문제 2 다음 함수에 대하여 주어진 구간에서 평균값 정리를 만족하는 상수 c 의 값을 구하여라.

(1) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3 \ [-1, 2]$　　(2) $f(x) = -x^2 + 2x \ [1, 3]$

예제 2 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능할 때, 열린구간 (a, b)의 모든 x에 대하여 $f'(x) = 0$ 이면, 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 상수함수임을 보여라.

풀이 $a < x \leq b$ 인 임의의 x 에 대하여 평균값 정리를 적용하면

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c)$$

인 c 가 a 와 x 사이에 존재한다. 그런데 $f'(c) = 0$ 이므로

$$f(x) - f(a) = 0$$

이다. 따라서 $f(x) = f(a)$ 이고 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 상수함수이다.

답 풀이 참조

[사고력 문제] 평균값 정리를 이용하여 모든 a와 b에 대하여 부등식

$$|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$$

임을 보여라.

let $f(x) = \sin x$　　$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = f'(c)$

평균값 정리에 의해　$c \in (b, a)$ 가 존재.

$\Rightarrow \left|\frac{\sin a - \sin b}{a - b}\right| = |\cos c| \leq 1$

[문제 해결력 문제] $f(1) = 7$ 이고 $1 \leq x \leq 3$ 에서 $f'(x) \geq 5$ 이다. $f(3)$의 값으로 가능한, 가장 작은 값을 구하여라.

평균값 정리에 의해

$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = f'(c) \geq 5 \Rightarrow \frac{f(3) - 7}{2} \geq 5$

$\therefore f(3) \geq 17$