

$$\therefore p+q = 240+43 = 283$$

182) 12

[출제외도] 정적분의 성질과 부분적분법을 이용하여 문제를 해결한다.

함수 $g(x)$ 의 한 부정적분을 $G(x)$ 라 하자.

조건 (가)에서

$$\int_{2a}^{3a+x} g(t) dt = \int_{3a-x}^{2a+2} g(t) dt$$

$$G(3a+x) - G(2a) = G(2a+2) - G(3a-x)$$

위 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g(3a+x) = g(3a-x) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

모든 실수 x 에 대하여 $\textcircled{1}$ 이 성립하므로

함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 직선 $x = 3a$ 에 대하여 대칭이다.

$$\int_{2a}^{3a+x} g(t) dt = \int_{3a-x}^{2a+2} g(t) dt = \int_{3a-x}^{4a} g(t) dt + \int_{4a}^{2a+2} g(t) dt$$

$$\int_{2a}^{3a+x} g(t) dt = \int_{3a-x}^{4a} g(t) dt \text{ 에서 } \int_{4a}^{2a+2} g(t) dt = 0$$

조건 (가)에서 $g(x) > 0$ 이므로 $2a+2 = 4a, a = 1$

$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$$h(x) = f(x) + f'(x) + 1 = x^2 + px + q \quad (p, q \text{ 는 상수}) \text{라 하자.}$$

함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 직선 $x = 3$ 에 대하여 대칭이므로

$$g(4) = g(2), \text{ 즉 } h(4) = h(2)$$

$$16 + 4p + q = 4 + 2p + q \text{ 에서 } p = -6$$

조건 (나)에서 $h(4) = 5$ 이므로

$$16 - 24 + q = 5 \text{ 에서 } q = 13$$

$$h(x) = x^2 - 6x + 13 \text{ 에서}$$

$$h'(x) = f'(x) + f''(x) = f'(x) + 2$$

$$\int_3^5 \{f'(x) + 2a\} g(x) dx$$

$$= \int_3^5 \{f'(x) + 2\} g(x) dx = \int_3^5 h'(x) \ln h(x) dx$$

$$= \left[h(x) \ln h(x) \right]_3^5 - \int_3^5 \left\{ h(x) \times \frac{h'(x)}{h(x)} \right\} dx$$

$$= h(5) \ln h(5) - h(3) \ln h(3) - \{h(5) - h(3)\}$$

$$= 8 \ln 8 - 4 \ln 4 - (8 - 4) = -4 + 16 \ln 2$$

따라서 $m = -4, n = 16$ 이므로

$$m + n = 12$$

183) 31

[출제외도] 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구한 후 함숫값을 구할 수 있는가?

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a > 0, b, c, d \text{ 는 상수}) \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \text{ 이므로}$$

$$f(3) = 27a + 9b + 3c + d = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f'(3) = 27a + 6b + c = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

조건 (가)에서

$$h(0) = g(f(0)) = g(d) = e^{\sin \pi d} - 1 = 0$$

$$e^{\sin \pi d} = 1, \sin \pi d = 0$$

따라서, d 는 정수이다. 또한,

$$g'(x) = e^{\sin \pi x} \times \pi \cos \pi x$$

$$h'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$$

이므로

$$h'(0) = g'(f(0)) \times f'(0) = g'(d) \times c$$

$$= e^{\sin \pi d} \times \pi \cos \pi d \times c = \pi \cos \pi d \times c = 0$$

그런데, $\cos \pi d \neq 0$ 이므로 $c = 0$

따라서, $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서

$$27a + 9b + d = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{3}, 9a + 2b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

이고 $a > 0$ 이므로 $b < 0$ 이고 $\textcircled{3} - \textcircled{4}$ 에서

$$3b + d = \frac{1}{2} \text{ 이므로 } d > 0$$

즉, d 는 자연수이다.

따라서 $f'(0) = c = 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극댓값이 $f(0) = d$,

$x = 3$ 에서 극솟값이 $\frac{1}{2}$ 이다.

즉, $0 < x < 3$ 에서 $f(3) < f(x) < f(0)$ 이므로

$$\frac{1}{2} < f(x) < d$$

그런데 조건 (나)에 의하여 열린구간 $(0, 3)$ 에서 방정식

$$h(x) = g(f(x)) = e^{\sin \pi f(x)} - 1 = 1$$

즉, $e^{\sin \pi f(x)} = 2, \sin \pi f(x) = \ln 2$ 가 서로 다른 실근의 개수가 7이고

함수 $y = \sin \pi t$ 의 주기는 2이므로

$$d = 8$$

$\textcircled{3}, \textcircled{4}$ 에서

$$a = \frac{5}{9}, b = -\frac{5}{2}$$

이므로

$$f(x) = \frac{5}{9}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 8$$

따라서

$$f(2) = \frac{40}{9} - 10 + 8 = \frac{22}{9}$$

즉, $p=9$, $q=22$ 이므로

$$p+q=31$$

184) 586

[출제의도] 적분법을 활용하여 문제해결하기

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{1}{10}f'(x)$$

$$= \frac{f'(x)}{10f(x)}\{10-f(x)\}$$

$g'(x)=0$ 이 되려면 $f'(x)=0$ 또는 $f(x)=10$

$f'(x)=2ax$ 이므로 $x=0$ 일 때에만 $f'(x)=0$

(i) 방정식 $f(x)-10=0$ 이 실근을 갖지 않을 때,

$$f'(0)=0, f(x)>10$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	↗	극대	↘

(ii) 방정식 $f(x)-10=0$ 이 중근을 가질 때,

$$f'(0)=0, f(0)=10, f(x) \geq 10$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	↗	극대	↘

(i), (ii)의 경우에는 함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서 극댓값을 갖는다.

그러므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(iii) 방정식 $f(x)-10=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가질 때,

방정식 $f(x)-10=0$ 의 서로 다른 두 실근을 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 라 하면

$$\alpha = -\beta$$

$$f(-x)=f(x) \text{이므로 } g(-x)=g(x)$$

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 y 축 대칭이므로

$$g(\alpha)=g(\beta)$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	α	...	0	...	β	...
$g'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

(iii)의 경우에는 함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서 극솟값을 가지므로 조건

(가)를 만족시킨다.

$$f(0)=b < f(\alpha)=10 \text{이므로}$$

$$1 \leq b < 10$$

$$g(0) = \ln f(0) - \frac{1}{10}(f(0)-1) = \ln b - \frac{1}{10}(b-1)$$

$$p(x) = \ln x - \frac{1}{10}(x-1) \text{이라 하면}$$

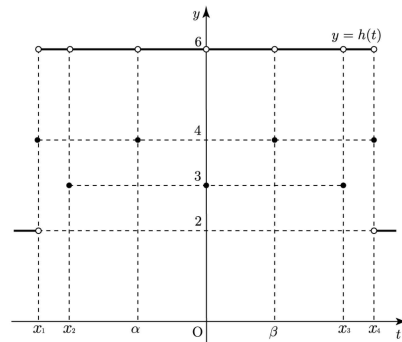
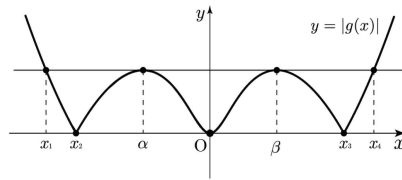
$$p'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{10} = \frac{10-x}{10x}$$

$1 \leq x < 10$ 일 때 $p'(x) > 0$ 이므로 $p(x)$ 는 증가함수이다.

$$g(0) \geq p(1) = 0$$

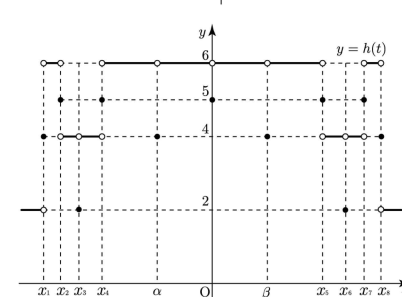
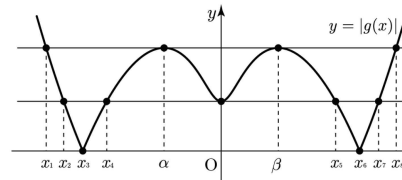
함수 $|g(x)|$ 의 그래프의 개형은 다음 2가지 경우와 같다.

(1) $g(0)=0$ 일 때



함수 $h(t)$ 가 $t=k$ 에서 불연속인 k 의 값의 개수는 7이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

(2) $g(0) > 0$ 일 때



함수 $h(t)$ 가 $t=k$ 에서 불연속인 k 의 값의 개수는 11이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $g(0)=0$

$$0 = g(0) = p(b) \geq p(1) = 0 \text{이므로}$$

$$p(b) = p(1)$$

함수 $p(x)$ 는 $1 \leq x < 10$ 에서

증가함수이므로 $b=1$, $f(x)=ax^2+1$

$$\int_0^a e^x f(x) dx$$

$$= \int_0^a (ax^2+1)e^x dx$$

$$= \left[(ax^2+1)e^x \right]_0^a - \int_0^a 2ax e^x dx$$

$$= (a^3+1)e^a - 1 - \left[2axe^x \right]_0^a + \int_0^a 2ae^x dx$$

$$= (a^3+1)e^a - 1 - 2a^2e^a + \left[2ae^x \right]_0^a$$

$$= (a^3-2a^2+2a+1)e^a - 2a - 1$$

$$me^a - 19 = (a^3-2a^2+2a+1)e^a - 2a - 1$$

따라서 $a=9$ 이므로

$$m = a^3 - 2a^2 + 2a + 1 = 586$$

185) 115

[출제의도] 삼각함수의 극한 및 함수의 극값을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구한 후 치환적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

조건 (가)에서 $x \rightarrow 0$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(\pi \times f(x)) = \sin(\pi \times f(0)) = 0$ 에서

$f(0) = n$ (n 은 정수)이다.

한편, 삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 9이므로

$$f(x) = 9x^3 + ax^2 + bx + n \quad (a, b \text{는 상수})$$

로 놓을 수 있다.

이 때, $h(x) = \sin(\pi \times f(x))$ 라 하면 $h(0) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi \times f(x))}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x} = h'(0) \text{이다. 즉, } h'(0) = 0 \text{이다.}$$

이 때, $h'(x) = \pi f'(x) \times \cos(\pi \times f(x))$ 이므로

$$h'(0) = \pi \times f'(0) \times \cos(\pi n) = 0 \text{에서}$$

$$f'(0) = 0$$

$$f'(x) = 27x^2 + 2ax + b \text{에서}$$

$$f'(0) = b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편, 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) \text{이어야 한다.}$$

이때, 함수 $g(x)$ 는 $0 \leq x < 1$ 일 때 $g(x) = f(x)$ 이고 모든 실수 x 에 대하여 $g(x+1) = g(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} g(x)$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 9 + a + n, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = n \text{이므로}$$

$$9 + a + n = n$$

$$a = -9 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$f'(x) = 27x^2 - 18x = 9x(3x - 2) \text{이므로}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 0 \text{에서 극대이고 } x = \frac{2}{3} \text{에서 극소이다.}$$

조건 (나)에 의해 $f(0) \times f\left(\frac{2}{3}\right) = 5$ 이므로

$$n \times \left(n - \frac{4}{3}\right) = 5$$

$$(3n+5)(n-3) = 0$$

$$n \text{이 정수이므로 } n = 3 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} \sim \textcircled{3} \text{에 의해 } f(x) = 9x^3 - 9x^2 + 3$$

따라서

$$\int_0^5 xg(x)dx$$

$$= \int_0^1 xg(x)dx + \int_1^2 xg(x)dx + \int_2^3 xg(x)dx + \int_3^4 xg(x)dx + \int_4^5 xg(x)dx$$

$$= \int_0^1 xf(x)dx + \int_0^1 (x+1)g(x+1)dx + \int_0^1 (x+2)g(x+2)dx$$

$$+ \int_0^1 (x+3)g(x+3)dx + \int_0^1 (x+4)g(x+4)dx$$

$$= \int_0^1 xf(x)dx + \int_0^1 (x+1)f(x+1)dx + \int_0^1 (x+2)f(x+2)dx$$

$$+ \int_0^1 (x+3)f(x+3)dx + \int_0^1 (x+4)f(x+4)dx$$

$$= 5 \int_0^1 xf(x)dx + 10 \int_0^1 f(x)dx$$

$$= 5 \int_0^1 (9x^4 - 9x^3 + 3x)dx + 10 \int_0^1 (9x^3 - 9x^2 + 3)dx$$

$$= 5 \left[\frac{9}{5}x^5 - \frac{9}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^1 + 10 \left[\frac{9}{4}x^4 - 3x^3 + 3x \right]_0^1$$

$$= \frac{21}{4} + \frac{45}{2} = \frac{111}{4}$$

따라서 $p = 4$, $q = 111$ 이므로 $p + q = 4 + 111 = 115$ 이다.

186) 143

[출제의도] 치환적분법과 부분적분법을 활용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

조건 (가)에서 $f(1) = 1$ 이므로, 조건 (나)에 의하여

$$g(2) = 2f(1) = 2$$

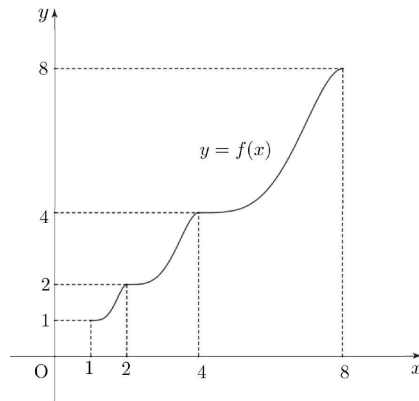
따라서, $f(2) = 2$ 이므로,

$$g(4) = 2f(2) = 4$$

따라서, $f(4) = 4$ 이므로,

$$g(8) = 2f(4) = 8$$

따라서, $f(8) = 8$ 이다.



부분적분법에 의하여

$$\int_1^8 xf'(x)dx = \left[xf(x) \right]_1^8 - \int_1^8 f(x)dx$$

$$= 8f(8) - f(1) - \int_1^8 f(x)dx$$

$$= 8 \times 8 - 1 - \int_1^8 f(x)dx$$

$$= 63 - \int_1^8 f(x)dx \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 때,

$$\int_1^8 f(x)dx$$

$$= \int_1^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx + \int_4^8 f(x)dx \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\text{이고, } \int_1^2 f(x)dx = \frac{5}{4} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

이다. 이 때, 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프의 대칭성에 대하여

$$\int_2^4 f(x)dx = 4 \times 4 - 2 \times 2 - \int_2^4 g(y)dy$$

$$= 12 - \int_2^4 g(y)dy \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

이 때, $y = 2t$ 로 놓으면 치환적분법에 의하여

$$\int_2^4 g(y)dy = 2 \int_1^2 g(2t)dt \text{이므로,}$$

조건 (나)에서

$$\int_2^4 g(y)dy = 2 \int_1^2 g(2t)dt$$

$$= 2 \int_1^2 2f(t)dt$$

$$= 4 \int_1^2 f(x) dx$$

$$= 4 \times \frac{5}{4}$$

$$= 5$$

㉔에서

$$\int_2^4 f(x) dx = 12 - \int_2^4 g(y) dy$$

$$= 12 - 5$$

$$= 7 \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

또, 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프의 대칭성에 의하여

$$\int_4^8 f(x) dx = 8 \times 8 - 4 \times 4 - \int_{4_8} g(y) dy$$

$$= 48 - \int_4^8 g(y) dy \quad \dots\dots \textcircled{㉕}$$

이 때, $y = 2t$ 로 놓으면 치환적분법에 의하여

$$\int_4^8 g(y) dy = 2 \int_2^4 g(2t) dt \text{ 이므로,}$$

조건 (나)에서

$$\int_{4_8} g(y) dy = 2 \int_2^4 g(2t) dt$$

$$= 2 \int_2^4 2f(t) dt$$

$$= 4 \int_2^4 f(x) dx$$

$$= 4 \times 7$$

$$= 28$$

㉕에서

$$\int_4^8 f(x) dx = 48 - \int_4^8 g(y) dy$$

$$= 48 - 28$$

$$= 20 \quad \dots\dots \textcircled{㉚}$$

㉚, ㉔, ㉕, ㉚에서

$$\int_1^8 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx + \int_4^8 f(x) dx$$

$$= \frac{5}{4} + 7 + 20$$

$$= \frac{113}{4}$$

이므로, ㉑에서

$$\int_1^8 x f'(x) dx = 63 - \int_1^8 f(x) dx$$

$$= 63 - \frac{113}{4}$$

$$= \frac{139}{4}$$

따라서 $p + q = 4 + 139 = 143$

다른 풀이

$$\int_1^8 x f'(x) dx \text{에서 } x = g(y) \text{라 하면}$$

$x = 1$ 일 때, $y = 1$, $x = 8$ 일 때, $y = 8$ 이고,

$$\frac{dx}{dy} = g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \text{ 이므로,}$$

$$\int_1^8 x f'(x) dx = \int_1^8 g(y) dy$$

$$= \int_1^2 g(y) dy + \int_2^4 g(y) dy + \int_4^8 g(y) dy$$

이 때,

$$\int_1^2 g(y) dy = 2 \times 2 - 1 \times - \int_1^2 f(x) dx$$

$$= 3 - \frac{5}{4}$$

$$= \frac{7}{4}$$

$$\text{한 편, } \int_2^4 g(y) dy = \int_2^4 2f\left(\frac{y}{2}\right) dy \text{에서}$$

$$\frac{y}{2} = t \text{라 하면 } y = 2 \text{일 때, } t = 1, y = 4 \text{일 때, } t = 2 \text{이고,}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{dt}{dy} \text{이므로,}$$

$$\int_2^4 g(y) dy = \int_2^4 2f\left(\frac{y}{2}\right) dy$$

$$= \int_1^2 4f(t) dt$$

$$= 4 \int_1^2 f(t) dt$$

$$= 4 \times \frac{5}{4}$$

$$= 5$$

$$\text{또, } \int_4^8 g(y) dy = \int_4^8 2f\left(\frac{y}{2}\right) dy \text{에서}$$

$$\frac{y}{2} = t \text{라 하면 } y = 4 \text{일 때, } t = 2, y = 8 \text{일 때, } t = 4 \text{이고,}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{dt}{dy} \text{이므로,}$$

$$\int_4^8 g(y) dy = \int_4^8 2f\left(\frac{y}{2}\right) dy$$

$$= \int_2^4 4f(t) dt$$

$$= 4 \int_2^4 f(t) dt$$

$$= 4 \times \left\{ 4 \times 4 - 2 \times 2 - \int_2^4 g(y) dy \right\}$$

$$= 4(12 - 5)$$

$$= 28$$

$$\text{따라서 } \int_1^8 x f'(x) dx = \int_1^8 g(y) dy$$

$$= \int_1^2 g(y) dy + \int_2^4 g(y) dy + \int_4^8 g(y) dy$$

$$= \frac{7}{4} + 5 + 28$$

$$= \frac{139}{4}$$

이므로, $p + q = 4 + 139 = 143$

[참고]

조건 (나)의 성질 $g(2x) = 2f(x)$ 에서 다음 그림과 같이 각 부분의 넓이가 대각선 방향으로 4배씩 증가함을 알 수 있다.

