[문제 1] 다음 <제시문 1> - <제시문 3>을 읽고 [문제 1-ⅰ] - [문제 1-iii]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문 1>
자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.
(a) $n=1$ 일 때 명제 $p(n)$이 성립한다.
(b) $n=k$ 일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때에도 $p(n)$이 성립한다.

<제시문 2>
두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A와 사건 B가 일어나는 경우의 수를 각각 m, n이라고 하면 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n$이다.

<제시문 3>
두 정수 a와 b에 대하여 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근을 α와 β라고 할 때 (단, $\alpha \le \beta$), 모든 자연수 n에 대하여

$$f_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k}\beta^k = \alpha^n + \alpha^{n-1}\beta + \cdots + \alpha\beta^{n-1} + \beta^n$$

으로 정의하자.

[문제 1-ⅰ]
<제시문 3>에서 정의된 수열 $\{f_n\}$에 대하여, $f_{n+2} = -af_{n+1} + bf_n$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 보이시오. (10점)

[문제 1-ⅱ]
<제시문 1>의 수학적 귀납법을 이용하여, <제시문 3>에서 정의된 수열 $\{f_n\}$의 모든 항이 정수라는 사실을 보이시오. (10점)

[문제 1-iii]
동전을 5번 던져 앞면이 a번 나오고 뒷면이 b번 나왔다고 할 때, 절댓값 $|f_5|$의 값이 1000보다 클 경우의 수를 구하고, 그 이유를 논하시오. (10점)

[문제 2] 다음 <제시문 1> - <제시문 3>을 읽고 [문제 2-ⅰ] - [문제 2-iii]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문 1>

자연수의 거듭제곱의 합은 다음과 같다.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

<제시문 2>

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 제 n항을 l이라 하고, 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라고 하면, $S_n = \frac{n(a+l)}{2} = \frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$이다.

<제시문 3>

음이 아닌 정수 x가, 음이 아닌 정수 a와 b에 대해 $3x = 15a - 25b - 2$를 만족할 때, 이러한 모든 x의 집합을 S라고 하자. 그리고, 집합 S의 원소를 작은 수부터 차례로 $a_1, a_2, a_3, \cdots$로 나타내자.

[문제 2-ⅰ]

<제시문 3>에서 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여, a_{100}의 값을 구하고 그 이유를 논하시오. (10점)

[문제 2-ii]

<제시문 3>에서 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여, $\sum_{n=11}^{20} a_n^2 = a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{20}^2$의 값을 nr하고, 그 이유를 논하시오. (10점)

[문제 2-iii]

<제시문 3>에서 정의된 수열 $\{a_n\}$과 상수 c에 대하여, 일반항이 $b_n = a_n - c(n-1)$인 수열 $\{b_n\}$을 정의하고, 이 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 T_n이라고 하자. 비 $T_n : T_{2n}$이 n의 값에 관계없이 일정하기 위한 c의 값을 모두 구하고, 그 이유를 논하시오. (15점)

[문제 3] 다음 <제시문 1> - <제시문 3>을 읽고 [문제 3- ⅰ] - [문제 3-ⅲ]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문 1>
실수 x의 절댓값 $|x|$는 수직선 위에서 실수 x를 나타내는 점과 원점 사이의 거리를 나타낸다. 에를 들어, $|x|=5$이면 $x=5$ 또는 $x=-5$ 이다.

<제시문 2>
함수 $f(x)$에서 $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x) \le f(a)$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대라 하며, $f(a)$를 극댓값이라고 한다. 또, $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x) \ge f(a)$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소라 하며, $f(a)$를 극솟값이라고 한다. 극댓값과 극솟값을 통틀어 극값이라고 한다.

<제시문 3>
<제시문 1>을 이용하여 실수 전체에서 정의되는 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$\begin{cases} f(x)=x-|x+2|+|x+1|-|x-1|+|x-2| \\ g(x)=|x|^3-x^2 \end{cases}$$

그리고 이 두함수의 합성함수를 $h(x)=(g \circ f)(x)=g(f(x))$라고 하자.

[문제 3- ⅰ]
<제시문 3>에서 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극대일 때, 가능한 a의 값을 모두 구하고, 그 이유를 논하시오. (10점)

[문제 3-ⅱ]
<제시문 3>에서 정의된 함수 $h(x)$가 $x=a$에서 극대이기 위한 a의 절댓값의 합과 $x=b$에서 극소이기 위한 b의 절댓값의 합을 각각 구하고, 그 이유를 논하시오. (15점)

[문제 3-ⅲ]
<제시문 3>에서 정의된 함수 $h(x)$에 대하여 정적분 $\int_{-2}^{2} h(x)dx$의 값을 구하고, 그 이유를 논하시오. (10점)

sol.

[문제 1-ⅰ]

$x^2+ax-b=0$의 두 근이 α, β이므로 $\alpha+\beta=-a, \alpha\beta=-b$이다.

$$
\begin{aligned}
-af_{n+1}+bf_n &= (\alpha+\beta)\sum_{k=0}^{n+1}\alpha^{(n+1)-k}\beta^k-\alpha\beta\sum_{k=0}^{n}\alpha^{n-k}\beta^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\alpha^{(n+2)-k}\beta^k+\sum_{k=0}^{n+1}\alpha^{(n+1)-k}\beta^{k+1}-\sum_{k=0}^{n}\alpha^{(n+1)-k}\beta^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\alpha^{n+2-k}\beta^k+(\alpha^{n+1}\beta+\alpha^n\beta^2+\alpha^{n-1}\beta^3+\cdots+\alpha\beta^{n+1}+\beta^{n+2}) \\
&\qquad -(\alpha^{n+1}\beta+\alpha^n\beta^2+\alpha^{n-1}\beta^3+\cdots+\alpha^2\beta^n+\alpha\beta^{n+1}) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\alpha^{n+2-k}\beta^k+\beta^{n+2} \\
&= \sum_{k=0}^{n+2}\alpha^{n+2-k}\beta^k \\
&= f_{n+2}
\end{aligned}
$$

[문제 1-ⅱ]

$f_1=\alpha+\beta=-a$

$f_2=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta=a^2+b$

이므로 f_1과 f_2는 정수이다.

f_n과 f_{n+1}이 정수라고 가정하면, [문제 1-ⅰ]에 의해 $f_{n+2}=-af_{n+1}+bf_n$이므로 f_{n+2} 또한 정수이다.

따라서 수학적 귀납법에 의해 수열 $\{f_n\}$의 모든 항이 정수이다.

[문제 1-ⅲ]

f_5를 구하자.

$f_1=-a$

$f_2=a^2+b$

와 [문제 1-ⅰ]의 수열 $\{f_n\}$의 귀납적 정의를 이용하자.

$f_3=-af_2+bf_1=-a(a^2+b)-ab=-a^3-2ab$

$f_4=-af_3+bf_2=-a(-a^3-2ab)+b(a^2+b)=a^4+3a^2b+b^2$

$$
\begin{aligned}
f_5 &= -af_4+bf_3=-a(a^4+3a^2b+b^2)+b(-a^3-2ab) \\
&= -a^5-4a^3b-3ab^2=-a(a^2+b)(a^2+3b)
\end{aligned}
$$

a는 동전을 5번 던져서 앞면이 나온 횟수이고, b는 뒷면이 나온 회수이므로 $(a,b)=(0-5)$, $(1,4)$, $\cdots$, $(5,0)$

a	0	1	2	3	4	5
b	5	4	3	2	1	0
f_5	0	-65	-182	-495	-1292	-3125
$\lvert f_5 \rvert$	0	65	182	495	1292	3125

그러므로, $(a,b)=(4,1),(5,0)$로 경우의 수는 두 가지이다.

[문제 2-ⅰ]

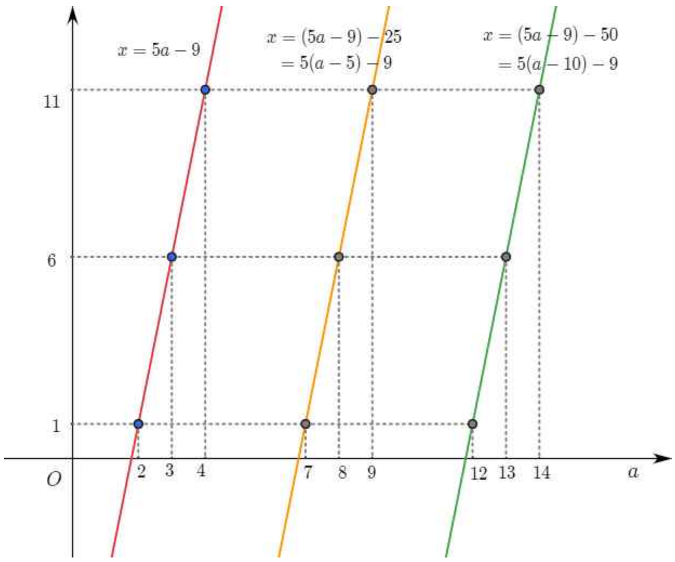
$3x=15a-25b-2$에서 $3x$는 3의 배수이므로 우변의 $15a-25b-2$ 또한 3의 배수이다.
여기서 $15a$ 또한 3의 배수라는 사실에 주목하자.
b를 3으로 나눈 나머지에 따라 $3k, 3k+1, 3k+2$로 경우를 나누어 확인하면

① $b=3k$
$15a-25b-2=15a-75k-2$에서 3으로 나눈 나머지는 1
② $b=3k+1$
$15a-25b-2=15a-75k-27$에서 3의 배수
③ $b=3k+2$
$15a-25b-2=15a-75k-52$에서 3으로 나눈 나머지는 2

이다. 따라서 $b=3k+1$, k는 음아닌 정수, 이다.
이때, $3x=15a-75k-27$, $x=5a-25k-9$이다.
k에 0부터 정수를 차례로 대입하면

$k=0$일 때,
$x=5a-9$이고 a 또한 음 아닌 정수이므로 $x=-9, 1, 6, 11, 16, \cdots$
x 또한 음 아닌 정수이므로 적당한 $x=1, 6, 11, 16, \cdots$

$x=5a-25k-9=5(a-5k)-9$이므로 x값은 k값에 따라 a축으로 $5k$만큼 평행이동한 것이므로 $k \geq 1$일 때도 x의 값은 동일하다.



따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공차가 5인 등차수열이다.

$$\therefore\ a_{100}=1+99\times5=496$$

[문제2-ii]

$$\begin{aligned}\sum_{n=11}^{20}a_n^2&=\sum_{n=1}^{20}a_n^2-\sum_{n=1}^{10}a_n^2\\&=\sum_{n=1}^{20}(5n-4)^2-\sum_{n=1}^{10}(5n-4)^2\\&=\sum_{n=1}^{20}(25n^2-40n+16)-\sum_{n=1}^{10}(25n^2-40n+16)\\&=\left(25\times\frac{20\cdot21\cdot41}{6}-40\times\frac{202\cdot21}{2}+16\times20\right)\\&\qquad-\left(25\times\frac{10\cdot11\cdot21}{6}-40\times\frac{10\cdot11}{2}+16\times10\right)\\&=56085\end{aligned}$$

[문제 2-iii]

$b_n=a_n-c(n-1)=5n-4-cn+c=(5-c)n+(c-4)$

에서

$$T_n=(5-c)\cdot\frac{n(n+1)}{2}+(c-4)n$$

$$T_{2n}=(5-c)\cdot\frac{2n(2n+1)}{2}+(c-4)\cdot2n$$

이고 $T_n:T_{2n}$이 n의 값에 관계없이 일정하므로

$$\frac{T_n}{T_{2n}} = \frac{(5-c)(n+1)+2(c-4)}{(5-c)\cdot 2n(2n+1)+4(c-4)} = \frac{(5-c)n+(c-3)}{4(5-c)n+(2c-6)} = k,\ k\text{는 상수}$$

이다.

$(5-c)n+(c-3) = 4k(5-c)n+k(2c-6)$

에서, 이는 n의 값에 관계없이 성립하므로

$$\begin{cases} 5-c = 4k(5-c) \\ c-3 = k(2c-6) \end{cases}$$

이다.

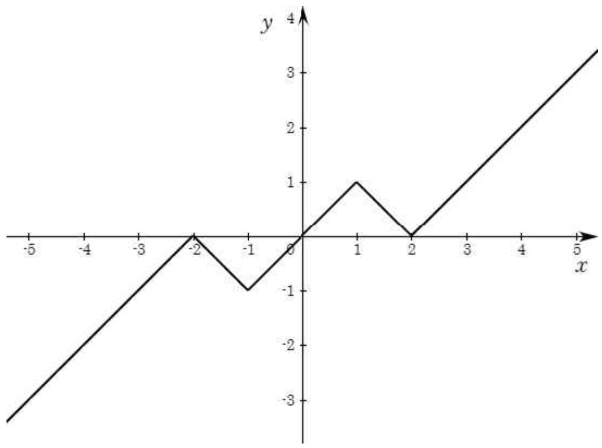
따라서, $k=\frac{1}{4}$일 때, $c=3$이고, $k=\frac{1}{2}$일 때, $c=5$이다.

$\therefore\ c=3,5$

[문제 3-ⅰ]

$$f(x)=\begin{cases} x+2, & x<-2 \\ -x-2, & -2 \le x < -1 \\ x, & -1 \le x < 1 \\ -x+2, & 1 \le x < 2 \\ x-2, & x \ge 2 \end{cases}$$

이다.



-2를 포함하는 열린 구간 $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$의 모든 x에 대하여 $f(x) \le f(-2)$를 만족하므로 $x=-2$에서 $f(x)$는 극대이고, 1을 포함하는 열린 구간 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$의 모든 x에 대하여 $f(x) \le f(1)$을 만족하므로 $x=1$에서 $f(x)$는 극대이다.

$$\therefore\ a=-2, 1$$

[문제 3-ii]

$g(f(x))=|f(x)|^3-f(x)^2$에서 함수 $f(x)$는 $x<0$일 때, $f(x)<0$이고, $x\geq 0$일 때, $f(x)\geq 0$이다. 따라서

$$g(f(x))=|f(x)|^3-f(x)^2=\begin{cases} -f(x)^3-f(x)^2, & x<0 \\ f(x)^3-f(x)^2, & x\geq 0 \end{cases}$$

이다. [문제 3-ⅰ]의 결과를 이용하면

$$h(x)=g(f(x))=\begin{cases} -(x+2)^2(x+3), & x<-2 \\ (x+2)^2(x+1), & -2\leq x<-1 \\ -x^2(x+1), & -1\leq x<0 \\ x^2(x-1), & 0\leq x<1 \\ -(x-2)^2(x-1), & 1\leq x<2 \\ (x-2)^2(x-3), & x\geq 2 \end{cases}$$

이다.

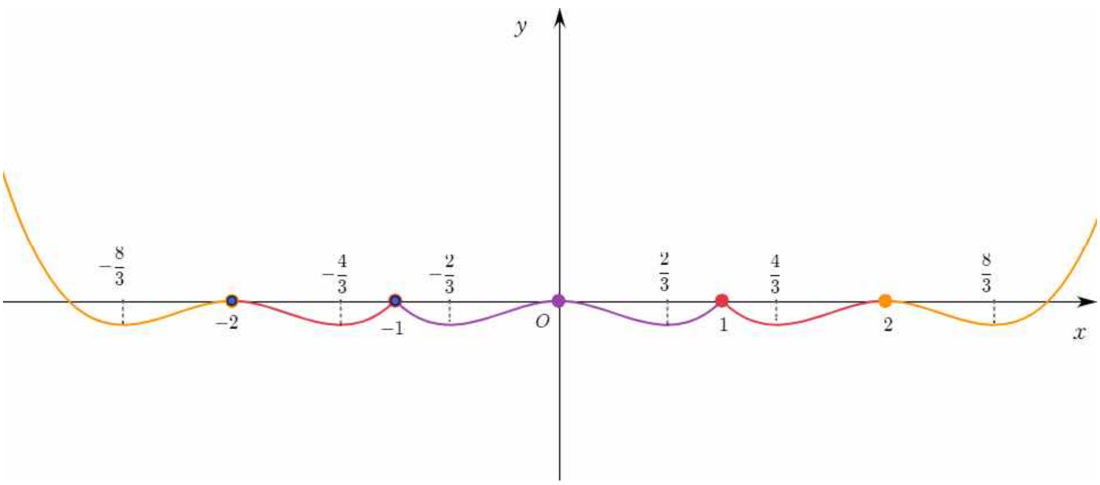
$y=h(x)$의 그래프는 y축 대칭함수이다. 이를 이용하여 극값을 구하자.

$y=x^2(x-1)$에서 $y'=2x(x-1)+x^2=x(3x-2)=0 \to x=0, \frac{2}{3}$

$y=-(x-2)^2(x-1)$에서 $y'=-(x-2)(3x-4)=0 \to x=\frac{4}{3}, 2$

$y=(x-2)^2(x-3)$에서 $y'=(x-2)(3x-8)=0 \to x=2, x=\frac{8}{3}$

를 이용하여 정의역에 포함되는 값에 대하여 극대, 극소를 판별하면 극대는 $x=-2, -1, 0, 1, 2$에서 가지고 극소는 $x=-\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}$에서 가짐을 알 수 있다.



따라서 a의 절댓값의 합은 6, b의 절댓값의 합은 $\frac{28}{3}$이다.

[문제 3-iii]

$y=h(x)$는 우함수이므로

$$\int_{-2}^{2} h(x) = 2\int_{0}^{2} h(x)dx$$

$$= 2\left(\int_{0}^{1} x^2(x-1)dx + \int_{1}^{2} -(x-2)^2(x-1)dx\right)$$

이다.

$$\int_{0}^{1} x^2(x-1)dx = \int_{0}^{1}(x^3-x^2)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = -\frac{1}{12}$$

$\int_{1}^{2}(x-2)^2(x-1)dx = \int_{-1}^{0} t^2(t+1)dt$, by letting $x-2=t$

$$= \left[\frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}t^3\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{12}$$

이다.

$$\therefore \int_{-2}^{2} h(x)dx = 2\left(-\frac{1}{12} - \frac{1}{12}\right) = -\frac{1}{3}$$